ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas solución a la práctica 14

Geometría afín. (Curso 2012–2013)

1.– *En un espacio afín real de dimensión 3, se consideran dos sistemas de referencia $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $R' = \{P, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, donde*

$$\begin{array}{rcl} \overline{OP} & = & \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 & = & -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 & = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 & = & -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{array}$$

Se pide:

(a) *Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en R en función de las de R'.*

Supongamos que (x', y', z') son las coordenadas de un punto X en la referencia R'. Quiere decir que

$$\overline{PX} = x'\bar{u}_1 + y'\bar{u}_2 + z'\bar{u}^3 = (\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3\,)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Para calcular las coordenadas en la referencia R hay que expresar el vector $\overline{OX}$ en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$. Pero $\overline{OX} = \overline{OP} + \overline{PX}$. Las coordenadas del vector $\overline{OP}$ son conocidas. Por lo que únicamente resta realizar el cambio de base del vector $\overline{PX}$:

$$\overline{PX} = (\,\bar{u}_1 \quad \bar{u}_2 \quad \bar{u}_3\,)\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = (\,\bar{e}_1 \quad \bar{e}_2 \quad \bar{e}_3\,)\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

En definitiva queda:

$$\overline{OX} = \overline{OP} + \overline{PX} = (\,1 \quad 2 \quad -2\,)\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix} + (\,x' \quad y' \quad z'\,)\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \\ \bar{e}_3 \end{pmatrix}$$

y por tanto:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

(b) *Ecuaciones que permiten obtener las coordenadas cartesianas en R' en función de las de R.*

Basta despejar $(\,x' \quad y' \quad z'\,)$ en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}(\,1 \quad 2 \quad -2\,) + \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

y operando queda:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1/3 & 1/3 \\ -1 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(c) *Puntos cuyas coordenadas en R y en R' son las mismas.*

Hay que resolver el sistema:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Equivalentemente:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Operando (resolviendo el sistema) queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Es decir el punto de igual coordenadas es:

$$X = O + 5\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2 - 6\bar{e}_3 = P + 5\bar{u}_1 + 3\bar{u}_2 - 6\bar{u}_3$$

(d) *Resolver el mismo problema en el espacio afín ampliado.*

Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son coordenadas homogéneas en las referencias R y R' respectivamente, las ecuaciones de cambio de coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

y,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ -1 & -2/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Calculemos los puntos **propios** que tienen la mismas coordenadas en ambas referencias. Es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Equivale a calcular los autovalores asociados al 1, es decir, a resolver el sistema:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t & 3t & -6t & t \end{pmatrix}$$

2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos* $A(2,-1,1)$, $B(-1,0,3)$, *las rectas*

$$r: \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $\quad P: 3x-2y+4z+8=0, \quad Q: x+5y-6z-4=0.$

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(k) *Recta que contiene a* B*, es paralela a* Q *y corta a* r*.*

Tomaremos un plano π paralelo a Q y que pase por B. La recta que buscamos pasará por B y por el punto de corte de r y π.

Primero calculamos π:

$$x+5y-6z+\lambda=0$$

Imponiendo que pase por B, $\lambda=19$. Ahora intersecamos tal plano con r. Un puntos de r es de la forma $(-1+3\mu, 2+\mu, \mu)$. Ha de verificar la ecuación del plano π:

$$(-1+3\mu)+5(2+\mu)-6\mu+19=0$$

Obtenemos $\mu=-14$ y el punto de corte de r y π es $(-43,-12,-14)$. Ahora la recta pedida es la que une este punto con B:

$$\frac{x+1}{-43+1} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-14-3} \iff \frac{x+1}{-42} = \frac{y}{-12} = \frac{z-3}{-17}$$

(l) *Recta que corta a* r *y a* s *y pasa por* B*.*

Calcularemos los planos π_1 y π_2 que pasan por r y B y s yB; la recta pedida es la intersección de ambos.

En concreto la dirección del plano π_1 viene dada por los vectores $(3,1,1)$ y $(-1,2,0)-B=(0,2,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 9\bar{e}_2 + 6\bar{e}_3$$

Análogamente, la dirección del plano π_2 viene dada por los vectores $(1,2,-3)$ y $(0,0,0)-B=(1,0,-3)$. Por tanto su vector normal es:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -6\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$$

Ahora la dirección de la recta intersección de π_1 y π_2 es el producto vectorial de sus direcciones normales:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ -5 & 9 & 6 \\ -3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -9\bar{e}_1 - 23\bar{e}_2 + 27\bar{e}_3$$

Por tanto la recta buscada es:

$$\frac{x+1}{-9} = \frac{y}{-23} = \frac{z-3}{+27}$$

(m) *Recta paralela a la dirección dada por* $\bar{v}(1,1,2)$ *y que corta a las rectas* r *y* s*.*

Un punto de r es de la forma $(-1+3a, 2+a, a)$ y uno de s de la forma $(b, 2b, -3b)$. Debemos de fijar dos puntos de manera que el vector que los une sea paralelo a $\bar{v}(1,1,2)$:

$$\frac{-1+3a-b}{1} = \frac{2+a-2b}{1} = \frac{a+3b}{2}$$

de donde $a = 17/15$ y $b = 11/15$. Por tanto la recta que buscamos pasa por el punto $(11/15, 22/15, -33/15)$ y su ecuación es:

$$\frac{x - 11/15}{1} = \frac{y - 22/15}{1} = \frac{z - 33/15}{2}$$

Otra forma de hallar esta recta es considerar el plano π definido por la direción $\bar{v}$ y la recta r. Luego intersecamos dicho planos con s y tendremos un puntos de la recta que buscamos.

Así la ecuación del plano π es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x + 5y - 2z - 11 = 0$$

Calculamos la intersección con s; tomamos un punto de dicha recta $(b, 2b, -3b)$. Intersecamos con el plano:

$$-b + 10b + 6b - 11 = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 11/15$$

vemos que obtenemos de nuevo el punto calculado anteriormente. Ahora conocido un punto y la dirección la ecuación de la recta que buscamos es inmediata.

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es caclular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la direción ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s, la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s. Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π:

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

(q) *Distancias de A a B, de A a r, de B a P y de r a s.*

La distancia de A a B se obtiene directamente:

$$d(A, B) = \sqrt{(-1-2)^2 + (0+1)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{14}$$

La distancia de A a r se obtiene mediante la fórmula:

$$d(A, r) = \frac{||\overline{AC} \wedge \bar{v}||}{||\bar{v}||}$$

donde C es un punto de r y v su vector director. En este caso, $C(-1, 2, 0)$, $\bar{v}(3, 1, 1)$.

$$d(A, r) = \frac{||(-3, 3, -1) \wedge (3, 1, 1)||}{||(3, 1, 1)|} = \frac{4\sqrt{13}}{\sqrt{11}} = \frac{4\sqrt{143}}{11}$$

Observación: Si no recordamos la fórmula, se puede calcular el plano perpendicular a r pasando por A. La intersección de dicho plano con r nos da un punto M que es la proyección de A sobre r. La distancia pedida es la distancia entre A y M.

