ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la práctica 14

Geometría afín. (Curso 2013–2014)

1.– *En un espacio afín real de dimensión 3, se consideran dos sistemas de referencia* $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ *y* $R' = \{P, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$*, donde*

$$\begin{array}{rcl} \overline{OP} & = & \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 & = & -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 & = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 & = & -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{array}$$

Se pide:

(a) *Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en* R *en función de las de* R'.

Supongamos que (x', y', z') son las coordenadas de un punto X en la referencia R'. Quiere decir que

$$\overline{PX} = x'\bar{u}_1 + y'\bar{u}_2 + z'\bar{u}^3 = (\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3\,) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Para calcular las coordenadas en la referencia R hay que expresar el vector $\overline{OX}$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Pero $\overline{OX} = \overline{OP} + \overline{PX}$. Las coordenadas del vector $\overline{OP}$ son conocidas. Por lo que únicamente resta realizar el cambio de base del vector $\overline{PX}$:

$$\overline{PX} = (\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3\,) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\,\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3\,) \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

En definitiva queda:

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \overline{PX} = (\,1 \quad 2 \quad -2\,) \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} + (\,x' \quad y' \quad z'\,) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(b) *Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en* R' *en función de las de* R.

Basta despejar $(\,x' \quad y' \quad z'\,)$ en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} (\,1 \quad 2 \quad -2\,) + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

y operando queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) *Puntos cuyas coordenadas en* R *y en* R' *son las mismas.*

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Operando (resolviendo el sistema) queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Es decir el punto de igual coordenadas es:

$$X = O + 5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3 = P + 5\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 6\bar{u}_3$$

(d) *Resolver el mismo problema en el espacio afín ampliado.*

Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son coordenadas homogéneas en las referencias R y R' respectivamente, las ecuaciones de cambio de coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

y,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ -1 & -2/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Calculemos los puntos **propios** que tienen la mismas coordenadas en ambas referencias. Es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Equivale a calcular los autovalores asociados al 1, es decir, a resolver el sistema:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t & 3t & -6t & t \end{pmatrix}$$

2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos* $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, *las rectas*

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $\quad P: 3x-2y+4z+8=0, \quad Q: x+5y-6z-4=0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(l) *Recta que corta a* r *y a* s *y pasa por* B.

Calcularemos los planos π_1 y π_2 que pasan por r y B y s yB; la recta pedida es la intersección de ambos.

En concreto la dirección del plano π_1 viene dada por los vectores $(3,1,1)$ y $(-1,2,0)-B=(0,2,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$

Análogamente, la dirección del plano π_2 viene dada por los vectores $(1,2,-3)$ y $(0,0,0)-B=(1,0,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$$

Ahora la dirección de la recta intersección de π_1 y π_2 es el producto vectorial de sus direcciones normales:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -5 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3$$

Por tanto la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y}{-23} = \frac{z-3}{+27}$$

(m) *Recta paralela a la dirección dada por* $\bar{v}(1,1,2)$ *y que corta a las rectas* r *y* s.

Un punto de r es de la forma $(-1+3a, 2+a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1,1,2)$:

$$\frac{-1+3a-b}{1} = \frac{2+a-2b}{1} = \frac{a+3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x-11/15}{1} = \frac{y-22/15}{1} = \frac{z-33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la direción $\bar{v}$ y la recta r. Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un puntos de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x+5y-2z-11=0$$

Calculamos la intersección con s; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 11/15$$

vemos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es caclular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la direción ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s, la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s. Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π:

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{||\overline{AC} \wedge \bar{v}||}{||\bar{v}||}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1, 2, 0)$, $\bar{v}(3, 1, 1)$.

$$d(A, r) = \frac{||(-3, 3, -1) \wedge (3, 1, 1)||}{||(3, 1, 1)|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B, P) = \frac{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r, s) = \frac{||(7/30 + 1, 7/15 - 2, -7/10) \wedge (3, 1, 1)||}{||(3, 1, 1)|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[(-1,2,0)-(0,0,0),(3,1,1),(1,2,-3)]|}{\|(3,1,1)\wedge(1,2,-3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|((3,1,1)(1,2,-3))|}{\|(3,1,1)\|\|(1,2,-3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 80,72^o$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la direción normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$sin(\alpha(s,Q)) = \frac{|((1,2,-3)(1,5,-6))|}{\|(1,2,-3)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(s,Q) = 79,84^o$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direciones normales:

$$cos(\alpha(P,Q)) = \frac{|((3,-2,4)(1,5,-6))|}{\|(3,-2,4)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(P,Q) = 43,02^o$$

3.– *En el espacio afín E_3 se considera el triángulo de vértices $A(3,0,0)$, $B(1,1,1)$ y $C(1,0,2)$.*

(i) *Hallar las ecuaciones de las mediatrices del triángulo.*

Las mediatrices son las rectas que pasan por el punto medio de cada lado y son perpendiculares a él. Obviamente todas ellas están contenidas en el plano que contiene al triángulo. Dicho plano π es:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z \\ 1-3 & 1 & 1 \\ 1-3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0 \iff x+y+z=3.$$

Daremos las ecuaciones implícitas de cada una de las mediatrices; geométricamente equivale a expresarlas como intersección de dos planos. Uno de ellos es el plano π que contiene al triángulo; el otro cada uno de los planos pasando por el punto medio de los lados y que tiene como vector normal el propio lado.

