ÁLGEBRA LINEAL II **Algunas soluciones a la práctica 3.1-3.2**

Geometría afín. (Curso 2020–2021)

2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos* $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, *las rectas*

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $\quad P: 3x-2y+4z+8=0, \quad Q: x+5y-6z-4=0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(d) *Plano que pasa por* B *y es paralelo a* r *y* s.

La dirección del plano está generada por los vectores directores de r y s, es decir, $(3,1,1)$ y $(1,2,-3)$. Por tanto el vector normal (perpendicular) del plano será el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

El plano será de la forma

$$-5x + 10y + 5z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por $B(-1,0,3)$ queda $\lambda = -20$, y el plano es

$$-x + 2y + z - 4 = 0$$

Otra forma de calcularlo directamente es tomar los puntos (x,y,z) de manera que el vector que los une con B sea linealmente dependiente de los vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(f) *Plano perpendicular a* s *y que pasa por* B.

El vector normal al plano que buscamos será el vector director de s, es decir, $(1,2,-3)$. La ecuación del plano es de la forma:

$$x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

e imponiendo que $B(-1,0,3)$ esté en el plano, queda $\lambda = 10$:

$$x + 2y - 3z + 10 = 0$$

(h) *Plano perpendicular a* P *y* Q *y que pasa por* B.

Si el plano es perpendicular a P y Q su dirección está generada por los vectores normales a ambos. El plano buscado viene dado entonces por la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & -2 & 4 \\ 1 & 5 & -6 \end{vmatrix} = 0 \iff -8x + 22y + 17z - 59 = 0$$

(k) *Recta que contiene a B, es paralela a Q y corta a r.*

Tomaremos un plano π paralelo a Q y que pase por B. La recta que buscamos pasará por B y por el punto de corte de r y π.

Primero calculamos π:

$$x + 5y - 6z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por B, $\lambda = 19$. Ahora intersecamos tal plano con r. Un puntos de r es de la forma $(-1 + 3\mu, 2 + \mu, \mu)$. Ha de verificar la ecuación del plano π:

$$(-1 + 3\mu) + 5(2 + \mu) - 6\mu + 19 = 0$$

Obtenemos $\mu = -14$ y el punto de corte de r y π es $(-43, -12, -14)$. Ahora la recta pedida es la que une este punto con B:

$$\frac{x+1}{-43+1} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-14-3} \iff \frac{x+1}{-42} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-17}$$

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{||\overline{AC} \wedge \bar{v}||}{||\bar{v}||}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1, 2, 0)$, $\bar{v}(3, 1, 1)$.

$$d(A, r) = \frac{||(-3, 3, -1) \wedge (3, 1, 1)||}{||(3, 1, 1)|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B,P) = \frac{3\cdot(-1) - 2\cdot 0 + 4\cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r,s) = \frac{\|(7/30+1, 7/15-2, -7/10)\wedge(3,1,1)\|}{\|(3,1,1)|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[(-1,2,0)-(0,0,0),(3,1,1),(1,2,-3)]|}{\|(3,1,1)\wedge(1,2,-3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|((3,1,1)(1,2,-3))|}{\|(3,1,1)\|\|(1,2,-3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 80,72^o$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la direción normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$sin(\alpha(s,Q)) = \frac{|((1,2,-3)(1,5,-6))|}{\|(1,2,-3)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(s,Q) = 79,84^o$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direciones normales:

$$cos(\alpha(P,Q)) = \frac{|((3,-2,4)(1,5,-6))|}{\|(3,-2,4)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(P,Q) = 43,02^o$$

3.– *En el espacio afín dar la ecuación de una recta pasando por el punto $P = (1,0,1)$ y que corta perpendicularmente a la recta:*

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} y+z=4 \\ x+3y=11 \end{array} \right.$$

Hallar también la distancia entre P y s.

Calcularemos el plano π perpendicular a s y pasando por el punto P, que contiene a la recta buscada.

Después hallamos $Q = \pi \cap S$ y finalmente la recta pedia es la recta PQ.

Las ecuaciones paramétricas de s, resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones impícitas son:

$$x = -1+3t, \quad y = 4-t, \quad z = t.$$

Por tanto el vector director de s es $u_s = (3, -1, 1)$ y un plano perpendicular a ella es de la forma $3x - y + z + d = 0$. Imponemos que pase por $P = (1, 0, 1)$, $3 \cdot 1 - 0 + 1 + d = 0$, de donde , $d = -4$ y $\pi \equiv 3x - y + z - 4 = 0$.

