

- 2.— En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$, las rectas

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \quad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

- (m) Recta paralela a la dirección dada por $\bar{v}(1, 1, 2)$ y que corta a las rectas r y s .

Un punto de r es de la forma $(-1 + 3a, 2 + a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1, 1, 2)$:

$$\frac{-1 + 3a - b}{1} = \frac{2 + a - 2b}{1} = \frac{a + 3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x - 11/15}{1} = \frac{y - 22/15}{1} = \frac{z - 33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la dirección $\bar{v}$ y la recta r . Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un punto de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 5y - 2z - 11 = 0$$

Calculamos la intersección con s ; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \Rightarrow b = 11/15$$

veamos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

- (n) Recta que pasa por A , corta a s y es perpendicular a r .

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r , están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r . Dicho plano tiene por vector normal el director de r , $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s , calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Sustituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x-2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P , paralelo a r y que pasa por A .*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P , $(3, -2, 4)$ y el director de r , $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s .*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es calcular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la dirección ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s , la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s . Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Sustituyendo en la ecuación de π_1 :

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \Rightarrow a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B , de A a r , de B a P y de r a s .*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (0 + 1)^2 + (3 - 1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{\|\overline{AC} \wedge \bar{v}\|}{\|\bar{v}\|}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1, 2, 0)$, $\bar{v}(3, 1, 1)$.

$$d(A, r) = \frac{\|(-3, 3, -1) \wedge (3, 1, 1)\|}{\|(3, 1, 1)\|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A . La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r . La distancia pedida es la distancia entre A y M .

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B, P) = \frac{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P .

Por último para calcular la distancia entre r y s , hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r :

$$d(r, s) = \frac{\|(7/30 + 1, 7/15 - 2, -7/10) \wedge (3, 1, 1)\|}{\|(3, 1, 1)\|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|[(-1, 2, 0) - (0, 0, 0), (3, 1, 1), (1, 2, -3)]|}{\|(3, 1, 1) \wedge (1, 2, -3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s , por s y Q y por P y Q .*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$\cos(\alpha(r, s)) = \frac{|((3, 1, 1)(1, 2, -3))|}{\|(3, 1, 1)\| \|(1, 2, -3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \Rightarrow \alpha(r, s) = 80,72^\circ$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la dirección normal a Q y la dirección de s . Por tanto:

$$\sin(\alpha(s, Q)) = \frac{|((1, 2, -3)(1, 5, -6))|}{\|(1, 2, -3)\| \|(1, 5, -6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \Rightarrow \alpha(s, Q) = 79,84^\circ$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direcciones normales:

$$\cos(\alpha(P, Q)) = \frac{|((3, -2, 4)(1, 5, -6))|}{\|(3, -2, 4)\| \|(1, 5, -6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \Rightarrow \alpha(P, Q) = 43,02^\circ$$

6.— *En el espacio afín calcular las ecuaciones de un giro de 90° respecto a la semirrecta de ecuación vectorial:*

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(3, 0, 4), \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda > 0.$$

(1.2 puntos)

Las ecuaciones de giro son:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

donde T_C es la matriz de giro de semieje generado por $(3, 0, 4)$ y ángulo 90° .

Para hallar la matriz T_C construimos una base ortonormal B bien orientada donde el primer vector será el generador del semieje normalizado:

- Buscamos un vector $\vec{u}_2$ perpendicular a $(3, 0, 4)$:

$$(x, y, z) \cdot (3, 0, 4) = 0 \iff 3x + 4z = 0$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (0, 1, 0)$.

- Buscamos un segundo vector $\vec{u}_3$ perpendicular a $(3, 0, 4)$ y $(0, 1, 0)$:

$$(x, y, z) \cdot (3, 0, 4) = 0 \iff 3x + 4z = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 1, 0) = 0 \iff y = 0$$

Tomamos $\vec{u}_3 = (-4, 0, 3)$.

Comprobamos si la base $\{(3, 0, 4), (0, 1, 0), (-4, 0, 3)\}$ tiene orientación positiva:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 25 > 0 \Rightarrow \text{Orientación positiva.}$$

Normalizamos los vectores:

$$\frac{(3, 0, 4)}{\|(3, 0, 4)\|} = (3/5, 0, 4/5), \quad \frac{(0, 1, 0)}{\|(0, 1, 0)\|} = (0, 1, 0), \quad \frac{(-4, 0, 3)}{\|(-4, 0, 3)\|} = (-4/5, 0, 3/5)$$

Tenemos una base $B = \{(3/5, 0, 4/5), (0, 1, 0), (-4/5, 0, 3/5)\}$ ortonormal bien orientada. En esa base la matriz de giro de $\alpha = 90^\circ$ es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base canónica será:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

Usamos además que por ser C y B ambas ortonormales, $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$. Operando queda:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^t = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones del giro son:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 9 & -20 & 12 \\ 20 & 0 & -15 \\ 12 & 15 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

7.— En el espacio afín hallar las ecuaciones de una simetría respecto a un plano que lleve el punto $(1, -1, 1)$ en $(1, 1, 3)$.

