

2.— En \mathbb{R}^3 se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de 45 grados y semeje generado por el vector $(1, 1, 1)$.

Buscamos una base ortonormal bien orientada en la cual el primer vector tenga la misma dirección y sentido que el semeje de giro:

$$\bar{u}_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Los vectores perpendiculares a \bar{u}_1 cumplen:

$$(x, y, z)(1, 1, 1) = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Tomamos el vector $(1, -1, 0)$ verificando esta ecuación. Buscamos un tercero perpendicular a ambos:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(1, 1, 1) = 0 &\iff x + y + z = 0 \\ (1, -1, 0)(x, y, z) = 0 &\iff x - y = 0 \end{aligned}$$

Escogemos el vector $(1, 1, -2)$. Normalizados quedan:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Comprobamos que está bien orientada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

En la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz del giro es:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & \sin(45) \\ 0 & -\sin(45) & \cos(45) \end{pmatrix}.$$

Ahora basta cambiarla de base. Tenemos en cuenta que por ser la base canónica y la base B ortonormales, la matriz de cambio de base es ortogonal, es decir $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$. Queda entonces:

$$T_{CC} = M_{CB}T_{BB}M_{BC} = M_{CB}T_{BB}M_{CB}^t,$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$M_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{1 + \sqrt{2}}{6} & \frac{2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} & \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} \\ \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} & \frac{1 + \sqrt{2}}{6} & \frac{2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} \\ \frac{2 - \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} & \frac{2 + \sqrt{6} - \sqrt{2}}{6} & \frac{1 + \sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

6.— Sea el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}$$

(i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

La condición para que un endomorfismo de un espacio euclideo sea una transformación ortogonal es que su matriz asociada respecto a una base ortonormal sea ortogonal (es decir, su inversa coincida con su traspuesta). Por tanto ha de cumplirse:

$$TT^t = Id \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3/5 & 0 & 4/5 \\ a & 0 & b \end{pmatrix}^t = Id \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3a+4b}{5} \\ 0 & 1 & a \\ 0 & \frac{3a+4b}{5} & a \end{pmatrix} = Id$$

De donde:

$$3a + 4b = 0, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Resolviendo el sistema obtenemos:

$$a = \frac{4}{5}, b = \frac{-3}{5} \quad \text{ó} \quad a = \frac{-4}{5}, b = \frac{3}{5}$$

(ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

Estudiaremos los dos casos obtenidos en el apartado anterior. Para clasificar necesitaremos conocer la traza y el determinante de la matriz asociada. Se tiene:

$$\det(T) = \frac{4a - 3b}{5}, \quad \text{traza}(T) = b.$$

CASO I: $a = \frac{4}{5}, \quad b = \frac{-3}{5}, \quad \det(T) = 1, \quad \text{traza}(T) = \frac{-3}{5}.$

Como $\det(T) = 1$ se trata de un giro. El ángulo de giro α cumple:

$$1 + 2\cos(\alpha) = -\frac{3}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = -\frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(-4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)(x, y, z)^t = 0 \iff -x + y = 0, \quad 4x - 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2, 2, 1)\}$$

Finalmente determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2, 2, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(2, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 3/5, 4/5)\}, \quad \det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo $-\arccos(-4/5)$ y semieje generado por $(2, 2, 1)$.

CASO II: $a = \frac{-4}{5}, \quad b = \frac{3}{5}, \quad \det(T) = -1, \quad \text{traza}(T) = \frac{3}{5}.$

Como $\det(T) = 1$ se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo de giro α cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{4}{5} \Rightarrow \alpha = \pm \arccos(4/5).$$

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al autovalor -1 :

$$(T + Id)(x, y, z)^t = 0 \iff x + y = 0, \quad -4x + 8z = 0$$

Tomamos:

$$S_1 = \{(2, -2, 1)\}$$

Determinamos el signo del ángulo de giro. Para ello tomamos una base formada por el semieje de giro, un vector independiente de éste y su imagen. La orientación de tal base es el signo del ángulo de giro:

$$B = \{(2, -2, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(2, -2, 1), (1, 0, 0), (0, 3/5, -4/5)\}, \quad \det(M_{BC}) = -1 < 0$$

Finalmente el plano de simetría es perpendicular al semieje:

$$S_{-1}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (2, -2, 1) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - 2y + z = 0\}.$$

Por tanto se trata de un giro de ángulo $-\arccos(4/5)$, semieje generado por $(2, -2, 1)$ compuesto con una simetría respecto al plano de ecuación implícita $2x - 2y + z = 0$.

