2.– *En el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *hallar las ecuaciones de un giro de ángulo* 90^o *y semieje generado por el vector* $(3,0,4)$.

Primero construimos una base ortgononal bien orientada con el primer vector el semieje de giro $\vec{u}_1 = (3,0,4)$.

Buscamos un segundo vector ortogonal al primero:

$$(x,y,z)\cdot(3,0,4) = 0 \iff 3x + 4z = 0.$$

Tomamos por ejemplo $\vec{u}_2 = (0,1,0)$. Escogemos un vector ortogonal a los dos anteriores:

$$\begin{array}{l}(x,y,z)\cdot(3,0,4) = 0 \iff 3x+4z=0\\ (x,y,z)\cdot(0,1,0) = 0 \iff y = 0\end{array}$$

Tomamos $\vec{u}_3 = (4,0,-3)$.

Comprobamos si la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ está bien orientada, estudiando el signo del determinante de la matriz de cambio de base con respcto a la base canónica:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0\\ 4 & 0 & -3\end{vmatrix} = -25 < 0$$

Por tanto no está bien orientada. Cambiamos el signo del tercer vector para corregirlo y normalizamos:

$$\frac{(3,0,4)}{\|(3,0,4)\|} = (3/5,0,4/5), \quad \frac{(0,1,0)}{\|(0,1,0)\|} = (0,1,0), \quad \frac{(-4,0,3)}{\|(-4,0,3)\|} = (-4/5,0,3/5)$$

Entonces la base $B = \{(3/5,0,4/5),(0,1,0),(-4/5,0,3/5)\}$ es una base ortonormal bien orientada con el primer vector en la misma dirección y sentido que el semieje.

En esa base la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o)\\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}T_BM_{CB}^t$$

donde

$$M_{CB} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4\\ 0 & 5 & 0\\ 4 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

y $M_{CB}^{-1} = M_{CB}^t$ por ser una matriz de cambio de base entre bases ortonormales.

Operando resulta:

$$T_C = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12\\ 20 & 0 & -15\\ 12 & 15 & 16\end{pmatrix}.$$

Y las ecuaciones del giro son:

$$t\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 9 & -20 & 12\\ 20 & 0 & -15\\ 12 & 15 & 16\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}.$$

6.– *Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Conocida la traza de la matriz asociada a una transformación otogonal en el plano se puede determinarse si es un giro o una simetría.*

FALSO. Las matrices $\begin{pmatrix} cos(90^o) & -sin(90^0) \\ sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ tienen ambas traza cero, pero la primera es un giro y la segunda es una simetría.

(ii) *En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a un plano puede ser una simetría respecto a una recta.*

FALSO. En el espacio una transformación ortogonal:

- es un giro si y sólo si es directa, es decir, su determinante es 1.

- es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano si y sólo si es inversa, es decir, su determinante es -1.

La composición de un giro con una simetría respecto a una recta da por tanto una matriz con determinantes $1 \cdot (-1) = (-1)$ y será un giro compuesto con una simetría respecto a un plano. Pero una simetría respecto a una recta, es un giro de 180^o respecto a esa recta, por tanto no puede corresponder a la composición anterior.

(iii) *En el espacio, la composición de un giro con una simetría respecto a una recta siempre es un giro.*

VERDADERO. Una simetría respecto a una recta es un giro de 180^o respecto a esa recta; por tanto estamos componiendo dos giros. Razonando como en (ii) la composición tiene determinante $1 \cdot 1 = 1$, es decir, vuelve a ser un giro.

(iv) *Si la traza de la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio es* 3*, entonces es una simetría respecto al origen.*

FALSO. Si la matriz es la identidad, la traza es 3 y NO es una simetría respecto al origen.

(1.2 puntos)

10.– *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios* U *generado por los vectores* $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ *y* $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ *y* V *generado por el vector* $\bar{v} = (1, 0, -1)$. *Hallar el subespacio vectorial simétrico del* V *respecto de* U.