Ahora para hallar $Q = \pi \cap S$ sustituimos las ecuaciones paramétricas de S en el plano π:

$$3(-1 + 3t) - (4 - t) + t - 4 = 0 \iff 11t - 11 = 0 \iff t = 1.$$

Luego $Q = (-1 + 3 \cdot 1, 4 - 1, 1) = (2, 3, 1)$.

La recta pedida es la recta PQ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-0}{3-0} = \frac{z-1}{1-1} \iff \begin{cases} 3x - y - 3 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$$

La distancia del punto P a la recta s es precisamente la distancia entre los puntos P y Q:

$$d(P, s) = d(P, Q) = \sqrt{(2-1)^2 + (3-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10}.$$

4.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera un triángulo isósceles* ABC *con ángulo desigual en el vértices* C*. Se sabe que está contenido en el plano de ecuación* $x + y + z = 1$*,* $A = (2, -1, 0)$*,* $B = (0, -1, 2)$ *y tiene un área de* $4\sqrt{3}$*.*

(iii) *Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que transforme el punto* A *en el punto* B *y deje* C *fijo.* (1 punto)

La recta de simetría tiene que ser precisamente la mediatriz del segmento A y B que pasa por C. Vimos en el apartado (i) que es la recta que pasa por $M = (1, -1, 1)$ y tiene vector director $\vec{v} = (1, -2, 1)$.

Entonces las ecuaciones de la simetría son $f(P) = M + t(P - M)$ donde t es la simetría respecto a la recta vectorial generadara por $\vec{v}$ y M es un punto fijo de la transformación; matricialmente:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

siendo T_C la matriz de la simetría respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, -2, 1)\}$.

Calculamos dicha matriz. Construimos una base B con el vector que generea la recta de simetría y otros dos perpendiculares a el; es decir dos vectores indendientes cumpliendo:

$$(x, y, z) \cdot (1, -2, 1) = 0 \qquad \iff \qquad x - 2y + z = 0.$$

Por ejemplo:

$$B = \{(1, -2, 1), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos el cambio de base:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$T_C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Y la ecuación de la simetría resulta:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y+1 \\ z-1 \end{pmatrix}$$

5.– *En el espacio afín* $\mathbb{R}^3$ *se considera un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcular la distancia entre el punto $(-4,1,0)$ *y la recta* r *de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=3 \end{cases}$$

Aunque sabemos que hay una fórmula directa para hallar la distancia de un punto a un plano en el espacio, no es aconsejable usarla porque utiliza el prodcuto vectorial y el método de cáclulo habitual de mismo no es válido bajo productos escalares distintos del usual.

Entonces para calcular la distancia hallaremos directamente un punto Q en la recta r de forma que el vector que lo une con $P=(-4,1,0)$ sea ortogonal a la recta. En ese caso sabemos que $d(P,r)=d(P,Q)$.

Comenzamos hallando las ecuaciones paramétricas de la recta resolviendo en función de un parámetro el sistema formado por sus dos ecuacioens implícitas. Sumándolas obtenemos $x=2$ y después de la primera $y=z-1$. Nos queda:

$$x=2, \quad y=\lambda-1, \quad z=\lambda.$$

Vemos también que el vector director de la recta es $(0,1,1)$.

Ahora un punto Q de la recta será:

$$Q=(2,\lambda-1,\lambda)$$

Imponemos que PQ sea ortogonal a $(0,1,1)$:

$$PQ=Q-P=(6,\lambda-2,\lambda)$$

y

$$0=PQ\cdot(0,1,1)=(6,\lambda-2,\lambda)G_C(0,1,1)^t=6\lambda$$

Deducimos que $\lambda=0$ y:

$$d(P,r)=d(P,Q)=\|PQ\|=\|(6,-2,-0)\|=\sqrt{(6,-2,0)G_C(6,-2,0)}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}.$$

6.– *En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de* 90^o *respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:*

$$(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(3,0,4), \qquad \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda>0.$$

(1.2 puntos)

Las ecuaciones de giro son:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$$

donde T_C es la matriz de giro de semieje generado por $(3,0,4)$ y ángulo 90^o.

Para hallar la matriz T_C construimos una base ortonormal B bien orientada donde el primer vector será el generador del semieje normalizado:

- Buscamos un vector $\vec{u}_2$ perpendicular a $(3,0,4)$:

$$(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 \iff 3x+4z=0$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2=(0,1,0)$.