Mediatriz de AB:

El punto medio de AB es:

$$M_{AB} = (A+B)/2 = (2,1/2,1/2)$$

El segmento AB es $(-2,1,1)$. Por tanto el plano buscado es de la forma $-2x+y+z+d=0$. Sustituyendo las coordenadas del punto medio obtenemos $d=3$. Por tanto las ecuaciones de la mediatriz son:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ -2x+y+z+3=0 \end{cases}$$

Mediatriz de AC:

El punto medio de AC es:

$$M_{AC} = (A+C)/2 = (2,0,1)$$

El segmento AC es $(-2,0,2)$. Por tanto el plano buscado es de la forma $-2x+2z+f=0$. Sustituyendo las coordenadas del punto medio obtenemos $f=2$. Por tanto las ecuaciones de la mediatriz son:

$$\begin{cases} x+y+z-3=0 \\ -x+z+1=0 \end{cases}$$

Mediatriz de BC:

El punto medio de BC es:

$$M_{BC} = (B + C)/2 = (1, 1/2, 3/2)$$

El segmento BC es $(0, -1, 1)$. Por tanto el plano buscado es de la forma $-y + z + g = 0$. Sustituyendo las coordenadas del punto medio obtenemos $g = -1$. Por tanto las ecuaciones de la mediatriz son:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \quad -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

(ii) *Hallar las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al triángulo.*

El circuncentro (centro de la circunferencia circunscrita) es precisamente la intersección de las mediatrices. Basta resolver el sistema formado las ecuacioens de dos de ellas:

$$\begin{cases} x + y + z - 3 = 0 \\ \quad -x + z + 1 = 0 \\ \quad -y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Obtenemos $(x, y, z) = (2, 0, 1)$.

(iii) *Hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo ABC y vértice en el origen de coordenadas.*

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{1}{3}Ah,$$

siendo A el área de la base y h la altura. El área de la base es el área del triángulo de vértices dados:

$$A = \frac{1}{2}\|AB \times AC\| = \frac{1}{2}\|(2, 2, 2)\| = \sqrt{3}.$$

La altura es la distancia del vértices, el origen, al plano que contiene al triángulo:

$$h = d(\pi, (0, 0, 0)) = \frac{|0 + 0 + 0 - 3|}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

El volumen queda:

$$V = \frac{1}{3}Ah = 1.$$

4.– *Dar la matriz de Gram de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$ de manera que el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$ y $(0, 1)$ sea equilátero.*

Supongamos que la matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Los tres lados del triángulo están representados por los vectores:

$$\bar{u}_1 = (1, 0) - (0, 0) = (1, 0), \quad \bar{u}_2 = (0, 1) - (0, 0) = (0, 1), \quad \bar{u}_3 = (1, 0) - (0, 1) = (1, -1).$$

Para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 = \bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{u}_3 \cdot \bar{u}_3.$$

Equivalentemente:

$$(1,0)G(1,0)^t = (0,1)G(0,1)^t = (1,-1)G(1,-1)^t.$$

Operando obtenemos:

$$a = c = a - 2b + c.$$

de donde:

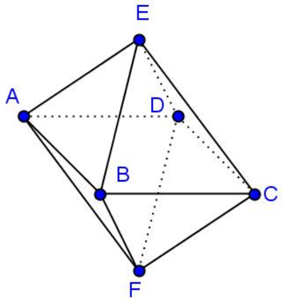
$$c = a, \qquad b = \frac{a}{2}.$$

Tomando, por ejemplo, $a = 2$ nos queda:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es una matriz de un producto escalar porque es simétrica y definida positiva (esto último es inmediato aplicando el criterio de Sylvester).