10.— En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U .

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U . Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de \mathbb{R}^3 con vectores ortogonales:

$$\begin{aligned} (x, y, z) \cdot (1, 2, -2) = 0 &\iff x + 2y - 2z = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) = 0 &\iff x + y = 0 \end{aligned}$$

Por tanto un vector \bar{u}_3 ortogonal a \bar{u}_1 y \bar{u}_2 es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de \bar{v} sobre U . Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U . Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U :

$$\left. \begin{array}{l} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1/3 \\ b = 0 \end{cases}$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de \bar{v} se construye sumando al vector \bar{w} el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

(Examen final, setiembre 2003)

- 11.— Sea el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in \mathbb{R}$, se considera un endomorfismo $t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

- (i) Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 2a^2 - b^2 & 0 \\ 2a^2 - b^2 & 2a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las ecuaciones:

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad 2a^2 - b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2, b = -1/\sqrt{2}$.
- Caso II): $a = 1/2, b = 1/\sqrt{2}$.
- Caso III): $a = -1/2, b = -1/\sqrt{2}$.
- Caso IV): $a = -1/2, b = 1/\sqrt{2}$.

- (ii) Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortogonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determinante. Tenemos:

$$\det(A) = 4ab^2, \quad \text{traza}(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $\det(A) = 1$, $\text{traza}(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$.

- Caso II): $\det(A) = 1$, $\text{traza}(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$.

- Caso III): $\det(A) = -1$, $\text{traza}(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1 :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$, compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

- Caso IV): $\det(A) = -1$, $\text{traza}(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2\cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $\cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1 :

$$(T + Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1, 1, 0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1, 0, 0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), t(1, 0, 0)\} = \{(1, 1, 0), (1, 0, 0), (1/2, -1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$\det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1, 1, 0)$, compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -1, 0)\}$.

12.— *En el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual y la orientación positiva dada por la base canónica, para cada par de números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se considera el endomorfismo:*

$$t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad t(x, y, z) = (ax + bz, -y, bx + az)$$

(i) *Hallar los valores de a, b para que t sea una transformación ortogonal.*

La matriz asociada al endomorfismo respecto de la base canónica es:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & -1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para que sea una transformación ortogonal ha de cumplirse:

$$T_C^t T_C = Id.$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1, \quad 2ab = 0.$$

De la segunda ecuación deducimos que $a = 0$ ó $b = 0$. Y combinado con la primera tenemos cuatro casos:

CASO I. $a = 0$ y $b = 1$.

CASO II. $a = 0$ y $b = -1$.

CASO III. $a = 1$ y $b = 0$.

CASO IV. $a = -1$ y $b = 0$.

(ii) *Para cada uno de los casos determinados en el apartado anterior, clasificar la transformación describiéndola geoméricamente.*

En cada caso el determinante indica el tipo de transformación ortogonal (giro, si vale 1 ó giro compuesto con una simetría respecto a un plano si es -1). Tenemos:

$$\det(T_C) = b^2 - a^2.$$

CASO I. $a = 0$ y $b = 1$.

Se tiene que $\det(T_C) = 1$. Se trate de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -1$. De donde $\cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^\circ$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x + z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1, 0, 1)$.

En definitiva se trata de un giro de 180° respecto al semieje generador por el vector $(1, 0, 1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1, 0, 1)$.

CASO II. $a = 0$ y $b = -1$.

Se tiene que $\det(T_C) = 1$. Se trata de nuevo de un giro. El ángulo α de giro cumple: $1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -1$. De donde $\cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^\circ$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al 1:

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff -x - z = 0, \quad -2y = 0$$

Tomamos por ejemplo el vector $(1, 0, -1)$.