La distancia de B a P viene dada por la expresión:

$$d(B, P) = \frac{3 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 3 + 8}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{17}{\sqrt{29}} = \frac{17\sqrt{29}}{29}$$

Observación: De nuevo si queremos reducir el cálculo a la distancia entre dos puntos, hallamos el punto de corte de la recta perpendicular al plano y que pasa por B con el plano P.

Por último para calcular la distancia entre r y s, hallamos el punto de corte de la perpendicular a ambas con alguna de las rectas. Vimos en el apartado (p) que el punto de corte con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. Ahora la distancia pedida es la de este punto a la recta r:

$$d(r, s) = \frac{||(7/30 + 1, 7/15 - 2, -7/10) \wedge (3, 1, 1)||}{||(3, 1, 1)|} = \frac{5\sqrt{66}/6}{\sqrt{11}} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

Otra forma es usar directamente la fórmula:

$$d(r,s) = \frac{|[(-1,2,0)-(0,0,0),(3,1,1),(1,2,-3)]|}{\|(3,1,1)\wedge(1,2,-3)\|} = \frac{5\sqrt{6}}{6}$$

(r) *Ángulos formados por r y s, por s y Q y por P y Q.*

El ángulo formado por r y s es el ángulo formado por sus direcciones:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|((3,1,1)(1,2,-3))|}{\|(3,1,1)\|\|(1,2,-3)\|} = \frac{2}{\sqrt{11}\sqrt{14}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 80,72^o$$

El ángulo formado por s y Q es el complementario del que forman la direción normal a Q y la dirección de s. Por tanto:

$$sin(\alpha(s,Q)) = \frac{|((1,2,-3)(1,5,-6))|}{\|(1,2,-3)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{29}{\sqrt{14}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(s,Q) = 79,84^o$$

El ángulo formado por P y Q es el que forman sus direciones normales:

$$cos(\alpha(P,Q)) = \frac{|((3,-2,4)(1,5,-6))|}{\|(3,-2,4)\|\|(1,5,-6)\|} = \frac{31}{\sqrt{29}\sqrt{62}} \quad \Rightarrow \quad \alpha(P,Q) = 43,02^o$$

5.– Sea la matriz:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) *Probar que G es la matriz de Gram un producto escalar en $\mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica.*

Basta probar que la matriz es simétrica y definida positiva.

- Es simétrica porque $G = G^t$.

- Para ver que es definida positiva usamos el criterio de Sylvester:

$$|\,1\,| = 1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 2 > 0.$$

(ii) *En el espacio afín euclídeo con el producto escalar anterior calcular la distancia entre las rectas:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

Un punto genérico de la recta r es de la forma $P = (1,0,a)$; de la recta s es de la forma $Q = (b,1,0)$. Se tiene que:

$$dist(r,s) = \|PQ\| \text{ si } \vec{P}Q \text{ es perpendicular a } r \text{ y } s$$

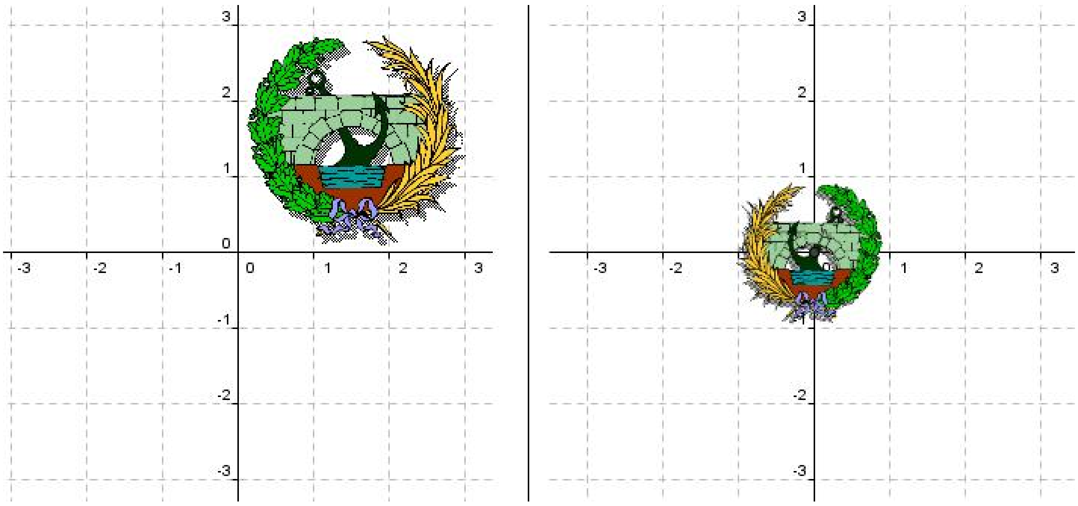
Entonces el vector PQ tiene que ser perpendicular a los vectores directores de r y s:

$$\left.\begin{array}{r} (b-1,1,-a)\cdot(0,0,1) = 0 \\ (b-1,1,-a)\cdot(1,0,0) = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} (b-1,1,-a)G(0,0,1)^t = 0 \\ (b-1,1,-a)G(1,0,0)^t = 0 \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{r} 2b-2-5a = 0 = 0 \\ b-1-2a = 0 \end{array}\right\}.$$

Deducimos que $a = 0$, $b = 1$ y:

$$dist(r,s) = \|PQ\| = \|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0)G(0,1,0)^t} = \sqrt{2}.$$

7.– *Encontrar las ecuaciones de una transformación del plano afín que lleve una figura el la otra.*



Dividiremos la transformación en varios pasos.