9.– *En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$.*



(i) *Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.*

El centro O del octaedro es el punto medio de los vértices B y D:

$$O = \frac{B+D}{2} = (1,0,0)$$

y también el punto medio de A y C. Por tanto:

$$O = \frac{A+C}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2O - A = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0)$$

Finalmente los puntos E y F distan de los otros cuatro vértices el lado del octaedro. Tal lado mide:

$$d(A,B) = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

y así E y F son puntos $P = (x,y,z)$ cumpliendo:

$$\begin{aligned}
d(P,A) = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\
d(P,B) = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \\
d(P,C) = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \\
d(P,D) = \sqrt{2} \quad &\Rightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2
\end{aligned}$$

Restando la primera y tercera ecuación obtenemos $x = 1$. De la segunda y la cuarta $z = 0$. Y de las otras $y^2 = 1$. Por tanto:

$$E = (1,1,0), \qquad F = (1,-1,0).$$

(ii) *Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.*

El área es ocho veces el área de una cara:

$$A = 8 \cdot Area(A, B, E) = 8 \cdot \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AE}\| = 8 \cdot \frac{1}{2} \|(-1, 1, 1)\| = 4\sqrt{3}.$$

El volumen es dos veces el de la pirámide $ABCDE$:

$$B = 2 \cdot Vol(ABCDE) = 2 \cdot \frac{1}{3} |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| = \frac{2}{3} \left| det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Finalmente el radio de la esfera circunscrita es la distancia del centro del octaedro a cualquiera de sus vértices:

$$r = d(A, O) = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$

(iii) *Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE, BE y CF.*

Los puntos medios de las aristas AE, BE y CF son respectivamente:

$$M_{AE} = \frac{A+E}{2} = (1/2, 1/2, 0), \quad M_{BE} = \frac{C+E}{2} = (1, 1/2, 1/2), \quad M_{CF} = \frac{C+F}{2} = (3/2, -1/2, 0)$$

Usamos la ecuación del plano conocidos tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & y - 1/2 & z - 0 \\ 1 - 1/2 & 1/2 - 1/2 & 1/2 - 0 \\ 3/2 - 1/2 & -1/2 - 1/2 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y - z - 1 = 0.$$

(iv) *Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD, BC y DF.*

Los puntos medios de las aristas AD, BC y DF son respectivamente:

$$M_{AD} = \frac{A+D}{2} = (1/2, 0, -1/2), \quad M_{BC} = \frac{B+E}{2} = (3/2, 0, 1/2), \quad M_{DF} = \frac{C+F}{2} = (1, -1/2, -1/2)$$

Comprobamos que satisfacen la ecuación $x + y - z - 1 = 0$:

- El punto M_{AD}:

$$\frac{1}{2} + 0 - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{BC}:

$$\frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{DF}:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

(v) *Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.*

Consideramos las caras ABE y ABF. El ángulo (obtuso) que forman las caras es el que forman los vectores normales de las mismas.

El vector normal de ABE es:

$$\vec{AB} \times \vec{AE} = (1, 0, 1) \times (1, 1, 0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-1, 1, 1).$$

El vector normal de ABF es:

$$\vec{AB} \times \vec{AF} = (1,0,1) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (1,1,-1).$$

El ángulo α que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{-|(-1,1,1) \cdot (1,1,-1)|}{\|(-1,1,1)\|\|(1,1,1)\|} = \frac{-1}{3}$$

(el menos del numerador es para asegurarnos de tomar el ángulo obtuso): Por tanto:

$$\alpha = arcos\left(\frac{-1}{3}\right).$$

(vi) *Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF.*

Calculamos primero el plano DCF:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1-2 & 0-0 & -1-0 \\ 1-2 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \iff x - y - z - 2 = 0.$$

La proyección ortogonal de E sobre tal plano se obtiene intersecándolo con su perpendicular por E.

La perpendicular tiene como vector director el vector normal del plano. Es por tanto la recta de ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,-1,-1)$$

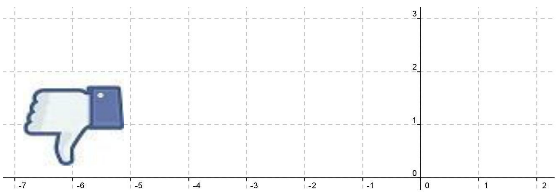
Intersecamos con el plano:

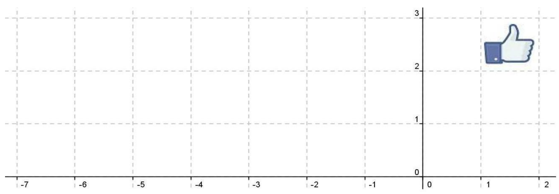
$$(1+\lambda) - (1-\lambda) - (-\lambda) - 2 = 0 \iff 3\lambda = 2 \iff \lambda = \frac{2}{3}.$$

La proyección queda:

$$(1,1,0) + \frac{2}{3}(1,-1,-1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

10.– *Dar la ecuación de una homotecia que transforme una figura en otra:*





Si observamos la figura inicial y la final, vemos que están inscritas en un cuadrado de lado 2 y lado 1 respectivamente. Además una se encuentra girada 180 grados respecto a la otra. Deducimos que se tratará de una homotecia de razón $r = -1/2$. El centro de la homotecia puede obtenerse como la intersección de un par de rectas que unan un punto con su transformado.