El plano de simetría tiene que pasar por el punto medio del punto original con su simétrico:

$$M = \frac{(1, -1, 1) + (1, 1, 3)}{2} = (1, 0, 2)$$

Además su vector normal es el vector que une el punto origen y su imagen:

$$(1, 1, 3) - (1, -1, 1) = (0, 2, 2)$$

El plano de simetría es de la forma:

$$2y + 2z + d = 0$$

Imponemos que pase por $M = (1, 0, 2)$:

$$2 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + d = 0 \Rightarrow d = -4$$

El plano queda:

$$2y + 2z - 4 = 0 \iff y + z - 2 = 0.$$

La ecuación de la simetría respecto a este plano:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + S_C \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z+4 \end{pmatrix}$$

donde S_C es la matriz de la simetría respecto al subespacio:

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (0, 1, 1) = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 1, -1)\}.$$

En la base:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, 0), (0, 1, -1)}_U, \underbrace{(0, 1, 1)}_{U^\perp}\}.$$

la matriz de la simetría es:

$$S_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$S_C = M_{CB} S_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{con} \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Obtenemos:

$$S_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y así:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + S_C \begin{pmatrix} x-0 \\ y-2 \\ z+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2-z \\ 2-y \end{pmatrix}$$

- 8.— En el plano afín hallar las ecuaciones y ángulo de un giro con centro en el punto $(1, 1)$ y que lleve la recta $x + 2y - 1 = 0$ en la recta $x - 2y - 1 = 0$.

El giro llevará el vector CA que une $(1, 1)$ con la primera recta y es perpendicular a ella al vector CB que une el centro con la segunda recta y es igualmente ortogonal a esta.

Para hallar tales vectores calculamos rectas perpendiculares a las dadas que pasen por el centro de giro y las intersecamos con las propias rectas, obteniendo los puntos A y B .

Una recta perpendicular a $x + 2y - 1 = 0$ es de la forma $2x - y + c = 0$. Imponiendo que pase por el centro $(1, 1)$ se obtiene $c = -1$, es decir, la recta $2x - y - 1 = 0$. La intersección de ambas rectas es:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y - 1 = 0 \\ 2x - y - 1 = 0 \end{array} \right\} \iff A = (x, y) = (3/5, 1/5).$$

Una recta perpendicular a $x - 2y - 1 = 0$ es de la forma $2x + y + d = 0$. Imponiendo que pase por el centro $(1, 1)$ se obtiene $d = -3$, es decir, la recta $2x + y - 3 = 0$. La intersección de ambas rectas es:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{array} \right\} \iff B = (x, y) = (7/5, 1/5).$$

El vector CA es $A - C = (-2/5, -4/5)$; el vector CB es $B - C = (2/5, -4/5)$.

El ángulo de giro α verifica por tanto:

$$\cos(\alpha) = \cos(CA, CB) = \frac{CA \cdot CB}{\|CA\| \|CB\|} = \frac{12/25}{20/25} = \frac{3}{5}$$

El signo del ángulo es la orientación de la base $\{CA, CB\}$, es decir, el signo del determinante:

$$\begin{vmatrix} -2/5 & -4/5 \\ 2/5 & -4/5 \end{vmatrix} = 16/25 > 0.$$

Y entonces:

$$\sin(\alpha) = +\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = 4/5.$$

Finalmente las ecuaciones de giro de centro $(1, 1)$ y ángulo α son:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

10.— Calcular la ecuación de una homotecia que lleve el triángulo ABC en $A'B'C'$ sabiendo que:

$$A = (1, 1), \quad B = (3, 2), \quad C = (2, 4), \quad A' = (2, 3), \quad \text{superficie}(A'B'C') = 10.$$

Una homotecia de razón k modifica las áreas con razón k^2 . Por tanto:

$$k^2 = \frac{\text{sup}(A'B'C')}{\text{sup}(ABC)}.$$

Para hallar el área de ABC consideramos sus puntos situados en el plano 0 y utilizamos la interpretación geométrica del producto vectorial:

$$\text{sup}(ABC) = \frac{1}{2} \|AB \times AC\| = \frac{1}{2} \left\| \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3-1 & 2-1 & 0 \\ 2-1 & 4-1 & 0 \end{pmatrix} \right\| = \frac{1}{2} \|(0, 0, 5)\| = \frac{5}{2}.$$

Por tanto:

$$k^2 = \frac{10}{5/2} = 4 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 2.$$

Por otra parte una razón de centro (x_0, y_0) y razón k tiene por ecuación:

$$t(x, y) = (x_0, y_0) + k(x - x_0, y - y_0)$$

Imponemos que $t(A) = A'$:

$$t(1, 1) = (2, 3) \Rightarrow (x_0, y_0) + k(1 - x_0, 1 - y_0) = (2, 3) \Rightarrow (x_0, y_0) = \frac{1}{1-k}(2-k, 3-k).$$