En definitiva se trata de un giro de 180° respecto al semieje generador por el vector $(1, 0, -1)$; equivalentemente una simetría respecto a la recta generada por $(1, 0, -1)$.

CASO III. $a = 1$ y $b = 0$.

Se tiene que $\det(T_C) = -1$. Se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = 1$. De donde $\cos(\alpha) = 1$ y $\alpha = 0^\circ$.

Dado que el ángulo es de cero grados, en realidad simplemente es una simetría respecto a un plano. El plano de simetría es el espacio de autovectores asociados al 1:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = 0\}$$

Es una simetría respecto al plano $y = 0$.

CASO IV. $a = -1$ y $b = 0$.

Se tiene que $\det(T_C) = -1$. Se trata de un giro compuesto con una simetría. El ángulo α de giro cumple: $-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) = -3$. De donde $\cos(\alpha) = -1$ y $\alpha = 180^\circ$.

El semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1 :

$$(T_C - Id)(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t \iff 0 = 0.$$

Es decir el espacio de autovectores asociados al -1 es todo \mathbb{R}^3 . Puede tomarse cualquier vector como semieje, por ejemplo, $(1, 0, 0)$. Se trata por tanto de un giro de 180° y semieje generado por $(1, 0, 0)$ compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal a tal vector, el plano YZ .

Observación: En realidad en este caso la matriz asociada es $-Id$. Directamente se deduce que es una simetría respecto al origen.

13.— Consideramos el espacio euclideo \mathbb{R}^3 con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortogonal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) Si T es una simetría respecto a una recta entonces $\text{traza}(T) = -1$.

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1 . Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1 , pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

14.— En \mathbb{R}^3 dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Se sabe que f es un giro de 90 grados y g un giro de 30 grados. Sean A, B las matrices asociadas respectivamente a f y g con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) $A \cdot B$ es la matriz de una transformación ortogonal.

VERDADERO. A y B son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen $A^t A = Id$ y $B^t B = Id$. Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir, $(AB)^t(AB) = Id$:

$$(AB)^t(AB) = (B^t A^t)AB = B^t(A^t A)B = B^t Id B = B^t B = Id.$$

(ii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro.

VERDADERO. La matriz asociada a una transformación ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como f y g son, por hipótesis, giros se cumple que $\det(A) = \det(B) = 1$. Entonces:

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = 1.$$

Y por tanto AB es la matriz de un giro.

(iii) $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90^\circ) & -\sin(90^\circ) \\ 0 & \sin(90^\circ) & \cos(90^\circ) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje $(1, 0, 0)$. La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(-30^\circ) & -\sin(-30^\circ) \\ 0 & \sin(-30^\circ) & \cos(-30^\circ) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por $(-1, 0, 0)$ (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambia el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(60^\circ) & -\sin(60^\circ) \\ 0 & \sin(60^\circ) & \cos(60^\circ) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) *Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v) *$A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.*

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

I.— Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B' , en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a \bar{u}_2 :

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ tienen la misma orientación que la base B :

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \Rightarrow \|\bar{u}_1\| = 1.$$

$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$

$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.— En \mathbb{R}^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX .

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $\det(T) = 1$ y $\text{traza}(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2\cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0) = (0, 1, 0)\}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1, 1, 1)$.

III.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

- $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$.

- $\det(F_{CC}) = -1$.

- $\text{traza}(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $\text{traza}(F_{CC}) = 1$ y $\det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1 . Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

IV.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal \mathbb{R}^2 respecto a una base arbitraria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $\det(T) = -1$ y $\text{traza}(T) = 0$;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $\det(T) = 1$ y $\text{traza}(T) = 2\cos(A)$.

(i) $|\text{traza}(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $\text{traza}(T) = 0$ ó $|\text{traza}(T)| = |2\cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

(ii) Si $\text{traza}(T) = 2$ entonces $T = Id$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $\text{traza}(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2\cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) Si $\det(T) = -1$ entonces $\text{traza}(T) = 0$.