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U. Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores ortogonales:

$$(x, y, z) \cdot (1, 2, -2) = 0 \iff x + 2y - 2z = 0$$
$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = 0 \iff x + y = 0$$

Por tanto un vector $\bar{u}_3$ ortogonal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre U. Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U. Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U:

$$\left.\begin{array}{l} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de $\bar{v}$ se construye sumando al vector $\bar{w}$ el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) - (1, 0, -1) = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

(Examen final, setiembre 2003)

11.– *En $\mathbb{R}^2$ respecto al producto escalar usual se considera una transformación lineal $t : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

(i) *Hallar a y b para que t sea una simetría respecto a una recta.*

Para que sea una simetría debe de ser un transformación ortogonal con matriz asociada de determinante -1. Para que sea ortogonal tiene que cumplirse que $T_C T_C^t = Id$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff a^2 + b^2 = 1, \quad 2ab = 0.$$

Para que el determinante sea 1:

$$det\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} = 1 \iff a^2 - b^2 = -1.$$

De las ecuaciones $a^2 + b^2 = 1$ y $a^2 - b^2 = -1$ obtenemos $a = 0$ y $b = \pm 1$. En ese caso se cumple además que $2ab = 0$.

Por tanto hay dos casos:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

ii) $a = 0$ $b = -1$.

(ii) *Para cada uno de los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior calcular el eje de simetría.*

El eje de simetría corresponde a los autovectores de T_C asociados al 1:

i) $a = 0$ y $b = 1$.

$$(T_C - 1Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x-y=0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1)\}$.

ii) $a=0$ y $b=-1$.

$$(T_C-1Id)\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\end{pmatrix} \iff x+y=0.$$

El eje de simetría tiene por ecuación $x+y=0$ es decir es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,-1)\}$.

12.– *En el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a,b\in\mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:*

$$t:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^3,\qquad t(x,y,z)=(ax+bz,-y,bx+az)$$

(i) Hallar los valores de a,b para que t sea una transformación ortogonal.

La matriz asociada al endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$T_C=\begin{pmatrix} a & 0 & b\\ 0 & -1 & 0\\ b & 0 & a\end{pmatrix}$$

Para que sea una transformación ortogonal ha de cumplirse:

$$T_C^tT_C=Id.$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$a^2+b^2=1,\qquad 2ab=0.$$

De la segunda ecuación deducimos que $a=0$ ó $b=0$. Y combinado con la primera tenemos cuatro casos:

CASO I. $a=0$ y $b=1$.

CASO II. $a=0$ y $b=-1$.

CASO III. $a=1$ y $b=0$.

CASO IV. $a=-1$ y $b=0$.

(ii) *Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geométricamente.*

En cada caso el determiante indica el tipo de transformación ortogonoal (giro, si vale 1 ó giro compuesto con una simetría respecto a un plano si es -1). Tenemos:

$$det(T_C)=b^2-a^2.$$

CASO I. $a=0$ y $b=1$.

Se tiene que $det(T_C)=1$. Se trate de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1+2cos(\alpha)=traza(T_C)=-1$. De donde $cos(\alpha)=-1$ y $\alpha=180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_c-Id)(x,y,z)^t=(0,0,0)^t \iff -x+z=0,\quad -2y=0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1,0,1)$.

En definitiva se trta de un giro de 180^o respecto al semieje generador por el vector $(1,0,1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1,0,1)$.

CASO II. $a = 0$ y $b = -1$.

Se tiene que $det(T_C) = 1$. Se trate de nuevo de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = -1$. De donde $cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_c - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x - z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1, 0, -1)$.

En definitiva se trta de un giro de 180^o respecto al semieje generador por el vector $(1, 0, -1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1, 0, -1)$.

CASO III. $a = 1$ y $b = 0$.

Se tiene que $det(T_C) = -1$. Se trate de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = 1$. De donde $cos(\alpha) = 1$ y $\alpha = 0^o$.

Dado que el ángulo es de cero grados, en realida simplemente es una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio de autovectores asociados al 1:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\}$$

Es una simetría respecto al plano $y = 0$.

CASO IV. $a = -1$ y $b = 0$.

Se tiene que $det(T_C) = -1$. Se trate de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2cos(\alpha) = traza(T_C) = -3$. De donde $cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^o$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1:

$$(T_c - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff 0 = 0.$$

Es decir el espacio de autovectores asociados al -1 es todo $\mathbb{R}^3$. Puede tomarse cualquier vector como semieje, por ejemplo, $(1, 0, 0)$. Se trata por tanto de un giro de 180^o y semieje generado por $(1, 0, 0)$ compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal a tal vector, el plano YZ.