Por tanto tenemos dos posibles homotecias:

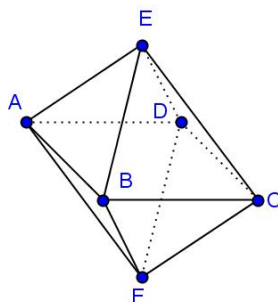
- Para $k = 2$, la homotecia de centro $(0, -1)$ y razón 2 de ecuación:

$$t(x, y) = (0, -1) + 2(x - 0, y + 1) = (0, 1) + 2(x, y)$$

- Para $k = -2$, la homotecia de centro $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$ y razón -2 de ecuación:

$$t(x, y) = (\frac{4}{3}, \frac{5}{3}) - 2(x - \frac{4}{3}, y - \frac{5}{3}) = (4, 5) - 2(x, y)$$

- 11.— En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$.



- (i) Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.

El centro O del octaedro es el punto medio de los vértices B y D :

$$O = \frac{B + D}{2} = (1, 0, 0)$$

y también el punto medio de A y C . Por tanto:

$$O = \frac{A + C}{2} \Rightarrow C = 2O - A = (2, 0, 0) - (0, 0, 0) = (2, 0, 0)$$

Finalmente los puntos E y F distan de los otros cuatro vértices el lado del octaedro. Tal lado mide:

$$d(A, B) = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

y así E y F son puntos $P = (x, y, z)$ cumpliendo:

$$\begin{aligned} d(P, A) &= \sqrt{2} \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P, B) &= \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 2 \\ d(P, C) &= \sqrt{2} \Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P, D) &= \sqrt{2} \Rightarrow (x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 2 \end{aligned}$$

Restando la primera y tercera ecuación obtenemos $x = 1$. De la segunda y la cuarta $z = 0$. Y de las otras $y^2 = 1$. Por tanto:

$$E = (1, 1, 0), \quad F = (1, -1, 0).$$

- (ii) Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.

El área es ocho veces el área de una cara:

$$A = 8 \cdot \text{Area}(A, B, E) = 8 \cdot \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AE}\| = 8 \cdot \frac{1}{2} \|(-1, 1, 1)\| = 4\sqrt{3}.$$

El volumen es dos veces el de la pirámide $ABCDE$:

$$B = 2 \cdot \text{Vol}(ABCDE) = 2 \cdot \frac{1}{3} |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| = \frac{2}{3} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Finalmente el radio de la esfera circunscrita es la distancia del centro del octaedro a cualquiera de sus vértices:

$$r = d(A, O) = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$

- (iii) Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE , BE y CF .

Los puntos medios de las aristas AE , BE y CF son respectivamente:

$$M_{AE} = \frac{A+E}{2} = (1/2, 1/2, 0), \quad M_{BE} = \frac{C+E}{2} = (1, 1/2, 1/2), \quad M_{CF} = \frac{C+F}{2} = (3/2, -1/2, 0)$$

Usamos la ecuación del plano conocidos tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & y - 1/2 & z - 0 \\ 1 - 1/2 & 1/2 - 1/2 & 1/2 - 0 \\ 3/2 - 1/2 & -1/2 - 1/2 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y - z - 1 = 0.$$

(iv) *Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD , BC y DF .*

Los puntos medios de las aristas AD , BC y DF son respectivamente:

$$M_{AD} = \frac{A+D}{2} = (1/2, 0, -1/2), \quad M_{BC} = \frac{B+E}{2} = (3/2, 0, 1/2), \quad M_{DF} = \frac{C+F}{2} = (1, -1/2, -1/2)$$

Comprobamos que satisfacen la ecuación $x + y - z - 1 = 0$:

- El punto M_{AD} :

$$\frac{1}{2} + 0 - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \quad \text{Si.}$$

- El punto M_{BC} :

$$\frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \quad \text{Si.}$$

- El punto M_{DF} :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \quad \text{Si.}$$

(v) *Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.*

Consideramos las caras ABE y ABF . El ángulo (obtuso) que forman las caras es el que forman los vectores normales de las mismas.

El vector normal de ABE es:

$$\vec{AB} \times \vec{AE} = (1, 0, 1) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-1, 1, 1).$$

El vector normal de ABF es:

$$\vec{AB} \times \vec{AF} = (1, 0, 1) \times (1, -1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (1, 1, -1).$$

El ángulo α que forman cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{-|(-1, 1, 1) \cdot (1, 1, -1)|}{\|(-1, 1, 1)\| \|(1, 1, -1)\|} = \frac{-1}{3}$$

(el menos del numerador es para asegurarnos de tomar el ángulo obtuso): Por tanto:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{-1}{3}\right).$$

(vi) *Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF .*

Calculamos primero el plano DCF :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1-2 & 0-0 & -1-0 \\ 1-2 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - z - 2 = 0.$$

La proyección ortogonal de E sobre tal plano se obtiene intersecándolo con su perpendicular por E .