El punto $(-5,2)$ se transforma en $(1,2)$ y la recta que los une es $y = 2$.

El punto $(-5,0)$ se transforma en $(1,3)$ y la recta que los une es $\frac{x-1}{-5-1} = \frac{y-3}{0-3}$; simplificando $x - 2y + 5 = 0$.

Intersecando ambas rectas obtenemos que el centro de la homotecia es $(-1,2)$.

La ecuación de la homotecia queda por tanto:

$$t(x,y) = (-1,2) - \frac{1}{2}((x,y) - (-1,2)) = (-\frac{3}{2}, 3) - \frac{1}{2}(x,y).$$

11.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, -b)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + b\lambda/2 \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + x/2 \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

12.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, sea P el punto de coordenadas $(0,1)$. Para cada recta r pasando por el punto P, llamamos A y B a los puntos de intersección de r con la curva $y = x^2$. Hallar el lugar geométrico de los puntos medios de A y B. ¿Qué tipo de curva se obtiene?.*

Método I: Consideramos el haz de rectas de puntos pasando por $(0,1)$. Está generado por dos rectas que pasan por él, por ejemplo, $x = 0$ e $y - 1 = 0$. El haz es de la forma:

$$\lambda x + (y - 1) = 0.$$

(de esta forma exlcuímos la recta $x = 0$: pero eso no es problema, dicha recta es la única que no corta a la parábola dada en dos puntos por lo que no interviene en la construcción).

Intersecamos la recta con la parábola:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda x + (y-1) = 0 \\ y = x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda x + x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 + 4}}{2}$$

Los puntos de corte son (x_1, y_1) e (x_2, y_2) con:

$$x_1 = \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda^2+4}}{2}, \quad y_1 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$$

y

$$x_2 = \frac{-\lambda - \sqrt{\lambda^2+4}}{2}, \quad y_2 = 1 - \lambda x = 1 - \frac{-\lambda^2 - \lambda\sqrt{\lambda^2+4}}{2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (\frac{-\lambda}{2}, 1 + \frac{\lambda^2}{2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = \frac{-\lambda}{2}, \quad y = 1 + \frac{\lambda^2}{2}.$$

Para hallar la ecuación implícita del lugar geométrico despejamos el parámetro en la primera ecuación y sustituimos en la segunda. Queda:

$$y = 1 + 2x^2 \iff 2x^2 - y + 1 = 0.$$

Se trata de una cónica de matriz asociada A y de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $det(A) \neq 0$ y $det(T) = 0$ se trata de una parábola.

Método II: Una recta tiene por ecuación:

$$ax + by + c = 0$$

Imponemos que pase por el punto $(0,1)$:

$$b + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -b$$

La ecuación queda:

$$ax + by - b = 0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$\left.\begin{array}{l} ax+by-b=0 \\ y=x^2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \lambda ax+bx^2-b=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-a\pm\sqrt{a^2+4ab}}{2b}$$

Los puntos de corte son (x_1,y_1) e (x_2,y_2) con:

$$x_1=\frac{-a+\sqrt{a^2+4ab}}{2b}, \quad y_1=1-\frac{ax_1}{b}=1-\frac{-a^2+a\sqrt{a^2+4ab}}{2b^2}$$

y

$$x_2=\frac{-a-\sqrt{a^2+4ab}}{2b}, \quad y_2=1-\frac{ax_2}{b}=1-\frac{-a^2-a\sqrt{a^2+4ab}}{2b^2}$$

El punto medio de ambos es:

$$(x,y)=\frac{(x_1,y_1)+(x_2,y_2)}{2}=(\frac{-a}{2b},1+\frac{a^2}{2b^2})$$

Las ecuaciones paramétricas son:

$$x=\frac{-a}{2b}, \quad y=1+\frac{a^2}{2b^2}$$

Despejando a en la primera ecuación y sustiyuendo en la segunda queda:

$$y=1+\frac{4b^2x^2}{2b^2}=1+2x^2.$$

Ahora conluimos como en el método anterior.

13.– *En el espacio afín E_3, calcular el lugar geométrico de las rectas que pasan por el punto $(1,0,0)$ y forman un ángulo de 30 grados con el plano $2x+y+2z-9=0$.*

Dado un punto (x,y,z) del espacio, pertence a dicho lugar geométrico si el vector que lo une con $(1,0,0)$ forma un ángulo de 30 grados con el plano; equivalentemente un ángulo de 60 grados con su vector normal $(2,1,2)$:

$$\frac{(x-1,y,z)(2,1,2)}{\|(x-1,y,z)\|\|(2,1,2)\|}=cos(60)=\frac{1}{2}.$$

Operando queda:

$$\frac{2(x-1)+y+2z}{3\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2)}}=\frac{1}{2}$$

y elevando al cuadrado y simplificando:

$$7x^2-5y^2+7z^2+16xy+32xz+16yz-14x-16y-32z+7=0.$$

14.– En el espacio afín euclideo y respecto a la referencia canónica se consideran los puntos $A=(1,0,0)$ y $B=(1,2,2)$.