Observamos que el tamaño de la figura final es 2/3 el de la inicial. Hacemos una homotecia centrada en el origen y de razón 2/3.

$$f_1(x,y) = \frac{2}{3}(x,y).$$

Vemos que la figura que queremos obtener es simétrica de la que tenemos ahora respecto de una recta paralela al eje y. Hacemos la simetría respecto de ese eje:

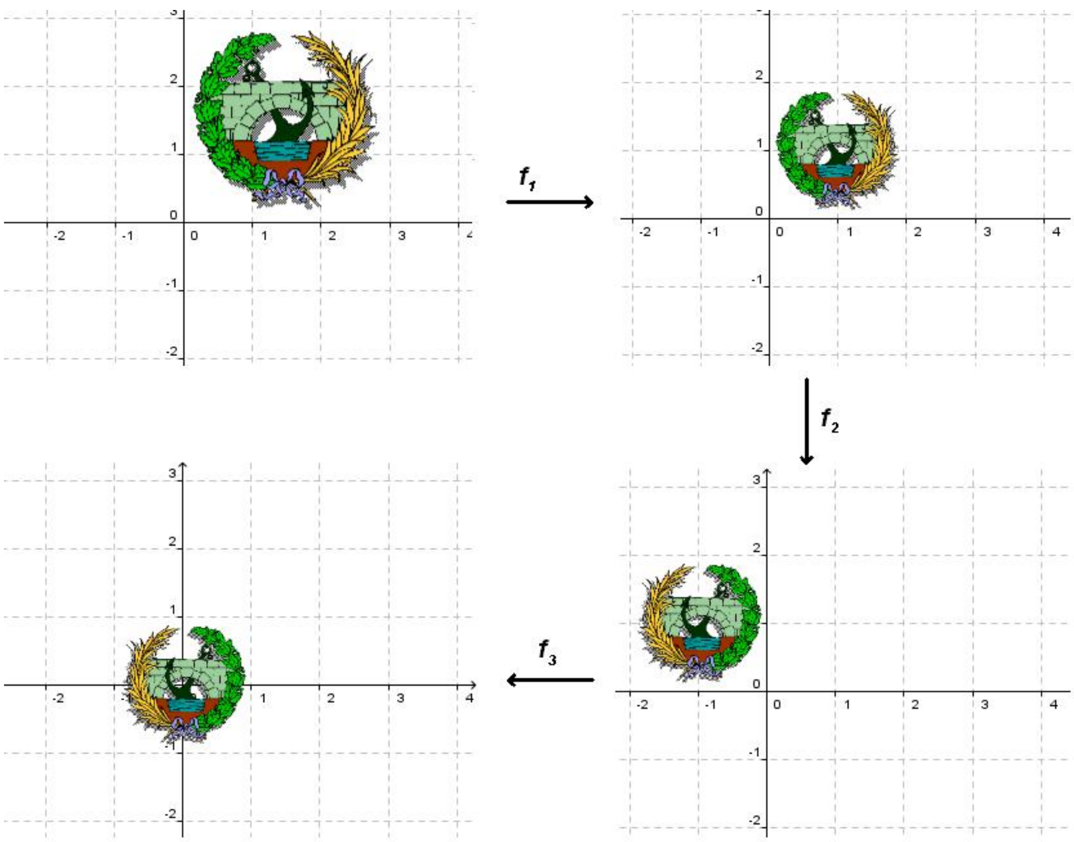
$$f_2(x,y) = (-x,y).$$

Finalmente tenemos que trasladar la figura. El vértice $(-2,2)$ ha de ser el $(-1,1)$. Por tanto trasladamos según el vector $(1,-1)$:

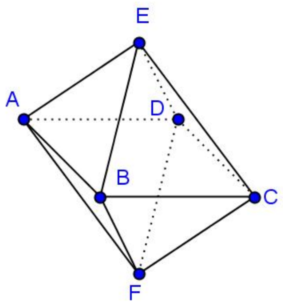
$$f_3(x,y) = (x,y) + (1,-1).$$

La transformación pedida es la composición de las tres:

$$f(x,y) = f_3(f_2(f_1(x,y))) = f_3(f_2(2x/3, 2y/3)) = f_3(-2x/3, 2y/3) = (1,-1) + \frac{2}{3}(-x,y).$$



9.– *En el espacio afín E_3 se considera un octaedro regular de vértices $ABCDEF$ con $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,1)$ y $D = (1,0,-1)$.*



(i) *Hallar las coordenadas de todos los vértices del octaedro.*

El centro O del octaedro es el punto medio de los vértices B y D:

$$O = \frac{B + D}{2} = (1,0,0)$$

y también el punto medio de A y C. Por tanto:

$$O = \frac{A + C}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2O - A = (2,0,0) - (0,0,0) = (2,0,0)$$

Finalmente los puntos E y F distan de los otros cuatro vértices el lado del octaedro. Tal lado mide:

$$d(A,B) = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

y así E y F son puntos $P = (x, y, z)$ cumpliendo:

$$\begin{array}{lcl} d(P,A) = \sqrt{2} & \Rightarrow & x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P,B) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 2 \\ d(P,C) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ d(P,D) = \sqrt{2} & \Rightarrow & (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 2 \end{array}$$

Restando la primera y tercera ecuación obtenemos $x = 1$. De la segunda y la cuarta $z = 0$. Y de las otras $y^2 = 1$. Por tanto:

$$E = (1, 1, 0), \qquad F = (1, -1, 0).$$

(ii) *Hallar su área, su volumen y el radio de la esfera circunscrita.*

El área es ocho veces el área de una cara:

$$A = 8 \cdot Area(A, B, E) = 8 \cdot \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AE}\| = 8 \cdot \frac{1}{2} \|(-1, 1, 1)\| = 4\sqrt{3}.$$

El volumen es dos veces el de la pirámide $ABCDE$:

$$B = 2 \cdot Vol(ABCDE) = 2 \cdot \frac{1}{3} |[\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}]| = \frac{2}{3} \left| det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| = \frac{2}{3} \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

Finalmente el radio de la esfera circunscrita es la distancia del centro del octaedro a cualquiera de sus vértices:

$$r = d(A, O) = \|(1, 0, 0)\| = 1.$$

(iii) *Hallar la ecuación del plano π que contiene al punto medio de las aristas AE, BE y CF.*

Los puntos medios de las aristas AE, BE y CF son respectivamente:

$$M_{AE} = \frac{A+E}{2} = (1/2, 1/2, 0), \quad M_{BE} = \frac{C+E}{2} = (1, 1/2, 1/2), \quad M_{CF} = \frac{C+F}{2} = (3/2, -1/2, 0)$$

Usamos la ecuación del plano conocidos tres puntos:

$$\begin{vmatrix} x - 1/2 & y - 1/2 & z - 0 \\ 1 - 1/2 & 1/2 - 1/2 & 1/2 - 0 \\ 3/2 - 1/2 & -1/2 - 1/2 & 0 - 0 \end{vmatrix} = 0 \iff x + y - z - 1 = 0.$$

(iv) *Probar que el plano π pasa por el punto medio de las aristas AD, BC y DF.*

Los puntos medios de las aristas AD, BC y DF son respectivamente:

$$M_{AD} = \frac{A+D}{2} = (1/2, 0, -1/2), \quad M_{BC} = \frac{B+E}{2} = (3/2, 0, 1/2), \quad M_{DF} = \frac{C+F}{2} = (1, -1/2, -1/2)$$

Comprobamos que satisfacen la ecuación $x + y - z - 1 = 0$:

- El punto M_{AD}:

$$\frac{1}{2} + 0 - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{BC}:

$$\frac{3}{2} + 0 - \frac{1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

- El punto M_{DF}:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{-1}{2} - 1 = 0 \qquad \text{Si.}$$

(v) *Calcular el ángulo que forman dos caras del octaedro.*

Consideramos las caras ABE y ABF. El ángulo (obtuso) que forman las caras es el que forman los vectores normales de las mismas.