- Buscamos un segundo vector $\vec{u}_3$ perpendicular a $(3,0,4)$ y $(0,1,0)$:

$$\begin{array}{l}(x,y,z)\cdot(3,0,4)=0 \iff 3x+4z=0\\(x,y,z)\cdot(0,1,0)=0 \iff y=0\end{array}$$

Tomamos $\vec{u}_3=(-4,0,3)$.

Comprobamos si la base $\{(3,0,4),(0,1,0),(-4,0,3)\}$ tiene orientación positiva:

$$det\begin{pmatrix}3&0&-4\\0&1&0\\4&0&3\end{pmatrix}=25>0 \quad\Rightarrow\quad \text{Orientación positiva.}$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|}=(3/5,0,4/5),\quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|}=(0,1,/0),\quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|}=(-4/5,0,3/5)$$

Tenemos una base $B=\{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ ortonormal bien orientada. En esa base la matriz de giro de $\alpha=90^o$ es:

$$T_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos\,\alpha&-sin\,\alpha\\0&sin\,\alpha&cos\,\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{BC}=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB}=\begin{pmatrix}3/5&0&-4/5\\0&1&0\\4/5&0&3/5\end{pmatrix}$$

Usamos además que por ser C y B ambas ortonormales, $M_{CB}^{-1}=M_{CB}^t$. Operando queda:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^t=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9&-20&12\\20&0&-15\\12&15&16\end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del giro son:

$$f\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\frac{1}{25}\begin{pmatrix}9&-20&12\\20&0&-15\\12&15&16\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x-1\\y\\z\end{pmatrix}$$

11.– *En el espacio afín consideramos una pirámide regular de base cuadrada. Denotamos por A, B, C, D a los cuatro vértices de la base y por E al vértice superior. Sabiendo que la base está contenida en el plano $z = 0$, que $A = (0, 0, 0)$ y $C = (4, 2, 0)$ son vértices opuestos de la base y que la altura del pirámide es 5 calcular:*

(i) *Las coordenadas de los tres vértices restantes.*

La longitud de la diagonal d del cuadrado es la distancia entre A y C:

$$d = d(A, C) = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{20}.$$

Por el Teorema de Pitágoras el lado l del cuadrado cumple:

$$l^2 + l^2 = d^2 \quad \Rightarrow \quad l = \frac{d}{\sqrt{2}} = \sqrt{10}.$$

Los vértices B y D distan de C y A la distancia l. Además por estra en el plano $z = 0$ son de la forma $(a, b, 0)$. Por tanto planteamos las ecuaciones:

$$d(B, A) = \sqrt{10} \iff \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10} \iff a^2 + b^2 = 10$$
$$d(B, C) = \sqrt{10} \iff \sqrt{(a-4)^2 + (b-2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{10} \iff a^2 - 8a + 16 + b^2 - 4b + 4 = 10$$

Restando las ecuaciones:

$$8a + 4b = 20 \quad \Rightarrow \quad b = 5 - 2a$$

Sustituyendo en $a^2 + b^2 = 10$:

$$a^2 + (5-2a)^2 = 10 \iff 5a^2 - 20a + 15 = 0 \iff a^2 - 4a + 3 = 0 \iff$$
$$\iff a = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 12}}{2} \iff a = 1 \text{ ó } a = 3.$$

Si $a = 1$ entoncse $b = 5 - 2 \cdot 1 = 3$ y si $a = 3$ entonces $b = 5 - 2 \cdot 3 = -1$.

Los vértices B y D son $B = (1, 3, 0)$ y $D = (3, -1, 0)$.

El vértice E está sobre el punto medio M de la base, que es el punto medio de A y D y a altura 5:

$$M = \frac{A + C}{2} = (2, 1, 0).$$

Dado que el vector $(0, 0, 1)$ es unitario y perpendicular a la base

$$E = M \pm 5(0, 0, 1) = (2, 1, \pm 5).$$

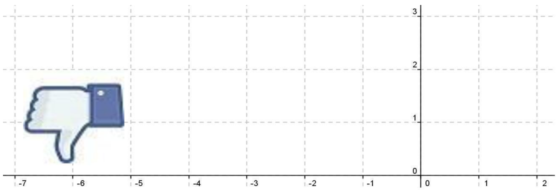
(hay dos posibles soluciones para el vértice E).