La perpendicular tiene como vector director el vector normal del plano. Es por tanto la recta de ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(1, -1, -1)$$

Intersecamos con el plano:

$$(1 + \lambda) - (1 - \lambda) - (-\lambda) - 2 = 0 \iff 3\lambda = 2 \iff \lambda = \frac{2}{3}.$$

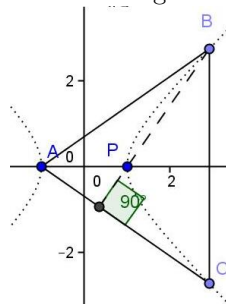
La proyección queda:

$$(1, 1, 0) + \frac{2}{3}(1, -1, -1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

- 13.**— En el plano afín sean los puntos $A(-1, 0)$ y $P(1, 0)$. Calcular la ecuación implícita del lugar geométrico de puntos B del plano tales que AB sea uno de los lados iguales de un triángulo isósceles cuyo ortocentro es P . ¿Qué tipo de curva es?.

Hay dos posibles interpretaciones:

- Los lados iguales son AB y AC , y por tanto el ángulo desigual el A :



En un triángulo isósceles la recta que une el vértice del ángulo desigual con el ortocentro es un eje de simetría. En nuestro caso tal recta, la que une A y P , es el eje OX . Si B tiene coordenadas (x, y) su simétrico respecto al eje OX es el punto C , $(x, -y)$, de forma que los tres vértices del triángulo son ABC .

Para que P sea el ortocentro el lado AC ha de ser perpendicular a la altura de vértice B , es decir, al vector BP . Por tanto:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0$$

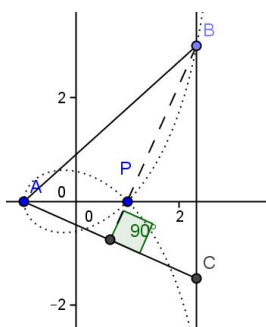
es decir:

$$(x - (-1), -y - 0) \cdot (1 - x, 0 - y) = 0 \iff (1 + x)(1 - x) + y^2 = 0 \iff x^2 - y^2 = 1$$

Vemos que la ecuación del lugar geométrico pedido corresponde a la hipérbola:

$$x^2 - y^2 = 1.$$

- Los lados iguales son AB y BC y por tanto el ángulo desigual B :



La altura sobre el lado BC es la recta que une A con el ortocentro; por tanto BC es perpendicular al eje OX . Así si B tiene coordenadas (x, y) entonces C tiene coordenadas (x, y') .

Dado que la distancia AB es la misma que BC :

$$(x+1)^2 + y^2 = (y-y')^2 \iff (x+1)^2 = y'^2 - 2yy'$$

Por otra parte la recta BP tiene que ser perpendicular la lado AC , es decir:

$$\vec{AC} \cdot \vec{BP} = 0 \iff (x - (-1), -y - 0) \cdot (1 - x, 0 - y') = 0 \iff (1+x)(1-x) + yy' = 0 \iff x^2 - 1 + yy' = 0$$

Despejando y' en la segunda ecuación y sustituyendo en la primera se tiene:

$$(x+1)^2 = \frac{(1-x^2)^2}{y^2} - 2(1-x^2)$$

Dividiendo por $x+1$:

$$(x+1) = \frac{(x^2-1)(x-1)}{y^2} + 2(x-1)$$

Quitando denominadores y simplificando obtenemos

$$x^3 - x^2 - x + 1 - xy^2 - 3y^2 = 0,$$

que es la ecuación de una cúbica.

- 14.**— En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0, 1)$. Para cada recta r pasando por el punto P , llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B . ¿Qué tipo de curva se obtiene?

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0, 1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma excluimos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left. \begin{array}{l} \lambda x + (y - 1) = 0 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda x + x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2}\right)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\det(A) \neq 0$ y $\det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0, 1)$:

$$b + c = 0 \Rightarrow c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left. \begin{array}{l} ax + by - b = 0 \\ y = x^2 \end{array} \right\} \Rightarrow ax + bx^2 - b = 0 \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_1 = 1 - \frac{ax_1}{b} = 1 - \frac{-a^2 + a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 4ab}}{2b}, \quad y_2 = 1 - \frac{ax_2}{b} = 1 - \frac{-a^2 - a\sqrt{a^2 + 4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = \left(\frac{-a}{2b}, 1 + \frac{a^2}{2b^2}\right)$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-a}{2b}, \quad y = 1 + \frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustituyendo en la segunda queda:

$$y = 1 + \frac{4b^2x^2}{2b^2} = 1 + 2x^2.$$

Ahora concluimos como en el método anterior.