El vector normal de ABE es:

$$\vec{AB} \times \vec{AE} = (1,0,1) \times (1,1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (-1,1,1).$$

El vector normal de ABF es:

$$\vec{AB} \times \vec{AF} = (1,0,1) \times (1,-1,0) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (1,1,-1).$$

El ángulo α que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{-|(-1,1,1)\cdot(1,1,-1)|}{\|(-1,1,1)\|\|(1,1,1)\|} = \frac{-1}{3}$$

(el menos del numerador es para asegurarnos de tomar el ángulo obtuso): Por tanto:

$$\alpha = arcos\left(\frac{-1}{3}\right).$$

(vi) *Calcular la proyección ortogonal del punto E sobre el plano que contiene a los vértices DCF.*

Calculamos primero el plano DCF:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-0 \\ 1-2 & 0-0 & -1-0 \\ 1-2 & -1-0 & 0-0 \end{vmatrix} = 0 \iff x-y-z-2=0.$$

La proyección ortogonal de E sobre tal plano se obtiene intersecándolo con su perpendicular por E.

La perpendicular tiene como vector director el vector normal del plano. Es por tanto la recta de ecuación vectorial:

$$(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(1,-1,-1)$$

Intersecamos con el plano:

$$(1+\lambda) - (1-\lambda) - (-\lambda) - 2 = 0 \iff 3\lambda = 2 \iff \lambda = \frac{2}{3}.$$

La proyección queda:

$$(1,1,0) + \frac{2}{3}(1,-1,-1) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right).$$

11.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad\qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b - a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b - a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, b/2)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + 2b\lambda \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + 2x \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - 4xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (c, d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p, q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1, 0)$, como pasa por $C = (c, d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c, d)$, como pasa por $B = (1, 0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1, d)$, como pasa por $A = (0, 0)$ queda:

$$(c - 1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c - 1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0, 0, 0),\ B = (1, 0, 0),\ C = (2, 0, 1),\ D = (1, 1, 1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha \vec{BC} + \beta \vec{BD},$$

es decir:

$$(x, y, z) = (1, 0, 0) + \alpha(1, 0, 1) + \beta(0, 1, 1) = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\begin{array}{ccc} \vec{AA'} \perp \vec{BC} & \Rightarrow & (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(1, 0, 1)^t = 0 \\ \vec{AA'} \perp \vec{BD} & \Rightarrow & (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta)G(0, 1, 1)^t = 0 \end{array}$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 4\alpha + 3\beta = -2 \\ 3\alpha + 5\beta = 0 \end{array}$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1 + \alpha, \beta, \alpha + \beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

III.– *En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2, 1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.*

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B. El punto A es de la forma $(1, a)$ y el B, (b, b). Por tanto:

$$(2, 1) = \frac{(1, a) + (b, b)}{2} = (b - 2, b - 1) \quad \Rightarrow \quad a = -1; \quad b = 3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2, 1)$ y $A(1, -1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x - 2}{1 - 2} = \frac{y - 1}{-1 - 1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x - y - 3 = 0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– *En el plano afín y con respecto a una referencia rectangular, calcular la ecuación de un giro que lleva la recta $3x - 4y - 3 = 0$ a la recta $4x - 3y - 4 = 0$.*

En primer lugar calculamos el centro del giro, que, obviamente corresponde a la intersección de las dos rectas:

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 4y - 3 = 0 \\ 4x - 3y - 4 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad x = 1; \quad y = 0;$$

Entonces las ecuaciones del giro que llevan un punto (x, y) en un punto (x', y') son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 1 \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos que saber cual es el ángulo de giro. Dado que las rectas no están orientadas, hay dos ángulos de giro que llevan una recta en la otra: el ángulo menor (α) o el ángulo mayor (180-α) (véase ilustración final). En cualquier caso, podemos proceder de dos formas:

Método I: Calculamos el ángulo formado por las dos rectas. Para ello primero hallamos sus vectores directores, que pueden ser, respectivamente:

$$\text{CASO A:} \qquad \bar{v}_1 = (4,3) \qquad \bar{v}_2 = (3,4)$$

Dado que las rectas no están orientadas, podemos tomar también:

$$\text{CASO B:} \qquad \bar{v}_1 = (4,3) \qquad \bar{v}_2 = (-3,-4)$$

El ángulo que forman puede ser calculado a través del producto escalar:

$$\text{CASO A:} \quad cos(\alpha) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{24}{25}; \qquad \text{CASO B:} \quad cos(\alpha) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = -\frac{24}{25};$$

Resta saber si el ángulo ha de ser tomado positivamente o negativamente. Para ello comprobamos la orientación de los dos vectores:

$$\text{CASO A:} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0; \qquad \text{CASO B:} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

Luego en el caso A tenemos orientación positiva y en el B negativa. Por tanto:

$$\text{CASO A:} \quad sin(\alpha) = +\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = +\frac{7}{25};$$
$$\text{CASO B:} \quad sin(\alpha) = -\sqrt{1 - cos^2(\alpha)} = -\frac{7}{25};$$

La expresión del giro queda:

$$\text{CASO A:} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix};$$
$$\text{CASO B:} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Método II: Directamente sabemos que la matriz del giro tiene que llevar el vector director UNITARIO de una recta en el vector director UNITARIO de la otra.