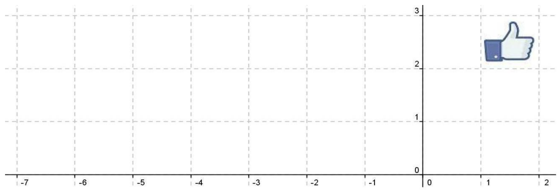
(ii) *El volumen de la pirámide.*

El volumen de una pirámide es:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot \text{altura}}{3} = \frac{l^2 \cdot h}{3} = \frac{10 \cdot 5}{3} = \frac{50}{3}.$$

12.– *Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:*





Si observamos la figura inicial y la final, vemos que están inscritas en un cuadrado de lado 2 y lado 1 respectivamente. Además una se encuentra girada 180 grados respecto a la otra. Deducimos que se tratará de una homotecia de razón $r = -1/2$. El centro de la homotecia puede obtenerse como la intersección de un par de rectas que unan un punto con su transformado.

El punto $(-5, 2)$ se transforma en $(1, 2)$ y la recta que los une es $y = 2$.

El punto $(-5, 0)$ se transforma en $(1, 3)$ y la recta que los une es $\dfrac{x-1}{-5-1} = \dfrac{y-3}{0-3}$; simplificando $x - 2y + 5 = 0$.

Intersecando ambas rectas obtenemos que el centro de la homotecia es $(-1, 2)$.

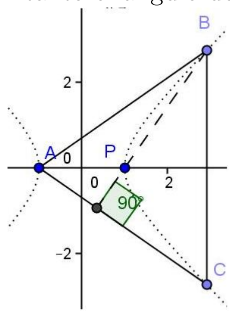
La ecuación de la homotecia queda por tanto:

$$t(x, y) = (-1, 2) - \frac{1}{2}((x, y) - (-1, 2)) = (-\frac{3}{2}, 3) - \frac{1}{2}(x, y).$$

13.– *En el plano afín sean los puntos $A(-1, 0)$ y $P(1, 0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P. ¿Qué tipo de curva es?.+*

Hay dos posibles interpretaciones:

- Los lados iguales son AB y AC, y por tanto el ángulo desigual el A:



En un triángulo isósceles la recta que une el vértice del ángulo desigual con el ortocentro es un eje de simetría. En nuestro caso tal recta, la que une A y P, es el eje OX. Si B tiene coordenadas (x, y) su simétrico respecto al eje OX es el punto C, $(x, -y)$, de forma que los tres vértices del triángulo son ABC.

Para que P sea el ortocentro el lado AC ha de ser perpendicular a la altura de vértice B, es decir, al vecotr BP. Por tanto:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0$$

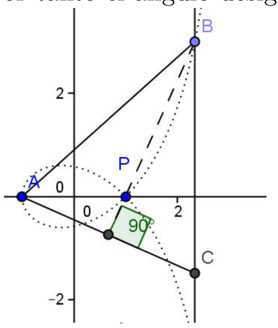
es decir:

$$(x - (-1), -y - 0) \cdot (1 - x, 0 - y) = 0 \iff (1 + x)(1 - x) + y^2 = 0 \iff x^2 - y^2 = 1$$

Vemos que la ecuación del lugar geométrico pedido corresponde a la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

- Los lados iguales son AB y BC y por tanto el ángulo desigual B:



La altura sobre el lado BC es la recta que une A con el ortocentro; por tanto BC es perpendicular al eje OX. Así si B tiene coordenadas (x, y) entonces C tiene coordenadas (x, y').

Dado que la distancia AB es la misma que BC:

$$(x+1)^2 + y^2 = (y - y'^2) \quad \iff \quad (x+1)^2 = y'^2 - 2yy'$$

Por otra parte la recta BP tiene que ser perpendicular la lado AC, es decir:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0 \iff (x-(-1), -y-0) \cdot (1-x, 0-y') = 0 \iff (1+x)(1-x) + yy' = 0 \iff x^2 - 1 + yy' = 0$$

Despejando y' en la segunda ecuacin y sustiyuendo en la primera se tiene:

$$(x+1)^2 = \frac{(1-x^2)^2}{y^2} - 2(1-x^2)$$

Dividiendo por $x+1$:

$$(x+1) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{y^2} + 2(x-1)$$

Quitando denominadores y simplificando obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 - xy^2 - 3y^2 = 0,$$

que es la ecuación de una cúbica.

15.– *En el plano afín se sean las rectas $r \equiv y - 1 = 0$ y $s \equiv x - y = 0$. Para cada punto P de s se traza una recta l perpendicular a s pasando por P. Sea Q el punto de corte de r y l.*

(i) *Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos medios de P y Q.*

Un punto $P = (a, b)$ de la recta s cumple la ecuación $x - y = 0$. Por tanto $a - b = 0$ y $a = b$. Podemos escribir $P = (a, a)$.