(i) *Hallar el lugar geométrico de puntos que equidistan de A y B.*

Método I: Un punto $P=(x,y,z)$ equidista de A y B si:

$$d(P,A)=d(P,B) \iff \sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-2)^2}$$

Elevando al cuadrado y operando resulta:

$$x^2-2x+1+y^2+z^2=x^2-2x+1+y^2-4y+4+z^2-4z+4$$

Simplificando obtenemos el plano de ecuación:

$$y + z - 2 = 0.$$

Método II: Los puntos que equidistan de dos dados en el espacio son aquellos que yacen en el plano mediatriz; es decir el plano que pasa por el punto medio y es perpendicular al segmento que los une. Tenemos:

$$M = \frac{A + B}{2} = (1, 1, 1).$$

El vector $\vec{AB} = (0, 2, 2)$ es perpendicular al plano buscado. Equivalentemente el vector $(0, 1, 1)$ es el vector normal de tal plano. Por tanto éste es de la forma:

$$y + z + d = 0.$$

Imponemos que pase por M:

$$1 + 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = -2.$$

Así el lugar geomẃetrico pedido es:

$$y + z - 2 = 0.$$

(ii) *Hallar las coordenadas de un punto C en el plano $z = 2$, de manera que el triángulo ABC sea isósceles con AB el lado desigual y tenga área $2\sqrt{3}$. ¿Es única la solución?.*

Por estar en el plano $z = 2$ el punto es de la forma $C = (a, b, 2)$. Ahora por formar un triángulo isósceles con AB, equidista de A y B y por tanto está en el lugar geométrico hallado en el apartado anterior:

$$b + 2 - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 0.$$

Es decir $C = (a, 0, 2)$. Finalmente $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$. Pero:

$$Area(ABC) = \frac{base \cdot h}{2} = \frac{\|\vec{AB}\|\|\vec{MC}\|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}\sqrt{(a-1)^2 + (-1)^2 + 1^2}}{2} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)}$$

Igualando $Area(ABC) = 2\sqrt{3}$ queda:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{2((a-1)^2 + 2)} \quad \Rightarrow \quad 6 = (a-1)^2 + 2 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad (a-1)^2 = \pm 2.$$

Vemos que hay dos soluciones (la solución no es por tanto única):

$$a = 3 \text{ ó } a = -1.$$

Es decir:

$$C = (3, 0, 2) \text{ ó } C = (-1, 0, 2).$$

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p,q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1,0)$, como pasa por $C = (c,d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c,d)$, como pasa por $B = (1,0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1,d)$, como pasa por $A = (0,0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c-c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha\vec{BC} + \beta\vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'} \perp \vec{BC} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0$$

$$\vec{AA'} \perp \vec{BD} \quad \Rightarrow \quad (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$4\alpha + 3\beta = -2$$
$$3\alpha + 5\beta = 0$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

III.– *En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2, 1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.*

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B. El punto A es de la forma $(1, a)$ y el B, (b, b). Por tanto:

$$(2, 1) = \frac{(1, a) + (b, b)}{2} = (b - 2, b - 1) \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = 3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2, 1)$ y $A(1, -1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 3 = 0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– *En el espacio afín euclideo usual consideramos una pirámide triangular $ABCD$ de la cual sabemos:*

- $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$.

- El vértice D se encuentra en un plano paralelo a la base ABC y que pasa por el punto $P = (0, 10, 9)$.

- El vértice D equidista de los otros tres.

(i) Hallar el volumen de la pirámide.

El volumen de la pirámide es:

$$V = \frac{base \cdot altura}{3}.$$

El área de la base es la del triángulo ABC:

$$\frac{1}{2}\|\|\vec{AB} \times \vec{AC}\|\| = \frac{1}{2}\|\|(0, -1, 1)\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

La altura es la distancia del punto D a ABC; pero como el plano que contiene a D y es paralelo a ABC también pasa por $P=(0,10,9)$, $dis(D,ABC)=dis(P,ABC)$. El plano ABC tiene por ecuación:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \Longleftrightarrow y-z=0.$$

