8.– *Consideramos el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada T_C (respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal $t: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que cumple:*

$$det(T_C) = -1, \qquad traza(T_C) = 1/5, \qquad t(0,1,0) = (0,-1,0).$$

¿Es única la solución?.

Como la matriz asociada a la transformación ortgonal tiene determinante negativo, entonces es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al semieje de giro. En cierta base que en principio desconocemos, la matriz de la transformación es de la forma:

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(A) & -sin(A) \\ 0 & sin(A) & cos(A) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Y como la traza se conserva por cambios de base:

$$-1 + 2cos(A) = 1/5 \iff cos(A) = 3/5.$$

Además el semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1 (único salvo múltiplo por ser un giro distinto de 180 grados). Tal vector nos es dado en el enunciado $(0,1,0)$.

En definitiva se trata de un giro de un ángulo A con $cos(A) = 3/5$ y semieje generado por $(0,1,0)$ compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular. Con los datos dados no podemos saber la orientación del giro, por lo que hay dos posibles transformaciones en las condiciones dadas, con:

$$sin(A) = +\sqrt{1 - cos(A)^2} = +4/5 \text{ ó } sin(A) = -\sqrt{1 - cos(A)^2} = -4/5.$$

Para hallar la matriz asociada a la transformación respecto de la base canónica, hallamos la base B y cambiamos de base la matriz $(*)$. B es una base ortonormal cuyo primer vector es el semieje de giro normalizado:

$$B = \{(0,1,0), (1,0,0), (0,0,1)\}$$

En definitiva:

$$F_C = M_{CB} F_B M_{BC} = M_{BC}^{-1} F_B M_{BC}.$$

Donde:

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \pm 4/5 \\ 0 & \mp 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$ por se una matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & \mp 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ \pm 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

13.– *Consideramos el espacio ecuclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual. Sea* $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *una transformación ortogonal y* T *la matriz asociada a* t *respecto una base* B *arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si* B *es una base ortonormal entonces* T *es simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) *Si* B *es una base ortonormal entonces* $T^{-1} = T^t$.

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) *Si* T *es una simetría respecto a una recta entonces* $traza(T) = -1$.

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1. Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1, pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) *Si* T^{2012} *es un giro entonces* T *es un giro.*

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

14.– *En* $\mathbb{R}^3$ *dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales* $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. *Se sabe que* f *es un giro de* 90 *grados y* g *un giro de* 30 *grados. Sean* A, B *las matrices asociadas respectivamente a* f *y* g *con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) $A \cdot B$ *es la matriz de una transformación ortogonal.*

VERDADERO. A y B son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen $A^tA = Id$ y $B^tB = Id$. Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir, $(AB)^t(AB) = Id$:

$$(AB)^t(AB) = (B^tA^t)AB = B^t(A^tA)B = B^tIdB = B^tB = Id.$$

(ii) *$A \cdot B$ es la matriz de un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una transformacióno ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como f y g son, por hipótesis, giros se cumple que $det(A) = det(B) = 1$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 1.$$

Y por tanto AB es la matriz de un giro.

(iii) *$A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje $(1, 0, 0)$. La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(-30^o) & -sin(-30^o) \\ 0 & sin(-30^o) & cos(-30^o) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por $(-1, 0, 0)$ (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambial el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) *Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v) *$A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.*

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

I.– *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B=\{\bar{v}_1,\bar{v}_2,\bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:*

$$G_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&1&1\end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1,0,0)$

Construiremos una base ortonormal B', en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1=(1,0,0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x,y,z)G_B(1,0,0)^t=0 \iff x=0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2=(0,1,0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x,y,z)G_B(0,1,0)^t=0 \iff 2y+z=0.$$

Escogemos el vecor $\bar{u}_3=(0,-1,2)$. Comprobemos si $B'=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_e\}$ tienen la misma orientación que la base B:

$$|M_{BB'}|=\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&2\end{vmatrix}=2>0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2=(1,0,0)G_B(1,0,0)^t=1 \quad\Rightarrow\quad \|\bar{u}_1\|=1.$$
$$\|\bar{u}_2\|^2=(0,1,0)G_B(0,1,0)^t=2 \quad\Rightarrow\quad \|\bar{u}_2\|=\sqrt{2}.$$
$$\|\bar{u}_3\|^2=(0,-1,2)G_B(0,-1,2)^t=2 \quad\Rightarrow\quad \|\bar{u}_3\|=\sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B''=\{(1,0,0),(0,\frac{\sqrt{2}}{2},0),(0,-\frac{\sqrt{2}}{2},\sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&cos(\pi/3)&-sin(\pi/3)\\0&sin(\pi/3)&cos(\pi/3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\0&\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB}=M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{\sqrt{2}}{2}\\0&'&\sqrt{2}\end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.– *En R^3 con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX.*

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base cañonica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $det(T) = 1$ y $traza(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2cos(\alpha) + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm\frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x,y,z) \in \mathcal{L}\{(1,1,1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1,1,1), (1,0,0), t(1,0,0) = (0,1,0)\}$:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\dfrac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1,1,1)$.