La recta perpendicular a s que pasa por P tiene por vector director el vector normal de s, es edcir, $(1, -1)$. Su ecuación vectorial es:

$$(x, y) = (a, a) + \lambda(1, -1).$$

Cortamos con la recta r, $y = 1$:

$$a - \lambda = 1 \iff \lambda = a - 1$$

El punto de corte Q es:

$$(a, a) + (a-1)(1, -1) = (2a - 1, 1)$$

Finalmente el punto medio de P y Q es:

$$\frac{P+Q}{2} = \frac{(a, a) + (2a-1, 1)}{2} = \left(\frac{3a-1}{2}, \frac{a+1}{2}\right).$$

Las ecuaciones paramétricas del lugar geométrico son:

$$x = \frac{3a-1}{2}, \quad y = \frac{a+1}{2}.$$

Para hallar las implícitas despejamos el parámetro a en una ecuación y sustituimos en la otra:

$$a = 2y - 1, \qquad 2x = 3a - 1 = 3(2y-1) - 1 = 6y - 4$$

En definitiva la ecuación implícita pedida es:

$$x - 3y + 2 = 0.$$

(ii) *Hallar el ángulo que forman las rectas r y s.*

El ángulo que forman las rectas es el mismo que forman sus vectores normales $\vec{n}_r = (0,1)$ y $\vec{n}_s = (1,-1)$:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s}{\|\vec{n}_r\|\|\vec{n}_s\|} = \frac{(0,1)\cdot(1,-1)}{\|(0,1)\|\|(1,-1)\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

Por tanto:

$$\alpha = arcos\frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^o.$$

16.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1,0,0)$ y $B = (1,2,2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.*

Método I: Un punto $P = (x,y,z)$ equidista de A y B si:

$$d(P,A) = d(P,B) \iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1,1,1).$$

El vector $\vec{AB} = (0,2,2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0,1,1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M:

$$1 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

Así el lugar geomẃetrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB, equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\|\|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(a-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)} \quad \Rightarrow \quad 6 = (a-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p,q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1,0)$, como pasa por $C = (c,d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c,d)$, como pasa por $B = (1,0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1,d)$, como pasa por $A = (0,0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c-c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4\alpha + 3\beta = -2$$
$$3\alpha + 5\beta = 0$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

III.– *En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2, 1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.*

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B. El punto A es de la forma $(1, a)$ y el B, (b, b). Por tanto:

$$(2, 1) = \frac{(1, a) + (b, b)}{2} = (b - 2, b - 1) \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = 3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2, 1)$ y $A(1, -1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 3 = 0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– *En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:*

- $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$.

- *El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$.*

- *El vértice D equidista de los otros tres.*

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{base \cdot altura}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}\|\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|\| = \frac{1}{2}\|\|(0, -1, 1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P = (0, 10, 9)$, $dis(D, ABC) = dis(P, ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \iff y - z = 0.$$

La altura queda por tanto:

$$h = \frac{|10-9|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V = \frac{(\sqrt{2}/2)\cdot(1/\sqrt{2})}{3} = \frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y - z = 0$) y pasando por P. Tal plano es de la forma:

$$y - z + k = 0$$

e imponiendo que pase por P queda $10 - 9 + k = 0$, de donde $k = 1$. Deducimos que el plano que contiene a D tien por ecuación:

$$y - z - 1 = 0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D = (a, b+1, b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$\begin{aligned} d(A,D) = D(B,D) &\iff \sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2} = \sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+b^2} \\ d(A,D) = D(C,D) &\iff \sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2} = \sqrt{a^2+b^2+(b-1)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$\begin{aligned} 0 &= 2a - 1 \\ 0 &= 4b \end{aligned}$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1,0,0)$ y $\vec{AC} = (0,1,1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC, $(0,1,-1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1,0,0), (0,1,1), (0,1,-1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciónes de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro con centro el punto $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$. Calcular la ecuación de la recta que se obtiene al aplicar el giro a la recta $x - 2y + 1 = 0$.*

La matriz de giro de ángulo $\pi/2$ respecto de la base canónica (respecto del producto escalar usual) es:

$$G = \begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2) \\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El giro de centro $(1,2)$ y ángulo $\pi/2$ tiene entonces por ecuaciones:

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + G\begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-y \\ x+1 \end{pmatrix}$$

Para girar la recta $x - 2y + 1 = 0$ tomamos dos puntos de ella, los giramos por la fórmula calculada anteriormente y hallamos la recta que los une.