La altura queda por tanto:

$$h=\frac{|10-9|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

El volumen pedido será:

$$V=\frac{(\sqrt{2}/2)\cdot(1/\sqrt{2})}{3}=\frac{1}{6}.$$

(ii) *Hallar las coordenadas del vértice D.*

El vértice D se encuentra en el plano paralelo a ABC (cuya ecuación hemos calculado antes $y-z=0$) y pasando por P. Tal plano es de la forma:

$$y-z+k=0$$

e imponiendo que pase por P queda $10-9+k=0$, de donde $k=1$. Deducimos que el plano que contiene a D tien por ecuación:

$$y-z-1=0.$$

y por tanto podemos tomar D como:

$$D=(a,b+1,b)$$

Ahora usamos que el punto D equidista de los otros tres:

$$\begin{aligned} d(A,D)=D(B,D) &\iff \sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2}=\sqrt{(a-1)^2+(b+1)^2+b^2} \\ d(A,D)=D(C,D) &\iff \sqrt{a^2+(b+1)^2+b^2}=\sqrt{a^2+b^2+(b-1)^2} \end{aligned}$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y simplificando queda:

$$\begin{aligned} 0&=2a-1 \\ 0&=4b \end{aligned}$$

Obtenemos que $a=1/2$ y $b=0$, con lo que $D=(1/2,1,0)$.

(iii) *Hallar las ecuaciones de la simetría respecto del plano ABC.*

El plano está generado por los vectores $\vec{AB}=(1,0,0)$ y $\vec{AC}=(0,1,1)$. Un vector perpendicular a ambos es el vector normal al plano ABC, $(0,1,-1)$. Construimos una base con esos tres vectores:

$$B'=\{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)\}.$$

En esa base la matriz de la simetría es:

$$F_{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Hacemos un cambio de base:

$$F_C=M_{CB'}F_{B'}M_{CB'}^{-1}.$$

donde:

$$M_{CB'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando resulta:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Las ecuaciónes de la simetría son (teniendo en cuenta que el origen es un punto fijo de la misma):

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

(iv) *Hallar el simétrico de P respecto de la simetría anterior.*

Simplemente usamos la fórmula hallada en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

V.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se consideran las rectas*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad s : x = y = z.$$

Encontrar un plano paralelo a r y a s y equidistante de ambas.

Primero calcularemos la dirección del plano. Para ello obtenemos los vectores directores de r y s. El vector normal al plano que buscamos será su producto vectorial.

El vector director de s es $(1,1,1)$. El de r es:

$$(1,-1,1) \wedge (1,1,0) = (-1,1,2)$$

Por tanto el vector normal al plano es:

$$(1,1,1) \wedge (-1,1,2) = (1,-3,2)$$

Ahora el plano es de la forma $x - 3y + 2z + \lambda = 0$. Para calcular λ utilizamos que la distancia del plano a ambas rectas debe de coincidir. Tomamos un punto arbitrario de cada una $(0,0,1) \in r$ y $(0,0,0) \in s$ y planteamos la ecuación:

$$\frac{|2+\lambda|}{\|(1,-3,2)\|} = \frac{|\lambda|}{\|(1,-3,2)\|}$$

O bien, $2 + \lambda = \lambda$ y $\lambda > 0$ o $\lambda < -2$, pero esto no es posible; o bien $2 + \lambda = -\lambda$ y $\lambda \in (-2, 0)$. Obtenemos $\lambda = -1$. El plano buscado es

$$x - 3y + z - 1 = 0$$

(Examen final, junio 2001)

VI.– *En el espacio afín se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & a \\ 1 & b & c \end{pmatrix}.$$

Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (1,3,1)$ y las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (1,2,-1) + \lambda(0,1,2).$$

Hallar a, b, c sabiendo que $d(A, B) = 3$ y que las rectas r y s son perpendiculares.

Por ser una matriz de Gram es simétrica y así $b = a$.

Ahora:

$$3 = d(A, B) = \|\vec{AB}\| = \|B - A\| = \|(0, 1, 1)\| = \sqrt{(0, 1, 1)G_C(0, 1, 1)^t}.$$

Operando obtenemos la ecuación:

$$6 + 2a + c = 9 \iff 2a + c = 3 \quad (*)$$

Para utilizar que r y s son perpendiculares hallamos sus vectores directores e imponemos que sean ortogonales.

El vector director de s nos lo dan directamente $\vec{u}_s = (0, 1, 2)$. Para hallar el vector director de r pasamos de implícitas a paramétricas:

$$\begin{array}{c} x + y - 2 = 0 \\ x - y - z = 0 \end{array} \quad \Rightarrow \quad x = -y + 2, \quad z = x - y = -2y + 2$$

Las paramétricas quedan:

$$x = -\lambda + 2, \quad y = \lambda, \quad z = -2\lambda + 2$$

y así $\vec{u}_r = (-1, 1, -2)$.

