2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de* 45 *grados y semieje generado por el vector* $(1,1,1)$.

Buscamos una base ortonormal bien orientada en la cual el primer vector tenga la misma dirección y sentido que el semieje de giro:

$$\bar{u}_1 = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Los vectores perpendicualres a $\bar{u}_1$ cumplen:

$$(x,y,z)(1,1,1) = 0 \iff x+y+z=0.$$

Tomamos el vector $(1,-1,0)$ verificando esta ecuación. Buscamos un tercero perpendicular a ambos:

$$\begin{aligned} (x,y,z)(1,1,1) = 0 &\iff x+y+z=0 \\ (1,-1,0)(x,y,z) = 0 &\iff x-y=0 \end{aligned}$$

Escogemos el vector $(1,1,-2)$. Normalizados quedan:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Comprobamos que está bien orientada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

En la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz del giro es:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(45) & sin(45) \\ 0 & -sin(45) & cos(45) \end{pmatrix}.$$

Ahora basta cambiarla de base. Tenemos en cuenta que por ser la base canónica y la base B ortonormales, la matriz de cambio de base es ortogonal, es decir $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$. Queda entonces:

$$T_{CC} = M_{CB} T_{BB} M_{BC} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^y,$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$M_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

5.– *En el espacio vectorial euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una base ortonormal* $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ *se considera una transformación* $t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada en la base anterior es:*

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que es ortogonal. Hallar sus autovalores y autovectores. Interpretarla geométricamente, considerando la orientación de la base de partida.

Para ver que es ortogonal hay que comprobar que $T^t = T^{-1}$ o equivalentemente que $TT^t = Id$. Pero haciendo el producto se ve inmediatamente que se verifica dicha condición.

Ahora tenemos que:

$$det(T) = 1, \qquad traza(T) = -1.$$

Se trata por tanto de un giro de ángulo α verificando:

$$1 + 2cos(\alpha) = -1 \quad \iff \quad cos(\alpha) = -1 \quad \iff \quad \alpha = \pi.$$

Es decir un giro de π radianes o equivalentemente una simetría respecto a una recta; tal eje está generado por un autovector asociado al autovalor 1:

$$S_1 = \{(x,y,z)/ -x - z = 0; \quad -2y = 0; \} = \mathcal{L}\{(-1/\sqrt(2), 0, 1/\sqrt(2))\}$$

Concluimos que T es una simetría ortogonal respecto al subespacio $S_1 = \mathcal{L}\{(-1/\sqrt(2), 0, 1/\sqrt(2))\}$.

7.– *En* R^3 *se considera una aplicación bilineal* $f : R^3 \times R^3 \longrightarrow R$ *cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Sea además un endomorfismo $t : R^3 \longrightarrow R^3$ *con matriz asociada respecto de la base canónica:*

$$T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) *Probar que* f *es un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar tiene que ser una aplicación bilineal, simétrica y definida positiva:

- Ya nos dicen que es bilineal.

- Es simétrica porque su matriz asociada es simétrica.

- Para ver que es definida positiva podemos comprobar, por ejemplo, el criterio de Sylvester:

$$det(5) = 5 > 0, \quad det\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 5 > 0, \quad det\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 19 > 0$$

También podríamos diagonalizarla por congruencia y ver que la signatura es $(3,0)$:

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 9/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

b) *¿Es t es una transformación ortogonal con el producto escalar usual? ¿Y con el producto escalar definido por* f*?.*

Para que sea transformación ortogonal tiene que cumplirse que:

$$T^t G_C T = G_C$$

siendo G_C la correspondiente matriz del producto escalar.

Si se trata del producto escalar usual, $G_C = Id$ y entonces:

$$T^t G_C T = T^t T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot = \begin{pmatrix} 9 & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} \neq Id.$$

Por tanto no es transformación ortogonal respecto del producto escalar usual.

Si se trata del producto escalar definido por f, $G_C = F$ y entonces:

$$T^t G_C T = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} = G_C.$$

Luego SI es transformación ortogonal respecto del producto escalar definido por f.

c) *En el caso de que si sea una transformación ortogonal, describir geométricamente T considerando como orientación positiva la dada por la base canónica (indicar si procede el ángulo y semieje de giro y/o el subespacio de simetría).*

Tenemos:

$$det(T) = -1, \quad traza(T) = -1.$$

Por tanto se trata de la composición de un giro y una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$. Calculemos el autovector asociado a -1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{array}{r} -x + y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{array}$$

De donde:

$$S_{-1} = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$$

Hallamos $S_{-1}^{\perp}$. Recordemos que estamos usando el producto escalar definido por f:

$$(x,y,z)F(1,0,1)^t = 0 \iff 2x - z = 0.$$

Luego la simetría es respecto al plano de ecuación implícita $2x - z = 0$.