Como antes calculamos los vectores directores y los normalizamos. También hay dos posibilidades:

$$\text{CASO A:} \quad \bar{u}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}); \quad \bar{u}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5});$$
$$\text{CASO B:} \quad \bar{u}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}); \quad \bar{u}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$$

Entonces tiene que cumplirse que:

$$\text{CASO A:} \quad \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
$$\text{CASO B:} \quad \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Operando queda el sistema:

$$\text{CASO A:} \quad \begin{cases} 4cos(\alpha) - 3sin(\alpha) = 3 \\ 4sin(\alpha) + 3cos(\alpha) = 4 \end{cases}$$
$$\text{CASO B:} \quad \begin{cases} 4cos(\alpha) - 3sin(\alpha) = -3 \\ 4sin(\alpha) + 3cos(\alpha) = -4 \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos de nuevo:

$$\begin{array}{ll} \text{CASO A:} & cos(\alpha) = \dfrac{24}{25}; \qquad sin(\alpha) = \dfrac{7}{25} \\ \text{CASO B:} & cos(\alpha) = -\dfrac{24}{25}; \qquad sin(\alpha) = -\dfrac{7}{25} \end{array}$$

Observación: Todavía hay una forma alternativa de construir un giro en las condiciones pedidas. Basta tener en cuenta que dadas dos tangentes a una misma circunferencia siempre existe un giro con el mismo centro que ella que lleva una tangente en la otra. Entonces los pasos para construirlo serían:

- Calcuar una de las bisectrices de las dos rectas.

- Escoger un punto de la bisectriz (nuestro centro de giro).

- El ángulo de giro es precisamente el que forman las dos rectas.

(Segundo parcial, mayo 2004)

V.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se consideran las rectas*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad s : x = y = z.$$

Encontrar un plano paralelo a r y a s y equidistante de ambas.

Primero calcularemos la dirección del plano. Para ello obtenemos los vectores directores de r y s. El vector normal al plano que buscamos será su producto vectorial.

El vector director de s es $(1, 1, 1)$. El de r es:

$$(1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 2)$$

Por tanto el vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \wedge (-1, 1, 2) = (1, -3, 2)$$

Ahora el plano es de la forma $x - 3y + 2z + \lambda = 0$. Para calcular λ utilizamos que la distancia del plano a ambas rectas debe de coincidir. Tomamos un punto arbitrario de cada una $(0, 0, 1) \in r$ y $(0, 0, 0) \in s$ y planteamos la ecuación:

$$\frac{|2 + \lambda|}{\|(1, -3, 2)\|} = \frac{|\lambda|}{\|(1, -3, 2)\|}$$

O bien, $2 + \lambda = \lambda$ y $\lambda > 0$ o $\lambda < -2$, pero esto no es posible; o bien $2 + \lambda = -\lambda$ y $\lambda \in (-2, 0)$. Obtenemos $\lambda = -1$. El plano buscado es

$$x - 3y + z - 1 = 0$$

(Examen final, junio 2001)

VI.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, en el que la matriz de Gram asociada a la base del sistema es G, las rectas r y s y el plano Π.*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r : \begin{cases} x + y + z &= -1 \\ \quad y + z &= 2, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x &= \lambda \\ y &= 2 \\ z &= 1 + \lambda \end{cases} \qquad \Pi : x + 2y - z = 1$$

Se pide:

(a) *Distancia de r a s.*

Calculamos el vector que une a r y a s y es perpendicular a ambas. La distancia pedida es la norma de dicho vector. Primero escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r, resolviendo el sistema que forman sus dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x =& -3 \\ y =& \alpha \\ z =& 2-\alpha \end{aligned}$$

Ahora, un punto de r es de la forma $(-3, \alpha, 2-\alpha)$ y un punto de s de la forma $(\lambda, 2, 1+\lambda)$. El vector que los une es:

$$(\lambda+3, 2-\alpha, -1+\lambda+\alpha)$$

Tiene que ser perpendicular a los vectores directores de r y s, $(0,1,-1)$ y $(1,0,1)$. El producto escalar ha der ser cero. Es importante observar que ahora utilizamos la matriz del Gramm para el producto escalar:

$$\begin{aligned} (\,\lambda+3 \quad 2-\alpha \quad -1+\lambda+\alpha\,)\, G\, (\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t = 0 \\ (\,\lambda+3 \quad 2-\alpha \quad -1+\lambda+\alpha\,)\, G\, (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t = 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $\alpha = 8/3$ y $\lambda = -5/3$. Por tanto el vector que buscamos es $(4/3, -2/3, 0)$. La distancia pedida es:

$$\|(4/3, -2/3, 0)\| = \sqrt{(\,4/3 \quad 0 \quad -2/3\,)\, G\, (\,4/3 \quad 0 \quad -2/3\,)^t} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) *Plano que contiene a r y es perpendicular a Π.*

Como el plano que buscamos contiene a r esta en el haz:

$$a(x+y+z+1) + b(y+z-2) = 0$$

Su vector normal tiene por coordenadas covariantes:

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)_{COV}$$

Por otra parte por ser perpendicular a Π, este vector es perpendicular al normal a Π:

$$(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}$$

Por tanto

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)_{COV} \cdot (\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV} = 0$$

y equivalentemente:

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)\, G^{-1}\, (\,1 \quad 2 \quad -1\,)^t = 0$$

Obtenemos $a = 1$ y $b = -2$ y el plano que buscamos es:

$$x - y - z + 5 = 0$$

(c) *ángulo formado por r y s.*

Calculamos el ángulo formado por los vectores directores pero utilizando la matriz de Gramm en el producto escalar.

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{|\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\, G\, (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t\,|}{\|(0,1,-1)\|\|(1,0,1)\|}$$

donde

$$\begin{aligned} \|(0,1,-1)\|^2 = (\,0 \quad 1 \quad -1\,)\, G\, (\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t = 2 \\ \|(1,0,1)\|^2 = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)\, G\, (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t = 2 \end{aligned}$$

Por tanto:

$$cos(\alpha(r,s)) = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s) = 60^o$$

(d) *ángulo formado por r y Π.*

Ahora calculamos el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el normal de π. Recordemos que este último es $(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}$. Queda

$$sin(\alpha(r,\pi)) = \frac{(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\cdot(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}}{\|(0,1,-1)\|\|\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}\,\|}$$

donde

$$\begin{aligned} &(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\cdot(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV} = (\,0 \quad 1 \quad -1\,)(\,1 \quad 2 \quad -1\,)^t = 3 \\ &\|(0,1,-1)\|^2 = (\,0 \quad 1 \quad -1\,)\,G\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t = 2 \\ &\|\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}\,\|^2 = (\,1 \quad 2 \quad -1\,)\,G^{-1}\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,) = 6 \end{aligned}$$

y entonces,

$$sin(\alpha(r,\pi)) = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,\pi) = 60^o$$

(e) *Distancia de s a Π.*

Primero hay que ver si s es paralelo a π. En otro caso la distancia es 0. Pero el vector director de s es $(1,0,1)$ y pertenece a la dirección de π, que viene dada por la ecuación $x+2y-z=0$. Por tanto son paralelos.