VERDADERO. Si $\det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $\text{traza}(T) = 0$.

(iv) Si $\text{traza}(T) = 0$ entonces $\det(T) = -1$.

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A = \pi/2$ tenemos $\text{traza}(T) = 2\cos(\pi/2) = 0$, pero $\det(T) = 1$.

V.— En \mathbb{R}^2 con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3, 4)$ en el vector:

a) $(2, 6)$.

b) $(4, 3)$

Las transformaciones ortogonales de \mathbb{R}^2 directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3, 4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

$$\|(2, 6)\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\|(4, 3)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve $(3, 4)$ en $(2, 6)$ porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector $(3, 4)$ en el $(4, 3)$, porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo α de giro cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{(3,4) \cdot (4,3)}{\|(3,4)\| \|(4,3)\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$\sin(\alpha) = \pm \sqrt{1 - \cos(\alpha)^2} = \pm \frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro T ha de cumplir:

$$T \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24x+7y}{25} \\ \frac{-7x+24y}{25} \end{pmatrix}.$$

VI.— En \mathbb{R}^2 y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de \vec{e}_1 es 1 y el de \vec{e}_2 es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector \vec{e}_1 en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.

Sea F la matriz del endomorfismo y G la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que F sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G = F^t G F$$

Sabemos:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\left\| \frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2 \right\| = \|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow b = -1$$

Ahora la condición $G = F^t G F$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= 49 - 28 - 28 + 32 \\ -25 &= 3\alpha + \beta \\ 50 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha = -8 \text{ y } \beta = -1; \quad \text{ó} \quad \alpha = -6 \text{ y } \beta = -7;$$

Veamos cada una de ellas:

- **Caso I:** $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = 1$$

y por tanto dado que $F \neq Id$ y $F \neq -Id$ se trata de un giro. y la traza es:

$$\text{traza}(F) = 6/5.$$

Por tanto el ángulo α cumple:

$$\cos(\alpha) = \text{traza}(F)/2 = 3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B = \{(1, 0), F(1, 0)\} = \{(1, 0), (7/5, 4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $+\arccos(3/5)$.

- **Caso II:** $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$(F - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3, 1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

VII.— En \mathbb{R}^3 consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de \mathbb{R}^3 dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C :

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot F_{CC}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente f , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$\det(F) = -1; \quad \text{traza}(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano S_{-1}^{\perp} compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$\cos(\alpha) = (\text{traza}(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1} :

$$S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0, 1, 0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-\arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0, 1, 0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.— *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raíz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1 . Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2\cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $\cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector \bar{v}_1 .

- (ii) $\cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por \bar{v}_2, \bar{v}_3 compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respectivamente, respecto al vector \bar{v}_1 .

IX.— En \mathbb{R}^3 con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V .

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el semieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\| \|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v , si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3, 0, 4), (4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB}G_B M_{BC} = M_{CB}G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB}G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

X.— Determinar si el endomorfismo de \mathbb{R}^2 cuya matriz respecto a una base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A \cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Para clasificarla observamos que $\det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(\cos(\alpha) - 1) + y\sin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(\sin(\alpha), 1 - \cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2). \\ 1 - \cos(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) = 2\sin^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2), 2\sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX .

(Examen final, junio 2006)

XI.— En \mathbb{R}^3 se consideran dos vectores independientes \bar{v} y \bar{u} que forman entre sí un ángulo α . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por \bar{v} y de la simetría respecto del subespacio generado por \bar{u} es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como \bar{u} forma un ángulo α con \bar{v} , las coordenadas de \bar{u} son $(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a \bar{u} que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B . La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector \bar{e}_3 ortogonal al espacio generado por \bar{u} y \bar{v} .

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $\text{traza}(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.
- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.
- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.
- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.
- $-1 < traza = 1 + 2\cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.
- $-3 < traza = -1 + 2\cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2\cos(A) = 2 \Rightarrow \cos(A) = 1/2 \Rightarrow A = \pi/3.$$