Ahora:

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_r = 0 \iff (0, 1, 2)G_C(-1, 1, -2)^t = 0 \iff -2 + 6 + 2a - 2a - 4c = 0.$$

Despejando deducimos que $c = 1$ y de $(*)$, $a = 1$.

En definitva $a = b = c = 1$.

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1, 2, 2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.*

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1 \iff x + y + z - 1 = 0$$

Dado un punto (x, y, z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90 - 60 = 30$ grados. El vector normal al plano es $(1, 1, 1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30) = \frac{(1, 1, 1)(x - 1, y - 2, z - 2)}{\|(1, 1, 1)\|\|(x - 1, y - 2, z - 2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 8xy - 8xz - 8yz + 22x + 4y + 4z - 19 = 0$$

VIII.– *En el espacio afín E_3 con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) *Hallar la ecuación de una recta que pase por $P(1,1,-1)$ y corte a r y s.*

La recta pedida está en los planos que contienen a r y a P y a s y a P. Por tanto será la intersección de tales planos.

Para hallar el plano que contiene a r y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$z - 1 + ay = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1,1,-1)$:

$$-1 - 1 + a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2y + z - 1 = 0.$$

Igualmente, para hallar el plano que contiene a s y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$bx + y + z - 2 = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1,1,-1)$:

$$b + 1 - 1 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2x + y + z - 2 = 0.$$

Las ecuaciones implícitas de la recta pedida son por tanto:

$$\begin{cases} 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(ii) *Hallar la ecuación de un plano paralelo a r y s y que equidiste de ambas.*

Dado que el plano buscado es paralelo a ambas rectas, su vector normal será perpendicular a los vectores directores de las rectas dadas. Por tanto podemos tomar domo vector normal del plano el producto vectorial de los vectores directores de r y s.

Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 1$$

y por tanto su vector director $v_r = (1,0,0)$.

Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$x = 0, \quad y = b, \quad z = -b + 2.$$

y por tanto su vector director $v_r = (0,1,-1)$.

El vector normal del plano buscado será:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_2 + e_3 = (0,1,1)$$

El plano π pedido es de la forma $y+z+c=0$.

Para hallar c utilizaremos la condición de la equidistancia. La distancia de un plano a una recta paralela, es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Tomamos los puntos $(0,0,1)\in r$ y $(0,0,2)\in s$:

$$d(r,\pi)=d(s,\pi) \quad \iff \quad \frac{|0+1+c|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|0+2+c|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$$

Si quitamos los valores absolutos hay dos posiblidades:

- O bien $1+c=2+c$, pero entonces $1=2$ y esto es imposible.

- O bien $-1-c=2+c$ y entonces $c=-3/2$.

Deducimos que el plano π tiene por ecuación implícita:

$$y+z-\frac{3}{2}=0.$$

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x=y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2+2y^2=4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x=y$ es:

$$x=y+c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y+c)^2+2y^2=4 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+2cy+c^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{c}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1=-\frac{c}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_1=y_1+c.$$

$$y_2=-\frac{c}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_2=y_2+c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2). El punto medio es:

$$(x,y)=\frac{(x_1,y_1)+(x_2,y_2)}{2}=(2c/3,-c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x,y)=(2c/3,-c/3)$$

o de ecuación implícita $x=-2y$.

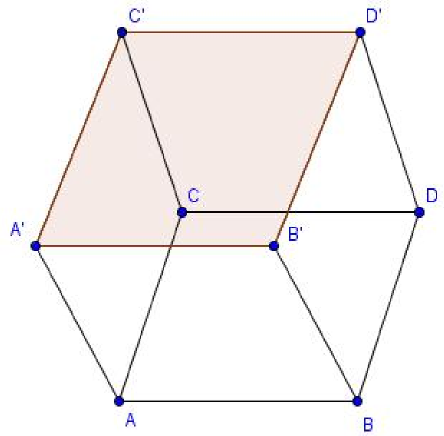
Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x,y,z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:*

$$A = (0,0,0), \quad B = (5,0,0), \quad C = (0,3,4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.



El plano que buscamos es paralelo al que contiene a los tres vértices A, B, C:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 3-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \iff 4y - 3z = 0.$$

Por tanto el plano de la cara opuesta es de la forma:

$$4y - 3z + c = 0.$$

Para el punto A' del mismo que se encuentra sobre A, tenemos en cuanto que el vector AA' es perpendicular al plano π y de longitud el lado del cubo y con coordenada z positiva (para que esté en el semiespacio superior).