Ahora, la distancia que nos piden es la de cualquier punto de s al plano π. Tomamos $A(0,2,1)\in s$ y la distancia pedida es:

$$d(s,\pi) = \frac{|1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 1\cdot 1 - 1|}{\|(1,2,-1)_{COV}\|}$$

La norma de $(1,2,-1)_{COV}$ ya la hemos calculado en el apartado anterior, luego queda:

$$d(s,\pi) = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano Π corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto $P(1,2,2)$ forman con el plano Π un ángulo de $60°$.*

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1} = 1 \iff x+y+z-1=0$$

Dado un punto (x,y,z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90-60=30$ grados. El vector normal al plano es $(1,1,1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30) = \frac{(1,1,1)(x-1,y-2,z-2)}{\|(1,1,1)\|\|(x-1,y-2,z-2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2+5y^2+5z^2-8xy-8xz-8yz+22x+4y+4z-19=0$$

VIII.– *En el espacio afín E_3 con el producto escalar usual, consideramos las rectas de ecuaciones:*

$$r \equiv \begin{cases} 0 = z - 1 \\ 0 = y \end{cases}, \quad s \equiv \begin{cases} 0 = x \\ 0 = y + z - 2 \end{cases}$$

(i) *Hallar la ecuación de una recta que pase por $P(1, 1, -1)$ y corte a r y s.*

La recta pedida está en los planos que contienen a r y a P y a s y a P. Por tanto será la intersección de tales planos.

Para hallar el plano que contiene a r y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$z - 1 + ay = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1, 1, -1)$:

$$-1 - 1 + a = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2y + z - 1 = 0.$$

Igualmente, para hallar el plano que contiene a s y contiene a P usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que nos definen r:

$$bx + y + z - 2 = 0.$$

Imponemos que pase por el punto $P = (1, 1, -1)$:

$$b + 1 - 1 - 2 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad b = 2,$$

y obtenemos el plano:

$$2x + y + z - 2 = 0.$$

Las ecuaciones implícitas de la recta pedida son por tanto:

$$\begin{cases} 2y + z - 1 = 0 \\ 2x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

(ii) *Hallar la ecuación de un plano paralelo a r y s y que equidiste de ambas.*

Dado que el plano buscado es paralelo a ambas rectas, su vector normal será perpendicular a los vectores directores de las rectas dadas. Por tanto podemos tomar domo vector normal del plano el producto vectorial de los vectores directores de r y s.

Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$x = a, \quad y = 0, \quad z = 1$$

y por tanto su vector director $v_r = (1, 0, 0)$.

Las ecuaciones paramétricas de s son:

$$x = 0, \quad y = b, \quad z = -b + 2.$$

y por tanto su vector director $v_r = (0, 1, -1)$.

El vector normal del plano buscado será:

$$n = u \times v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = e_2 + e_3 = (0, 1, 1)$$

El plano π pedido es de la forma $y+z+c=0$.

Para hallar c utilizaremos la condición de la equidistancia. La distancia de un plano a una recta paralela, es la distancia de cualquier punto de la recta al plano. Tomamos los puntos $(0,0,1)\in r$ y $(0,0,2)\in s$:

$$d(r,\pi)=d(s,\pi) \qquad \iff \qquad \frac{|0+1+c|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|0+2+c|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}$$

Si quitamos los valores absolutos hay dos posiblidades:

- O bien $1+c=2+c$, pero entonces $1=2$ y esto es imposible.

- O bien $-1-c=2+c$ y entonces $c=-3/2$.

Deducimos que el plano π tiene por ecuación implícita:

$$y+z-\frac{3}{2}=0.$$

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2+2y^2=4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x=y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2+2y^2=4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x=y$ es:

$$x=y+c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y+c)^2+2y^2=4 \quad \Rightarrow \quad 3y^2+2cy+c^2-4=0 \quad \Rightarrow \quad y=-\frac{c}{3}\pm\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1=-\frac{c}{3}+\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_1=y_1+c.$$

$$y_2=-\frac{c}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{12-2c^2}, \quad x_2=y_2+c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1,y_1) y (x_2,y_2). El punto medio es:

$$(x,y)=\frac{(x_1,y_1)+(x_2,y_2)}{2}=(2c/3,-c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x,y)=(2c/3,-c/3)$$

o de ecuación implícita $x=-2y$.

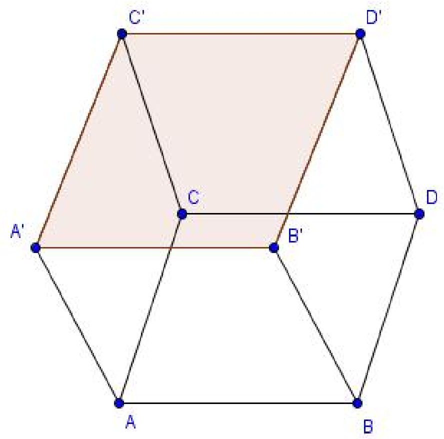
Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual y respecto a la referencia canónica se considera un cubo contenido en el semiespacio superior ($E_3^+ = \{(x,y,z) \in E_3 | z \geq 0\}$). Se sabe que tres de sus vértices pertenecientes a una misma cara tienen por coordenadas:*

$$A = (0,0,0), \quad B = (5,0,0), \quad C = (0,3,4)$$

Calcular la ecuación del plano donde descansa la cara opuesta a la dada.



El plano que buscamos es paralelo al que contiene a los tres vértices A, B, C:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 5-0 & 0-0 & 0-0 \\ 0-0 & 3-0 & 4-0 \end{vmatrix} = 0 \iff 4y - 3z = 0.$$

Por tanto el plano de la cara opuesta es de la forma:

$$4y - 3z + c = 0.$$

Para el punto A' del mismo que se encuentra sobre A, tenemos en cuanto que el vector AA' es perpendicular al plano π y de longitud el lado del cubo y con coordenada z positiva (para que esté en el semiespacio superior).

El lado del cubo es $d(A,B) = 5$. El vector normal del plano π es $(0,4,-3)$. Por tanto:

$$AA' = 5 \cdot \frac{(0,-4,3)}{\|(0,4,-3)\|} = (0,-4,3).$$

y

$$A' = (0,0,0) + (0,-4,3) = (0,-4,3)$$

Ahora simplemente imponemos que este punto pertenezca al plano $4y - 3z + c = 0$:

$$4 \cdot (-4) - 3 \cdot 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 25.$$

El plano pedido tiene por ecuación:

$$4y - 3z + 25 = 0.$$

XI.– *En el plano afín E_2 y con respecto al producto escalar usual encontrar la ecuación de* <u>todas</u> *las rectas que distan* 1 *unidad del origen de coordenadas y* 2 *unidades del punto* $(4,0)$.