16.— En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A = (1, 0, 0)$ y $B = (1, 2, 2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B .*

Método I: Un punto $P = (x, y, z)$ equidista de A y B si:

$$d(P, A) = d(P, B) \iff \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 + z^2 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 4z + 4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A+B}{2} = (1, 1, 1).$$

El vector $\vec{AB} = (0, 2, 2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0, 1, 1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M :

$$1 + 1 + d = 0 \Rightarrow d = -2.$$

Así el lugar geométrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB , equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \Rightarrow b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\| \|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2} \sqrt{(a-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)} \Rightarrow 6 = (a-1)^2 + 2 \Rightarrow (a-1)^2 = 4 \Rightarrow (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

- I.**— *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (c, d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p, q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del triángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C . Vector normal $\overline{AB} = (1, 0)$, como pasa por $C = (c, d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B . Vector normal $\overline{AC} = (c, d)$, como pasa por $B = (1, 0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A . Vector normal $\overline{BC} = (c-1, d)$, como pasa por $A = (0, 0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

-
- II.**— *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0), B = (1, 0, 0), C = (2, 0, 1), D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD .

La ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertenece a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4\alpha + 3\beta = -2$$

$$3\alpha + 5\beta = 0$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = \left(\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}\right).$$

III.— En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2, 1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B .

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B . El punto A es de la forma $(1, a)$ y el B , (b, b) . Por tanto:

$$(2, 1) = \frac{(1, a) + (b, b)}{2} = (b - 2, b - 1) \Rightarrow a = -1; \quad b = 3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2, 1)$ y $A(1, -1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1} \Leftrightarrow 2x - y - 3 = 0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.— En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:

- $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC :

$$\frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \|(0, -1, 1)\| = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC ; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P = (0, 10, 9)$, $\text{dis}(D, ABC) = \text{dis}(P, ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \iff y - z = 0.$$

La altura queda por tanto:

$$h = \frac{|10 - 9|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V = \frac{(\sqrt{2}/2) \cdot (1/\sqrt{2})}{3} = \frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D .*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y - z = 0$) y pasando por P . Tal plano es de la forma:

$$y - z + k = 0$$

e imponiendo que pase por P queda $10 - 9 + k = 0$, de donde $k = 1$. Deducimos que el plano que contiene a D tiene por ecuación:

$$y - z - 1 = 0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D = (a, b + 1, b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$d(A, D) = D(B, D) \iff \sqrt{a^2 + (b + 1)^2 + b^2} = \sqrt{(a - 1)^2 + (b + 1)^2 + b^2}$$

$$d(A, D) = D(C, D) \iff \sqrt{a^2 + (b + 1)^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2 + (b - 1)^2}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 2a - 1$$

$$0 = 4b$$

Obtenemos que $a = 1/2$ y $b = 0$, con lo que $D = (1/2, 1, 0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC .*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB} = (1, 0, 0)$ y $\vec{AC} = (0, 1, 1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC , $(0, 1, -1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B' = \{(1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{CB'} F_{B'} M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciones de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.— *Dar la matriz de Gram de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de manera que el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$ sea equilátero.*

Supongamos que la matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Los tres lados del triángulo están representados por los vectores:

$$\bar{u}_1 = (1,0) - (0,0) = (1,0), \quad \bar{u}_2 = (0,1) - (0,0) = (0,1), \quad \bar{u}_3 = (1,0) - (0,1) = (1,-1).$$

Para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_3.$$

Equivalentemente:

$$(1,0)G(1,0)^t = (0,1)G(0,1)^t = (1,-1)G(1,-1)^t.$$

Operando obtenemos:

$$a = c = a - 2b + c.$$

de donde:

$$c = a, \quad b = \frac{a}{2}.$$

Tomando, por ejemplo, $a = 2$ nos queda:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz de un producto escalar porque es simétrica y definida positiva (esto último es inmediato aplicando el criterio de Sylvester).

VI.— En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos $A = (1, 2, 0)$, $B = (1, 3, 1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \quad s \equiv (x, y, z) = (1, 2, -1) + \lambda(0, 1, 2).$$

Hallar a, b, c sabiendo que $d(A, B) = 3$ y que las rectas r y s son perpendiculares.

Por ser una matriz de Gram es simétrica y así $b = a$.

Ahora:

$$3 = d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \|B - A\| = \|(0, 1, 1)\| = \sqrt{(0, 1, 1)G_C(0, 1, 1)^t}.$$

Operando obtenemos la ecuación:

$$6 + 2a + c = 9 \iff 2a + c = 3 \quad (*)$$

Para utilizar que r y s son perpendiculares hallamos sus vectores directores e imponemos que sean ortogonales.