El lado del cubo es $d(A,B) = 5$. El vector normal del plano π es $(0,4,-3)$. Por tanto:

$$AA' = 5 \cdot \frac{(0,-4,3)}{\|(0,4,-3)\|} = (0,-4,3).$$

y

$$A' = (0,0,0) + (0,-4,3) = (0,-4,3)$$

Ahora simplemente imponemos que este punto pertenezca al plano $4y - 3z + c = 0$:

$$4 \cdot (-4) - 3 \cdot 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 25.$$

El plano pedido tiene por ecuación:

$$4y - 3z + 25 = 0.$$

XII.– *En el espacio afín E_3 y con respecto a una referencia rectangular se considera un tetraedro regular de vértices A, B, C, D. Se sabe que los vértices tienen todas sus coordenadas no negativas, $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$ y el vértice C está en el plano $z = 0$.*

a) *Calcular las coordenadas de los vértices C y D.*

Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros. Como $d(A, B) = 1$, en particular el lado de estos triángulos es 1. El vértice C equidista de los demás vértices y por tanto está en la mediatriz de los puntos A y B en el plano $z = 0$, que es la recta $x = 1/2$, $z = 0$. Sus coordenadas serán $(1/2, y, 0)$.

Además:

$$d(A, C) = 1 \iff \sqrt{(1/2)^2 + y^2} = 1 \iff y^2 = 3/4$$

Como se nos indica que todas las coordenadas de los vértices son no negativas, nos queda:

$$C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0).$$

Ahora el vértice D equidista de los demás (en particular de A y B), luego sus coordenadas son de la forma $D = (1/2, a, b)$. Además:

$$d(A, D) = 1 \iff \sqrt{1/4 + a^2 + b^2} = 1 \iff a^2 + b^2 = 3/4$$
$$d(C, D) = 1 \iff \sqrt{(a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2} = 1 \iff (a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2 = 1$$

Resolviendo el sistema y quedándonos con las soluciones no negativas, obtenemos $a = \sqrt{3}/6$, $b = \sqrt{6}/3$ y:

$$D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3).$$

Observación: En realidad teniendo en cuenta la equidistancia de D con los demás vértices, ya sabemos que su proyección sobre el plano $z = 0$ debe de ser el centro del triángulo equilétro ABC:

$$\frac{A + B + C}{3} = (1/2, \sqrt{3}/6, 0)$$

De donde directamente obtendríamos que el punto D tiene coordenadas $(1/2, \sqrt{3}/6, b)$.

b) *Calcular el ángulo que forman dos caras del tetraedro.*

El ángulo que forman dos caras del tetraedro es el que forman los vectores normales a los planos que las contienen.

La cara ABC está contenida en el plano $z = 0$ y su vector normal es el $(0, 0, 1)$.

El vector normal de la cara ABD es el producto vectorial de los vectores AB y AD:

$$AB \times AD = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\bar{e}_3.$$

Por tanto si llamamos α al ángulo pedido tenemos:

$$cos(\alpha) = \frac{(0,0,1)(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})}{\|(0,0,1)\|\|(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})\|} = \frac{1}{3}$$

c) *Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:*

Aunque no es imprescindible, hacemos primero esta observación previa.

Dados dos cuartetos de puntos del espacio afín no coplanarios P_1, P_2, P_3, P_4 y Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, existe una **única** trasnformación afín que nos lleva cada P_i en Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Basta tener en cuenta que una aplicación lineal queda unívocamente determinada si sabemos como actúa sobre una base. En nuestro caso tenemos que llevar la base $\{\overline{P_2P_1}, \overline{P_3P_1}, \overline{P_4P_1}\}$ en $\{\overline{Q_2Q_1}, \overline{Q_3Q_1}, \overline{Q_4Q_1}\}$. Eso nos determina la parte vectorial de la transformación afín. Por otro lado la componemos con una traslación que nos lleve el punto P_1 en el Q_1.

c.i) *¿Existe una isometría que deje fijos dos vértices cualesquiera e intercambie los otros dos?. ¿Puede ser un giro?.*

Una simetría respecto al plano perpendicular al lado que une dos vértices y pasando por su punto medio, intercambia estos dos y deja fijos el resto. Es una transformación inversa, luego por la unicidad observada antes, nunca puede ser un giro.

Ahora podemos usar varias de estas isometrías para mover los vértices como queramos.

c.ii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en B, C, D y A respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

Usando las isometráas vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow BACD \longrightarrow BCAD \longrightarrow BCDA.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de tres trasnformaciones inversas, vuelve a ser inversa y no puede ser un giro.

c.iii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en C, D, A y B respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

De nuevo, usando las isometrías vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow ACBD \longrightarrow CABD \longrightarrow CADB \longrightarrow CDAB.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de cuatro trasnformaciones inversas, es una transformación directa y por tanto un giro.

XIII.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&f_1(X) = 2P_1 - X \\
&f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X \\
&f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X
\end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \ldots + P_3 - P_2 + P_1.$$