Consideramos la ecuación de una recta r genérica:

$$ax + by + c = 0.$$

Supondremos por comodidad que $a^2 + b^2 = 1$ y $b \geq 0$ (siempre podemos hacer esto teniendo en cuenta que ecuaciones proporcionales definen la misma recta). Imponemos las condiciones del enunciado:

$$d(r,(0,0)) = 1 \iff \frac{|c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 1, \qquad d(r,(4,0)) = 1 \iff \frac{|4a+c|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2.$$

Obtenemos:

$$|c| = 1 \iff c = 1 \text{ ó } c = -1.$$

- Si $c = 1$ la segunda ecuación queda:

$$|4a+1| = 2 \iff 4a+1 = 2 \text{ ó } 4a+1 = -2$$

de donde $a = 1/4$ y $b = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{15}/4$ ó $a = -3/4$ y $b = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{7}/4$.

- Si $c = -1$ la segunda ecuación queda:

$$|4a-1| = 2 \iff 4a-1 = 2 \text{ ó } 4a-1 = -2$$

de donde $a = -1/4$ y $b = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{15}/4$ ó $a = 3/4$ y $b = \sqrt{1-a^2} = \sqrt{7}/4$.

Por tanto las cuatro rectas solución son:

$$x + \sqrt{15}y + 4 = 0, \qquad -x + \sqrt{15}y - 4 = 0, \qquad -3x + \sqrt{7}y + 4 = 0, \qquad 3x + \sqrt{7}y - 4 = 0.$$

XII.– *En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual, consideramos la recta r de ecuación:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

a) *Calcular las ecuaciones de un giro de* 90 *grados, con semieje formado por los puntos de r con coordenada y negativa y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica.*

Para construir las ecuaciones de giro f escogemos primero un punto fijo de la transformación, es decir, un punto del eje de giro. Por ejemplo $P = (1,0,0)$.

Las ecuaciones serán:

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

siendo T la matriz de giro. Construyamos dicha matriz.

Escogemos una base ortonormal bien orientada de manera que el primer vector sea el semieje de giro. Corresponde al vector director de la recra r. Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1, \quad y = \lambda, \quad z = 0.$$

Tomamos vector director $(0,-1,0)$ para que tenga coordenada y negativa.

Completamos a una base ortonormal:

$$B = \{(0,-1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}.$$

Veamos si está bien orientada con respecto a la base canónica:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{bien orientada.}$$

La matriz de giro respecto de la base B es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{BC} = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La ecuación de giro queda:

$$f(x,y,z) = f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + T_C \begin{pmatrix} x-1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-z \\ y \\ x-1 \end{pmatrix}.$$

b) *Dado el plano $\pi : x+y+z=0$ hallar la ecuación del plano transformado por el giro anterior.*

El punto en que el plano interseca al eje de giro se mantiene fijo por éste. Hallamos esa intersección utilizando la ecuación paramétrica de la recta:

$$\begin{cases} r \equiv x = 1, \quad y = \lambda, \quad z = 0 \\ \\ \pi \equiv x + y + z = 0 \end{cases}$$

Sustiuyendo las paramétricas de la recta en la implícita del plano:

$$1 + \lambda + 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1.$$

Por tanto:

$$r \cap \pi = (1, -1, 0).$$

Por otra parte el vector normal del plano girado se obtiene girando el vector normal del plano inicial. Utilizamos para ello la matriz de giro calculada en (a):

$$T_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Así el plano girado será:

$$-x' + y' + z' + c = 0.$$

Imponemos que pase por $(1, -1, 0)$:

$$-1 - 1 + 0 = c \qquad \Rightarrow \qquad c = 2.$$

Queda:

$$-x' + y' + z' + 2.$$

c) *Si hacemos girar la recta:*

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

sobre el eje r, indicar razonadamente que tipo de superficie se obtiene (no es necesario calcular su ecuación).

(1.2 puntos)

Observamos que las rectas r y s no se cortan, ya que el sistema:

$$\begin{cases} 0 = x \\ 1 = y + z \\ 1 = x \\ 0 = z \end{cases}$$

es claramente incompatible. Además el vector director de s es $(0, 1, -1)$ y por tanto las rectas no son paralelas.

Si tomamos un punto de s y lo hacemos girar entorno a la recta r obtenemos una circunferencia. Deducimos que la superficie cortada por planos perpendiculares a r nos proporciona circunferencias (cónicas). Se trata por tanto de una cuádrica.

Además tiene una familia de rectas (es reglada) y es de revolución: las únicas superficies cuádricas de revolución y regladas son el cono, el cilindro y el hiperboloide de una hoja (excluimos los planos o pares de planos).

Pero en el cono, las rectas y el eje de revolución se cortan; en el cilindro las rectas y el eje de revolución son paralelos. Hemos descartado ambas cosas. Se trata por tanto de un hiperboloide de una hoja.

XIII.– *En el espacio afín E_3 y con respecto a una referencia rectangular se considera un tetraedro regular de vértices A, B, C, D. Se sabe que los vértices tienen todas sus coordenadas no negativas, $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$ y el vértice C está en el plano $z = 0$.*

a) *Calcular las coordenadas de los vértices C y D.*

Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros. Como $d(A, B) = 1$, en particular el lado de estos triángulos es 1. El vértice C equidista de los demás vértices y por tanto está en la mediatriz de los puntos A y B en el plano $z = 0$, que es la recta $x = 1/2$, $z = 0$. Sus coordenadas serán $(1/2, y, 0)$.

Además:

$$d(A, C) = 1 \iff \sqrt{(1/2)^2 + y^2} = 1 \iff y^2 = 3/4$$

Como se nos indica que todas las coordenadas de los vértices son no negativas, nos queda:

$$C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0).$$

Ahora el vértice D equidista de los demás (en particular de A y B), luego sus coordenadas son de la forma $D = (1/2, a, b)$. Además:

$$d(A, D) = 1 \iff \sqrt{1/4 + a^2 + b^2} = 1 \iff a^2 + b^2 = 3/4$$
$$d(C, D) = 1 \iff \sqrt{(a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2} = 1 \iff (a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2 = 1$$

Resolviendo el sistema y quedándonos con las soluciones no negativas, obtenemos $a = \sqrt{3}/6$, $b = \sqrt{6}/3$ y:

$$D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3).$$

Observación: En realidad teniendo en cuenta la equidistancia de D con los demás vértices, ya sabemos que su proyección sobre el plano $z = 0$ debe de ser el centro del triángulo equilétro ABC:

$$\frac{A + B + C}{3} = (1/2, \sqrt{3}/6, 0)$$

De donde directamente obtendríamos que el punto D tiene coordenadas $(1/2, \sqrt{3}/6, b)$.

b) *Calcular el ángulo que forman dos caras del tetraedro.*

El ángulo que forman dos caras del tetraedro es el que forman los vectores normales a los planos que las contienen.