Obervación: En realidad en este caso la matriz asociada es $-Id$. Directamente se deduce que es una simetría respecto al origen.

13.– *Responde de manera argumentada a las siguientes cuestiones:*

Recordemos en primer lugar, que la traza de una matriz de una aplicación lineal no depende de la base en la que se trabaje, ya que se conserva por semejanza.

(i) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal en* $\mathbb{R}^3$*?.*

Sabemos que en una base adecuacada la matriz asociada a una transformación orotogonal es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro}$$

y

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix} \qquad \text{si es un giro compuesto con simetría}$$

En el primer caso la traza es $1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $1 + 2 = 3$.

En el segundo caso la traza es $-1 + 2cos\alpha$ y dado que el coseno toma como máximo valor el 1 entonces su valor máximo es $-1 + 2 = 1$.

Por tanto el valor máximo de la traza es 3.

(ii) *¿Cuál es el valor máximo de la traza de una matriz asociada a una transformación ortogonal inversa en* $\mathbb{R}^3$*?.*

Si la transformación es inversa es un giro compuesto con simetría. Según hemos visto en el apartado anterior el valor máximo de su traza es 1.

(iii) *Si la matriz asociada a un giro en* $\mathbb{R}^3$ *tiene traza cero. ¿Cuáles son los posibles valores del ángulo de giro?.*

Según hemos visto en (i) la traza de una matriz de giro es $1 + 2cos(\alpha)$. Si es nula se deduce que $cos(\alpha) = -1/2$ y por tanto el ángulo es $arcccos(-1/2) = \pm 120^o$.

(iv) *Si* f *es una simetría del plano con el producto escalar usual y* $f(1,2) = (-1,-2)$*. ¿Cuál es el eje de simetría?.*

Vemos que $f(1,2) = -(1,2)$. Por tanto $(1,2)$ es perpendicular al eje de simetría y es el vector normal del eje de giro. Este será entonces: $x + 2y = 0$.

14.– *En* $\mathbb{R}^3$ *dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales* $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$*. Se sabe que* f *es un giro de* 90 *grados y* g *un giro de* 30 *grados. Sean* A, B *las matrices asociadas respectivamente a* f *y* g *con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) $A \cdot B$ *es la matriz de una transformación ortogonal.*

VERDADERO. A y B son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen $A^tA = Id$ y $B^tB = Id$. Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir, $(AB)^t(AB) = Id$:

$$(AB)^t(AB) = (B^tA^t)AB = B^t(A^tA)B = B^tIdB = B^tB = Id.$$

(ii) $A \cdot B$ *es la matriz de un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una transformacióno ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como f y g son, por hipótesis, giros se cumple que $det(A) = det(B) = 1$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 1.$$

Y por tanto AB es la matriz de un giro.

(iii) $A \cdot B$ *es la matriz de un giro de* 120 *grados.*

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje $(1,0,0)$. La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(-30^o) & -sin(-30^o) \\ 0 & sin(-30^o) & cos(-30^o) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por $(-1,0,0)$ (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambial el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) *Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v) *$A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.*

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

15.– *Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si A es un giro entonces $traza(A) \geq -1$.*

VERDADERO. Recordemos que las trazas de las matrices asociadas a endomorfismos se conservan por cambios de base. Si es un giro en una base adecucada la matria asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y

$$traza(A) = traza(A') = 1 + 2cos(\alpha) \geq 1 + 2 \cdot (-1) = -1.$$

(ii) *Si $traza(A) = 1$ entonces A es un giro.*

FALSO. Por ejemplo si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces es la matriz asociada a una simetría respecto a un plano, pero $traza(A) = 1 + 1 - 1 = 1$.

(iii) *Si A es una simetría respecto a una recta entonces $det(A) = 1$.*

VERDADERO. Si es una simetría respecto a una recta, entonces en una determinada base la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con $det(A') = 1$. Como el determinante se conserva al cambiar de base tenemos que la afirmación es cierta.

(iv) *Si $traza(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.*

FALSO. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ 0 & sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

con $\alpha = 120^o$ se trata de un giro, pero su traza es $1 + 2cos(120^o) = 0$.