El vector director de s nos lo dan directamente $\vec{u}_s = (0, 1, 2)$. Para hallar el vector director de r pasamos de implícitas a paramétricas:

$$\begin{aligned} x + y - 2 &= 0 \\ x - y - z &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -y + 2, & z &= x - y = -2y + 2 \end{aligned}$$

Las paramétricas quedan:

$$x = -\lambda + 2, \quad y = \lambda, \quad z = -2\lambda + 2$$

y así $\vec{u}_r = (-1, 1, -2)$.

Ahora:

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (0, 1, 2)G_C(-1, 1, -2)^t = 0 \iff -2 + 6 + 2a - 2a - 4c = 0.$$

Despejando deducimos que $c = 1$ y de $(*)$, $a = 1$.

En definitiva $a = b = c = 1$.

VII.— En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de 60° .

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$\cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\| \|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.— En el espacio afín sean los puntos $A(1, 1, 0)$ y $B(0, 1, 1)$.

- a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + z = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?

Sea $C = (a, b, c)$. Por estar en el plano $x + z = 2$ se cumple $a + c = 2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\begin{aligned} d(A, B) = d(A, C) &\iff \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(1-a)^2 + (1-b)^2 + (0-c)^2} \iff \\ &\iff 2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 + c^2 \\ d(A, B) = d(B, C) &\iff \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{(0-a)^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2} \iff \\ &\iff 2 = a^2 + (1-b)^2 + (1-c)^2 \end{aligned}$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 1 - 2a - 1 + 2c \iff a = c$$

Como además $a + c = 2$ obtenemos $a = c = 1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2 = (1-1)^2 + (1-b)^2 + 1^2 \iff (1-b)^2 = 1 \iff b = 0 \text{ ó } b = 2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C = (1, 0, 1) \text{ ó } C = (1, 2, 1).$$

- b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el origen.

Si llamamos O al origen el volumen pedido es:

$$V = \frac{1}{6} |\det(OA, OB, OC)|$$

Cuando $C = (1, 0, 1)$ queda:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{3}.$$

Cuando $C = (1, 2, 1)$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \right| = 0.$$

(este volumen 0 se explica por que en este caso el origen está en el mismo plano que contiene al triángulo y por tanto sería una pirámide "degenerada" en el sentido de que el vértice superior está contenido en el mismo plano que la base.)

IX.— En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.

La ecuación de C es:

$$x^2 + 2y^2 = 4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x = y$ es:

$$x = y + c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y + c)^2 + 2y^2 = 4 \Rightarrow 3y^2 + 2cy + c^2 - 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{c}{3} \pm \frac{1}{3} \sqrt{12 - 2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) . El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

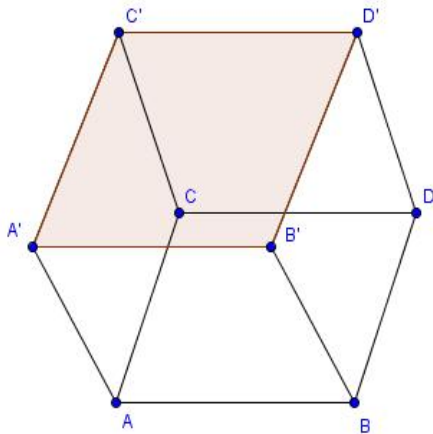
Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.— En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x, y, z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:

$$A = (0, 0, 0), \quad B = (5, 0, 0), \quad C = (0, 3, 4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.



El plano que buscamos es paralelo al que contiene a los tres vértices A, B, C :

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 3-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \iff 4y - 3z = 0.$$

Por tanto el plano de la cara opuesta es de la forma:

$$4y - 3z + c = 0.$$

Para el punto A' del mismo que se encuentra sobre A , tenemos en cuenta que el vector AA' es perpendicular al plano π y de longitud el lado del cubo y con coordenada z positiva (para que esté en el semiespacio superior).

El lado del cubo es $d(A, B) = 5$. El vector normal del plano π es $(0, 4, -3)$. Por tanto:

$$AA' = 5 \cdot \frac{(0, -4, 3)}{\|(0, 4, -3)\|} = (0, -4, 3).$$

y

$$A' = (0, 0, 0) + (0, -4, 3) = (0, -4, 3)$$

Ahora simplemente imponemos que este punto pertenezca al plano $4y - 3z + c = 0$:

$$4 \cdot (-4) - 3 \cdot 3 + c = 0 \Rightarrow c = 25.$$

El plano pedido tiene por ecuación:

$$4y - 3z + 25 = 0.$$

XI.— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleve la recta $3x - 4y = 0$ en la recta $y + 3 = 0$ y esté centrado en un punto de la recta $y = 0$.

El centro de giro debe de equidistar de ambas rectas. Por tanto buscamos un punto $P = (a, 0)$ sobre la recta $y = 0$ que equidiste de las otras dos:

$$d(P, 3x - 4y = 0) = d(P, y + 3 = 0) \iff \frac{|3a - 4 \cdot 0|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|0 + 3|}{\sqrt{1^2 + 0^2}} \iff |a| = 5 \iff a = \pm 5.$$

Hay pos posibilidades. Tomamos una de ellas como centro $P = (5, 0)$.