La cara ABC está contenida en el plano $z = 0$ y su vector normal es el $(0, 0, 1)$.

El vector normal de la cara ABD es el producto vectorial de los vectores AB y AD:

$$AB \times AD = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\bar{e}_3.$$

Por tanto si llamamos α al ángulo pedido tenemos:

$$cos(\alpha) = \frac{(0,0,1)(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})}{\|(0,0,1)\|\|(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})\|} = \frac{1}{3}$$

c) *Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:*

Aunque no es imprescindible, hacemos primero esta observación previa.

Dados dos cuartetos de puntos del espacio afín no coplanarios P_1, P_2, P_3, P_4 y Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, existe una **única** trasnformación afín que nos lleva cada P_i en Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Basta tener en cuenta que una aplicación lineal queda unívocamente determinada si sabemos como actúa sobre una base. En nuestro caso tenemos que llevar la base $\{\overline{P_2P_1}, \overline{P_3P_1}, \overline{P_4P_1}\}$ en $\{\overline{Q_2Q_1}, \overline{Q_3Q_1}, \overline{Q_4Q_1}\}$. Eso nos determina la parte vectorial de la transformación afín. Por otro lado la componemos con una traslación que nos lleve el punto P_1 en el Q_1.

c.i) *¿Existe una isometría que deje fijos dos vértices cualesquiera e intercambie los otros dos?. ¿Puede ser un giro?.*

Una simetría respecto al plano perpendicular al lado que une dos vértices y pasando por su punto medio, intercambia estos dos y deja fijos el resto. Es una transformación inversa, luego por la unicidad observada antes, nunca puede ser un giro.

Ahora podemos usar varias de estas isometrías para mover los vértices como queramos.

c.ii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en B, C, D y A respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

Usando las isometráas vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow BACD \longrightarrow BCAD \longrightarrow BCDA.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de tres trasnformaciones inversas, vuelve a ser inversa y no puede ser un giro.

c.iii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en C, D, A y B respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

De nuevo, usando las isometrías vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow ACBD \longrightarrow CABD \longrightarrow CADB \longrightarrow CDAB.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de cuatro trasnformaciones inversas, es una transformación directa y por tanto un giro.

XIV.– *En el plano afín E_2 y con respecto a un sistema de referencia rectangular consideramos las rectas r, s de ecuaciones:*

$$r : x = 0; \qquad s : x + y = 0.$$

Calcular todas las rectas t que pasan por el punto $(0, -1)$ y tales que el triángulo formado por los puntos de corte de r, s y t es isósceles.

Calculemos la ecuación de una recta t pasando por $(0, -1)$.

Como t tiene que ser distinta de r la ecuación puede escribirse como:

$$t : \lambda x + y + c = 0$$

Dado que $(0, -1)$ está en la recta, su ecuación queda:

$$t : \lambda x + y + 1 = 0$$

donde, como tampoco puede ser paralela a s, $\lambda \neq 1$.

Ahora intersecamos esta recta con s:

$$\left.\begin{array}{r} \lambda x + y + 1 = 0 \\ x + y = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad s \cap t = (\frac{1}{1-\lambda}, -\frac{1}{1-\lambda})$$

Por tanto tenemos que estudiar cuando es isósceles (dos lados iguales) el triángulo de vértices:

$$A = (0, 0); \qquad B = (0, -1); \qquad C = (\frac{1}{1-\lambda}, -\frac{1}{1-\lambda}).$$

Calculamos las longitudes de cada lado:

$$\begin{aligned} a &= \overline{BC} = \sqrt{1+\lambda^2}\left|\frac{1}{1-\lambda}\right| \\ b &= \overline{AC} = \sqrt{2}\left|\frac{1}{1-\lambda}\right| \\ c &= \overline{AB} = 1 \end{aligned}$$

donde recordemos que $\lambda \neq 1$.

Hay tres posibilidades:

(i) $a = b$, y por tanto:

$$a = b \quad \Rightarrow \quad 2 = 1 + \lambda^2 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \quad \text{(ya que } \lambda \neq 1).$$

(ii) $a = c$, y por tanto:

$$a = c \quad \Rightarrow \quad (1 + \lambda^2) = (1 - \lambda)^2 \quad \Rightarrow \quad 2\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 0.$$

(iii) $b = c$, y por tanto:

$$b = c \quad \Rightarrow \quad 1 - \lambda = \pm\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1 - \sqrt{2} \quad \text{ó} \quad \lambda = 1 + \sqrt{2}.$$

En definitiva las posibilidades para la recta pedida son:

$$-x + y + 1 = 0; \;\text{ ó }\; y + 1 = 0; \;\text{ ó }\; (1 - \sqrt{2})x + y + 1 = 0; \;\text{ ó }\; (1 + \sqrt{2})x + y + 1 = 0.$$

(Segundo Parcial, mayo 2005)

XV.– *Supongamos que escogemos* 2011 *puntos distintos del espacio y componemos todas las simetrías respecto a tales puntos. ¿Qué tipo de transformación afín obtendremos?*

Una simetría respecto a $P = (a, b, c)$ tiene por ecuación:

$$f(X) = f(x, y, z) = (a, b, c) - (x - a, y - b, z - c) = (2a, 2b, 2c) - (x, y, z) = 2P - X.$$

Por tanto la matriz asociada a la parte lineal de la trasnformación afín es $-Id$. Entonces la matriz asociada a la parte lineal de la transformación afín que se obtiene componiendo 2011 simetrías respecto a un punto es $(-Id)^{2011} = -Id$. Deducimos que la composición es de nuevo una simetría respecto a un punto.

Observación: Si los puntos que escogemos son $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{2011}$ al ir componiendo obtenemos:

$$\begin{aligned}
&f_1(X) = 2P_1 - X\\
&f_2(f_1(X)) = 2P_2 - (2P_1 - X) = 2(P_2 - P_1) + X\\
&f_3(f_2(f_1(X)) = 2P_3 - 2(P_2 - P_1) - X = 2(P_3 - P_2 + P_1) - X
\end{aligned}$$

Nos fijamos entonces que la simetría que obtenemos al componer todas las transformaciones es respecto al punto de coordenadas:

$$P_{2011} - P_{2010} + P_{2009} - \ldots + P_3 - P_2 + P_1.$$