Dos puntos de la recta dada son por ejemplo $(-1,0)$ y $(1,1)$.

$$f(-1,0) = (3-0, -1+1) = (3,0), \qquad f(1,1) = (2,2).$$

La recta que une $(3,0)$ y $(2,2)$ es:

$$\frac{x-3}{2-3} = \frac{y-0}{2-0} \iff 2x + y - 6 = 0.$$

VI.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Sean las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 12 = 0 \\ z = 5 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,2) + \lambda(0,1,2).$$

Calcular la distancia entre las rectas r y s.

Las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$x = a, \quad y = -12 - a, \quad z = 5$$

y su vector director $(1, -1, 0)$; por tanto un punto P de tal recta es de la forma $P = (a, -12 - a, 5)$.

Un punto Q de la recta s es de la forma $Q = (1, 2 + b, 2 + 2b)$.

La distancia $d(P, Q)$ coincide con la distancia buscada $d(r, s)$ cuando el vector PQ es perpendicular a las dos rectas dadas:

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3).$$

Imponemos las condiciones de perpendicularidad. Hay que recordar que para hacer los productos escalares hay que usar la matiz de Gram dada:

$$PQ \perp (1, -1, 0) \iff PQ \cdot (1, -1, 0) = 0 \iff (1-a, 14+a+b, 2b-3)G_C(1, 1, 0)^t = 0 \iff -7-2a-5b = 0.$$

y

$$PQ \perp (0, 1, 2) \iff PQ \cdot (0, 1, 2) = 0 \iff (1-a, 14+a+b, 2b-3)G_C(0, 1, 2)^t = 0 \iff 34+5a+29b = 0.$$

Resolviendo el sistema se obtiene:

$$a = b = -1$$

Por tanto

$$PQ = Q - P = (1 - a, 14 + a + b, 2b - 3) = (1 + 1, 14 - 1 - 1, 2(-1) - 3) = (2, 12, -5)$$

La distancia pedida es la norma del vector $\vec{P}Q$; recordemos de nuevo usar la matriz de Gram para calcularla:

$$\|PQ\| = \sqrt{(2, 12, -5)G_C(2, 12, -5)^t} = \sqrt{33}.$$

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano* Π *corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto* $P(1, 2, 2)$ *forman con el plano* Π *un ángulo de* $60°$.

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\|\|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.– *En el espacio afín sean los puntos $A(1,1,0)$ y $B(0,1,1)$.*

a) *Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x+z=2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.*

Sea $C=(a,b,c)$. Por estar en el plano $x+z=2$ se cumple $a+c=2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\begin{array}{rl} d(A,B)=d(A,C) & \iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(1-a)^2+(1-b)^2+(0-c)^2} \iff \\ & \iff 2=(1-a)^2+(1-b)^2+c^2 \\ d(A,B)=d(B,C) & \iff \sqrt{(1-0)^2+(1-1)^2+(1-0)^2}=\sqrt{(0-a)^2+(1-b)^2+(1-c)^2} \iff \\ & \iff 2=a^2+(1-b)^2+(1-c)^2 \end{array}$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0=1-2a-1+2c \iff a=c$$

Como además $a+c=2$ obtenemos $a=c=1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2=(1-1)^2+(1-b)^2+1^2 \iff (1-b)^2=1 \iff b=0 \text{ ó } b=2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C=(1,0,1) \text{ ó } C=(1,2,1).$$

b) *Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.*

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V=\frac{1}{6}|det(OA,OB,OC)|$$

Cuando $C=(1,0,1)$ queda:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}\right\|=\frac{1}{3}.$$

Cuando $C=(1,2,1)$:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&2&1\end{vmatrix}\right\|=0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contendio en el mismo plano que la base.)

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x=y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2+2y^2=4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x=y$ es:

$$x=y+c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y+c)^2+2y^2=4 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+2cy+c^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{c}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.*

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0, 1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma exlcuímos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + (y - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda x + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $det(A) \neq 0$ y $det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0, 1)$:

$$b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left.\begin{array}{l} ax + by - b = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad ax + bx^2 - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_1 = 1 - \frac{ax_1}{b} = 1 - \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_2 = 1 - \frac{ax_2}{b} = 1 - \frac{-a^2 - a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-a}{2b}, 1 + \frac{a^2}{2b^2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-a}{2b}, \quad y = 1 + \frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustiyuendo en la segunda queda:

$$y = 1 + \frac{4b^2x^2}{2b^2} = 1 + 2x^2.$$

Ahora conluimos como en el método anterior.