Ahora para saber el ángulo de giro hallamos la proyección ortogonal A de P sobre la recta $3x - 4y = 0$ y la proyección ortogonal B de P sobre la recta $y + 3 = 0$.

El punto A cumple la ecuación de $3x - 4y = 0$ y así es de la forma $A = (4k, 3k)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal:

$$\frac{4k - 5}{3} = \frac{3k - 0}{-4} \iff k = 4/5.$$

Obtenemos $A = (16/5, 12/5)$ y $\vec{PA} = A - P = (-9/5, 12/5)$.

El punto B cumple la ecuación de $y + 3 = 0$ y así es de la forma $B = (m, -3)$. El vector que lo une con P tiene que ser paralelo al vector normal $(1, 0)$:

$$m - 5 = 0 \iff m = 5.$$

Obtenemos $B = (5, -3)$ y $\vec{PB} = B - P = (0, -3)$.

El ángulo de giro α es el que forman los vectores $\vec{PA}$ y $\vec{PB}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{PA} \cdot \vec{PB}}{\|\vec{PA}\| \|\vec{PB}\|} = \frac{-36/5}{9} = \frac{-4}{5}.$$

El sentido de giro coincide con la orientación de la base $\{\vec{PA}, \vec{PB}\}$ es decir con el signo del determinante de:

$$\det \begin{pmatrix} -9/5 & 0 \\ 12/5 & -3 \end{pmatrix} = 27/5 > 0.$$

Por tanto:

$$\sin(\alpha) = +\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = \frac{3}{5}.$$

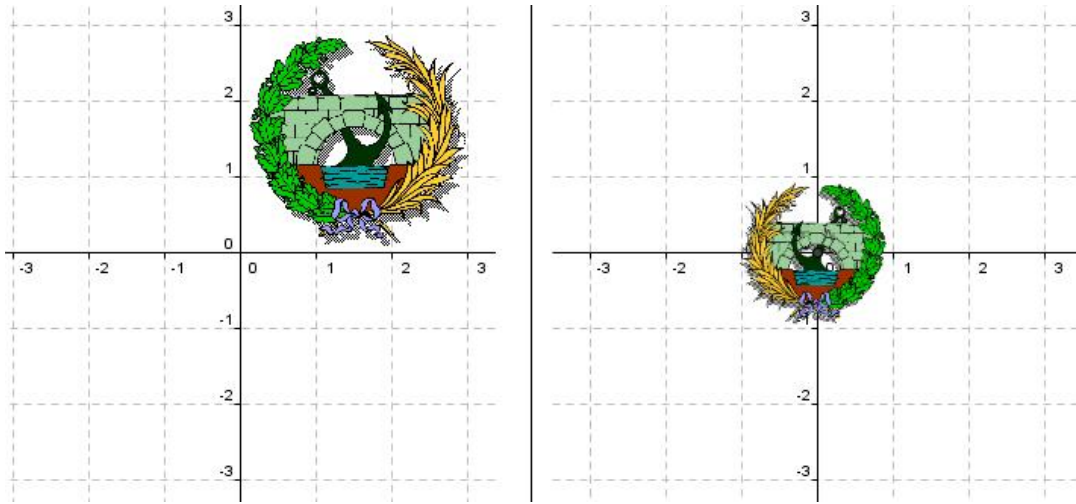
En definitiva las ecuaciones del giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el ángulo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4/5 & -3/5 \\ 3/5 & -4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 5 \\ y \end{pmatrix}.$$

XII.— *Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura a la otra.*



Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es $2/3$ el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón $2/3$.

$$f_1(x, y) = \frac{2}{3}(x, y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y . Hacemos la simetría respecto de ese eje:

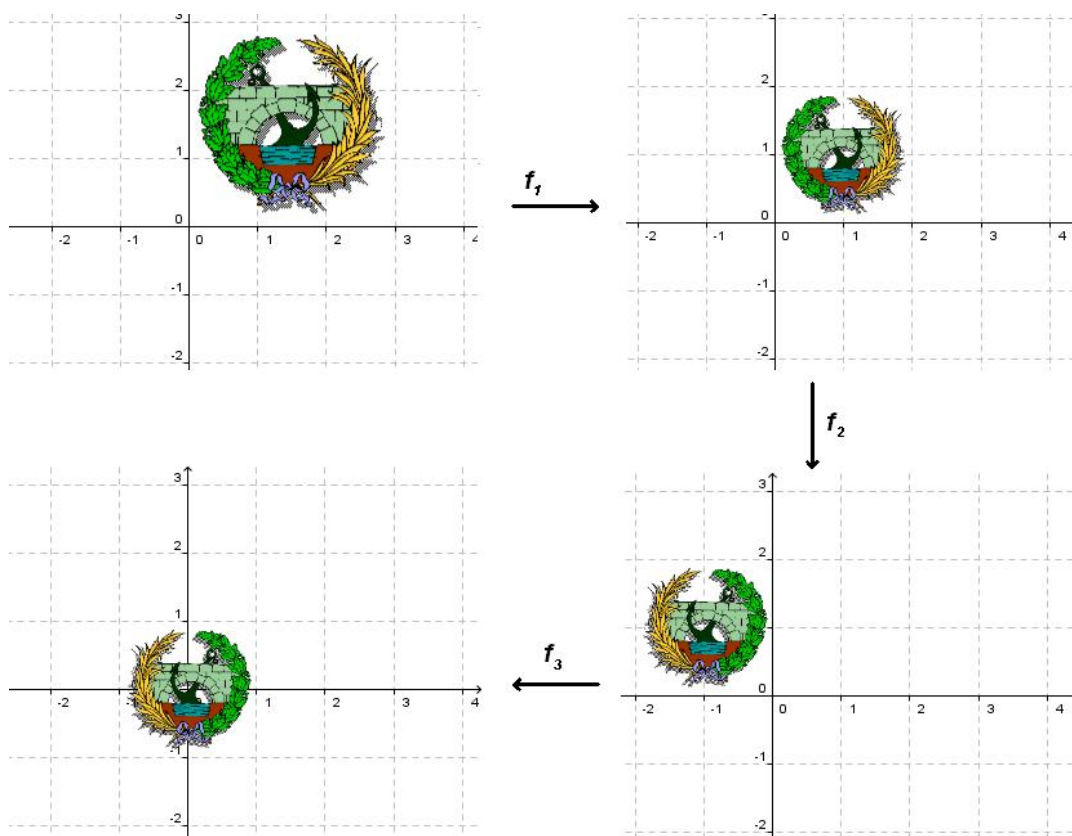
$$f_2(x, y) = (-x, y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2, 2)$ ha de ser el $(-1, 1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1, -1)$:

$$f_3(x, y) = (x, y) + (1, -1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x, y) = f_3(f_2(f_1(x, y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1, -1) + \frac{2}{3}(-x, y).$$



XIII.— Supongamos que escogemos 2011 puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \dots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$f_1(X) = 2P_1 - X$$

$$f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X$$

$$f_3(f_2(f_1(X))) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \dots + P_3 - P_2 + P_1.$$

XIV.— En el plano afín hallar las ecuaciones de un giro que lleva los puntos $A = (-1, 4)$ y $B = (1, 5)$ respectivamente en $A' = (3, 4)$ y $B' = (5, 3)$. Indicar el centro y ángulo de giro, considerando como orientación positiva la dada por la base canónica.

Tenemos en cuenta que el centro de un giro pertenece a la mediatriz del segmento que une un punto con su imagen. Por tanto calcularemos la mediatriz de AA' y de BB' ; la intersección de ambas será el centro de giro.

El punto medio de AA' es:

$$M_1 = \frac{A + A'}{2} = (1, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_1 y tiene como vector normal el $AA' = (4, 0)$:

$$4x + d = 0.$$

Imponiendo que pase por M_1 :

$$4 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -4.$$

Por tanto la mediatriz de AA' es la recta $x - 1 = 0$.

El punto medio de BB' :

$$M_2 = \frac{B + B'}{2} = (3, 4).$$

La mediatriz es la recta que pasa por M_2 y tiene como vector normal el $BB' = (4, -2)$:

$$4x - 2y + c = 0.$$

Imponiendo que pase por M_2 :

$$4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -4.$$

Por tanto la mediatriz de BB' es la recta $2x - y - 2 = 0$.

El centro es la intersección de ambas:

$$\left. \begin{array}{l} x - 1 = 0 \\ 2x - y - 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow C = (x, y) = (1, 0).$$

Ahora el giro debe de llevar el vector $CA = (-2, 4)$ en el vector $CA' = (2, 4)$, por tanto el ángulo de giro α cumplirá:

$$\cos(\alpha) = \frac{(-2, 4) \cdot (2, 4)}{\|(-2, 4)\| \|(2, 4)\|} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}.$$

El sentido de giro es la orientación de la base $B = \{(-2, 4), (2, 4)\}$:

$$\text{signo}(\det(M_{CB})) = \text{signo}\left(\det\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}\right) = \text{signo}(-16) < 0.$$

Se trata por tanto de un giro de centro $(1, 0)$ y ángulo de giro:

$$\alpha = -\arccos(3/5).$$

El seno del ángulo es por tanto:

$$\sin(\alpha) = -\sqrt{1 - \cos^2(\alpha)} = -4/5.$$

Las ecuaciones de giro quedan:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 \\ -4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 0 \end{pmatrix}.$$

XV.— En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s :

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s .

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s , luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \Rightarrow (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \Rightarrow a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \Rightarrow 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)