ÁLGEBRA **Soluciones a los Problemas adicionales**

Transformaciones ortogonales (Curso 2017–2018)

I.– *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B', en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vecor $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_e\}$ tienen la misma orientación que la base B:

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_1\|^2 &= (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_1\| = 1. \\ \|\bar{u}_2\|^2 &= (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}. \\ \|\bar{u}_3\|^2 &= (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\pi/3) & -sin(\pi/3) \\ 0 & sin(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & ' & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– *En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.*

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañonica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $det(T) = 1$ y $traza(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2cos(\alpha) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x,y,z) \in \mathcal{L}\{(1,1,1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1,1,1),(1,0,0),t(1,0,0) = (0,1,0)\}$:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\dfrac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1,1,1)$.

III.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:*

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$.

- $det(F_{CC}) = -1$.

- $traza(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $traza(F_{CC}) = 1$ y $det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1. Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

IV.– *Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) *Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.*

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) *Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.*

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1. Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1, pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) *Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.*

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

V.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3,4)$ en el vector:*

a) $(2,6)$.

b) $(4,3)$

Las tranformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$
$$\|(2,6)\| = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$$
$$\|(4,3)\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve $(3,4)$ en $(2,6)$ porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector $(3,5)$ en el $(4,3)$, porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo α de giro cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{(3,4)\cdot(4,3)}{\|(3,4)\|\|4,3\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-cos(\alpha)^2} = \pm\frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \qquad \text{ó} \qquad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro T ha de cumplir:

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24x+7y}{25} \\ \frac{-7x+24y}{25} \end{pmatrix}.$$

VI.– *Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.*

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2+b^2 & 2a^2-b^2 & 0 \\ 2a^2-b^2 & 2a^2+b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las eucaciones:

$$2a^2+b^2 = 1, \quad 2a^2-b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso II): $a = 1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

- Caso III): $a = -1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso IV): $a = -1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

(ii) *Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.*

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determimante. Tenemos:

$$det(A) = 4ab^2, \quad traza(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0), (1,0,0), t(1,0,0)\} = \{(1,1,0), (1,0,0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso II): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(-1/2,1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso III): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

- Caso IV): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

VII.– *En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:*

$$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) *Probar que f es una transformación ortogonal.*

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C:

$$F_{CC} = M_{CB} F_{BB} M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot {F_{CC}}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$det(F) = -1; \qquad traza(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$cos(\alpha) = (traza(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1}:

$$S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x = 0, \, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0,1,0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0,1,0), (1,0,0), f(1,0,0)\} = \{(0,1,0), (1,0,0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0,1,0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raiz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1. Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

(ii) $cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respecivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

IX.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\| \|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix} > 0 \quad\Rightarrow\quad \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3,0,4),(4,0,3),(0,1,0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B=\{(-3/5,0,4/5),(4/5,0,3/5),(0,1,0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & cos(90) & -sin(90)\\ 0 & sin(90) & cos(90)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1}=M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C=M_{CB}G_BM_{BC}=M_{CB}G_BM_{CB}^{-1}=M_{CB}G_BM_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB}=\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4/5 & 3/5 & 0\end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C=\begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25\\ 4/5 & 0 & 3/5\\ -12/25 & -3/5 & 16/25\end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}=G_C\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 9x/25-4y/5-12z/25\\ 4x/5+3z/5\\ -12x/25-3y/5+16z/25\end{pmatrix}.$$

X.– *Determinar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *cuya matriz respecto a un base ortonormal es:*

$$A=\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A\cdot A^t=Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$A\cdot A^t=\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix} cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha) & 0\\ 0 & cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)\end{pmatrix}=Id.$$

Para clasificarla observamos que $det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(cos(\alpha) - 1) + ysin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(sin(\alpha), 1 - cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$sin(\alpha) = 2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2).$$
$$1 - cos(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha/2) + sin^2(\alpha/2) = 2sin^2(\alpha/2).$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2), 2sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (cos(\alpha/2), sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX.

(Examen final, junio 2006)

XI.– *En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.*

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-sin(\alpha), cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (cos(\alpha), sin(\alpha), 0), (-sin(\alpha), cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B. La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.*

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.

- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.

- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.

- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.

- $-1 < traza = 1+2cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.

- $-3 < traza = -1 + 2cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2cos(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad cos(A) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi/3.$$