XI.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.*

El centro de giro debe de equidistar de ambas rectas. Por tanto buscamos un punto $P = (a, 0)$ sobre la recta $y = 0$ que equidiste de las otras dos:

$$d(P, 3x - 4y = 0) = d(P, y + 3 = 0) \iff \frac{|3a - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff |a| = 5 \iff a = \pm 5.$$

Hay pos posibilidades. Tomamos una de ellas como centro $P = (5, 0)$.

Ahora para saber el ángulo de giro hallamos la proyección ortogonal A de P sobre la recta $3x - 4y = 0$ y la proyección ortogonal B de P sobre la recta $y + 3 = 0$.

El punto A cumple la ecuación de $3x - 4y = 0$ y así es de la forma $A = (4k, 3k)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal:

$$\frac{4k - 5}{3} = \frac{3k - 0}{-4} \iff k = 4/5.$$

Obtenemos $A = (16/5, 12/5)$ y $\vec{P}A = A - P = (-9/5, 12/5)$.

El punto B cumple la ecuación de $y + 3 = 0$ y así es de la forma $B = (m, -3)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal $(1, 0)$:

$$m - 5 = 0 \iff m = 5.$$

Obtenemos $B = (5, -3)$ y $\vec{P}B = A - P = (0, -3)$.

El ángulo de giro α es el que forman los vectore $\vec{P}A$ y $\vec{P}B$:

$$cos(\alpha) = \frac{\vec{P}A \cdot \vec{P}B}{\|\vec{P}A\| \|\vec{P}B\|} = \frac{-36/5}{9} = \frac{-4}{5}.$$

El sentido de giro coincide con la orientación de la base $\{\vec{P}A, \vec{P}B\}$ es decir con el signo del determinante de:

$$det \begin{pmatrix} -9/5 & 0 \\ 12/5 & -3 \end{pmatrix} = 27/5 > 0.$$

Por tanto:

$$sin(\alpha) = +\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = \frac{3}{5}.$$

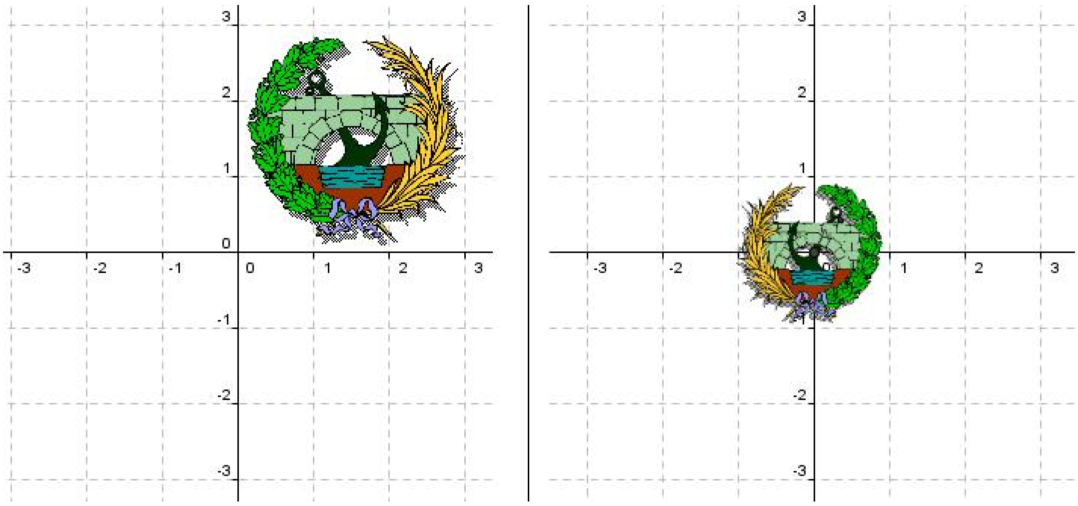
En definitiva las ecuaciones del giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el ángulo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \end{pmatrix}.$$

XII.– *Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura el la otra.*



Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es 2/3 el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón 2/3.