III.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:*

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$.

- $det(F_{CC}) = -1$.

- $traza(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $traza(F_{CC}) = 1$ y $det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1. Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

IV.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:*

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = -1$ y $traza(T) = 0$;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = 1$ y $traza(T) = 2cos(A)$.

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $traza(T) = 0$ ó $|traza(T)| = |2cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

(ii) *Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.*

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $traza(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) *Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.*

VERDADERO. Si $det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $traza(T) = 0$.

(iv) *Si $traza(T) = 0$ entonces $det(T) = -1$.*

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A = \pi/2$ tenemos $traza(T) = 2cos(\pi/2) = 0$, pero $det(T) = 1$.

V.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector $(3,4)$ en el vector:*

a) $(2,6)$.

b) $(4,3)$

Las tranformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
$$\|(2,6)\| = \sqrt{2^2 + 6^2} = 2\sqrt{10}$$
$$\|(4,3)\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve $(3,4)$ en $(2,6)$ porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector $(3,5)$ en el $(4,3)$, porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo α de giro cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{(3,4)\cdot(4,3)}{\|(3,4)\|\|4,3\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1 - cos(\alpha)^2} = \pm\frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \qquad \text{ó} \qquad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro T ha de cumplir:

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{24x + 7y}{25} \\ \frac{-7x + 24y}{25} \end{pmatrix}.$$

VI.– *En $\mathbb{R}^2$ y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de $\vec{e}_1$ es 1 y el de $\vec{e}_2$ es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector $\vec{e}_1$ en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.*

Sea F la matriz del endomorfismo y G la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que F sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G = F^t G F$$

Sabemos:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}; \qquad F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\|\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

Ahora la condición $G = F^t G F$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= 49 - 28 - 28 + 32 \\ -25 &= 3\alpha + \beta \\ 50 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha = -8 \text{ y } \beta = -1; \quad \text{ó} \quad \alpha = -6 \text{ y } \beta = -7;$$

Veamos cada una de ellas:

- **Caso I**: $F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = 1$$

y por tanto dado que $F \neq Id$ y $F \neq -Id$ se trata de un giro. y la traza es:

$$traza(F) = 6/5.$$

Por tanto el ángulo α cumple:

$$cos(\alpha) = traza(F)/2 = 3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B = \{(1,0), F(1,0)\} = \{(1,0), (7/5, 4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $+arc\,cos(3/5)$.

- **Caso II**: $F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$(F' - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3,1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

VII.– *En* $\mathbb{R}^3$ *consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea* B *una base de* $\mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$B = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$

y f *el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada con respecto a la base* B *es:*

$$\begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ -8/5 & -1 & 4/5 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) *Probar que* f *es una transformación ortogonal.*

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C:

$$F_{CC} = M_{CB} F_{BB} M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot {F_{CC}}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente f, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$det(F) = -1; \qquad traza(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$cos(\alpha) = (traza(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1}:

$$S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 |\, x = 0,\, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0, 1, 0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0, 1, 0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raiz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1. Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

(ii) $cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respecivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

IX.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\|\|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3, 0, 4), (4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB} G_B M_{BC} = M_{CB} G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

X.– *Determinar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *cuya matriz respecto a un base ortonormal es:*

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A \cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = Id.$$

Para clasificarla observamos que $det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(cos(\alpha) - 1) + y sin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(sin(\alpha), 1 - cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$sin(\alpha) = 2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2).$$
$$1 - cos(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha/2) + sin^2(\alpha/2) = 2sin^2(\alpha/2).$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2), 2sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (cos(\alpha/2), sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX.

(Examen final, junio 2006)

XI.– *En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.*

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-sin(\alpha), cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (cos(\alpha), sin(\alpha), 0), (-sin(\alpha), cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B. La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)

XII.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.*

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.

- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.

- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.

- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.

- $-1 < traza = 1+2cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.

- $-3 < traza = -1 + 2cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2cos(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad cos(A) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi/3.$$