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}(x, y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y. Hacemos la simetría respecto de ese eje:

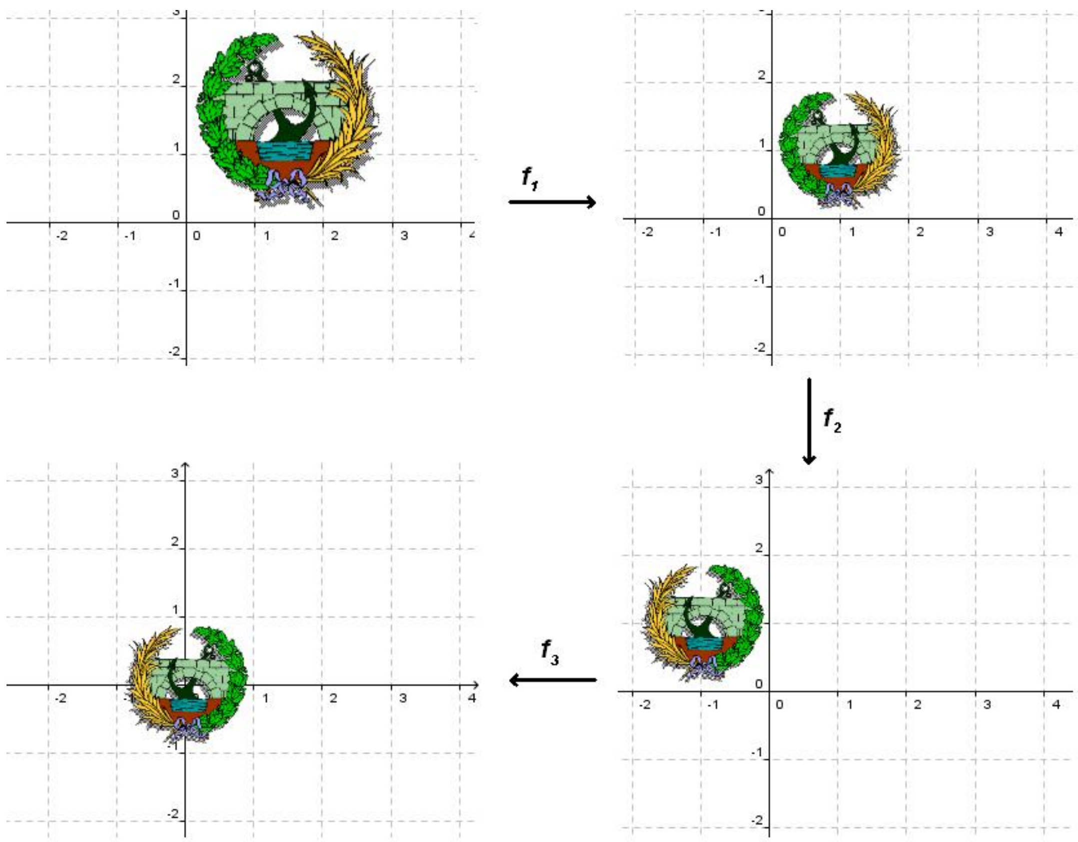
$$f_2(x, y) = (-x, y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2, 2)$ ha de ser el $(-1, 1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1, -1)$:

$$f_3(x, y) = (x, y) + (1, -1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x, y) = f_3(f_2(f_1(x, y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1, -1) + \frac{2}{3}(-x, y).$$



XIII.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&f_1(X) = 2P_1 - X\\
&f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X\\
&f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X
\end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \ldots + P_3 - P_2 + P_1.$$

XIV.– *En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.*

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB'; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:
$$M_1 = \frac{A+A'}{2} = (1,4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4,0)$:
$$4x + d = 0.$$
Imponiendo que pase por M_1:
$$4 + d = 0 \qquad \Rightarrow \qquad d = -4.$$
Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB':
$$M_2 = \frac{B+B'}{2} = (3,4).$$
La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4,-2)$:
$$4x - 2y + c = 0.$$
Imponiendo que pase por M_2:
$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \qquad \Rightarrow \quad c = -4.$$
Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:
$$\left.\begin{array}{r} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad C = (x,y) = (1,0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2,4)$ en el vector $CA' = (2,4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:
$$cos(\alpha) = \frac{(-2,4)\cdot(2,4)}{\|(-2,4)\|\|(2,4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$
El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2,4),(2,4)\}$:
$$signo(det(M_{CB})) = signo\left(det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = signo(-16) < 0.$$
Se trata por tanto de un giro de centro $(1,0)$ y ángulo de giro:
$$\alpha = -arcos(3/5).$$
El seno del ángulo es por tanto:
$$sin(\alpha) = -\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = -4/5.$$
Las ecuaciones de giro quedan:
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \end{pmatrix}.$$

XV.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)