Para conocer el ángulo α de giro tenemos en cuenta que:

$$-1 = traza(T) = -1 + 2cos(\alpha).$$

De donde $cos(\alpha) = 0$. Resta saber que signo debemos de dar a α. Consideramos la base:

$$\{(1,0,1),(0,1,0),t(0,1,0)\} = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,0,2)\}$$

Su orientación con respecto a la base canónica es:

$$signo(det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}) = signo(1) < 0$$

Vemos que tiene orientación negativa.

En definitiva deducimos que la transformación t es la composición de un giro de 90 grados, de semieje generado por $(1,0,1)$ y una simetría respecto al plano $\{(x,y,z) \in R^3 | 2x - z = 0\}$.

10.– *En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1,2,-2)$ y $\bar{u}_2 = (1,1,0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1,0,-1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U.*

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U. Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores ortogonales:

$$\begin{array}{l} (x,y,z)\cdot(1,2,-2) = 0 \iff x+2y-2z=0 \\ (x,y,z)\cdot(1,1,0)=0 \iff x+y=0 \end{array}$$

Por tanto un vector $\bar{u}_3$ ortogonal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es:

$$\bar{u}_3 = (2,-2,-1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1,4,-1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre U. Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w}-\bar{v}$ es ortogonal a U. Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w}-\bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U:

$$\left.\begin{array}{l} a\bar{u}_1\cdot\bar{u}_1 + b\bar{u}_2\cdot\bar{u}_1 = \bar{v}\cdot\bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1\cdot\bar{u}_2 + b\bar{u}_2\cdot\bar{u}_2 = \bar{v}\cdot\bar{u}_2 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} 9a+3b=3 \\ 3a+2b=1 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \left\{\begin{array}{l} a=1/3 \\ b=0 \end{array}\right.$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de $\bar{v}$ se construye sumando al vector $\bar{w}$ el vector $\bar{w}-\bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w}-\bar{v} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) - (1,0,-1) = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

(Examen final, setiembre 2003)

11.– *Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.*

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 2a^2 - b^2 & 0 \\ 2a^2 - b^2 & 2a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las eucaciones:

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad 2a^2 - b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso II): $a = 1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

- Caso III): $a = -1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso IV): $a = -1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

(ii) *Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.*

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determimante. Tenemos:

$$det(A) = 4ab^2, \quad traza(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0), (1,0,0), t(1,0,0)\} = \{(1,1,0), (1,0,0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso II): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(-1/2,1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso III): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

- Caso IV): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

12.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.*

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.

- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.

- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.

- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.

- $-1 < traza = 1+2cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.

- $-3 < traza = -1 + 2cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2cos(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad cos(A) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi/3.$$

13.– *Consideramos el espacio ecuclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal y T la matriz asociada a t respecto una base B arbitraria. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si B es una base ortonormal entonces T es simétrica.*

FALSO. Por ejemplo si T es una matriz de giro de 90 grados queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica.

(ii) *Si B es una base ortonormal entonces $T^{-1} = T^t$.*

VERDADERO. La condición para que una transformación sea ortonormal es que la matriz asociada respecto a una base ortonormal cumpla $TT^t = Id$. Esto equivale a $T^{-1} = T^t$.

(iii) *Si T es una simetría respecto a una recta entonces $traza(T) = -1$.*

VERDADERO. Respecto a una base formada por el vector director de la recta y dos vectores más ortogonales a éste, la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

que tiene traza -1. Como la traza se conserva por semejanza, no depende de la base en la que trabajemos, y por tanto la afirmación es cierta.

(iv) Si $traza(T) = -1$ entonces T es una simetría respecto a una recta.

FALSO. La matriz de un giro de noventa grados compuesto con una simetría respecto al plano ortogonal al eje de giro, en una base adecuada es:

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene traza -1, pero no es una simetría respecto a una recta.

(v) *Si T^{2012} es un giro entonces T es un giro.*

FALSO. La matriz de una simetría respecto a un plano es (respecto a una base adecuada):

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cumple $T^{2012} = Id$ (giro de cero grados) pero T no es una matriz de giro.

14.– *En $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica se consideran las transformaciones ortogonales $f, g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Se sabe que f es un giro de 90 grados y g un giro de 30 grados. Sean A, B las matrices asociadas respectivamente a f y g con respecto a la base canónica. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *$A \cdot B$ es la matriz de una transformación ortogonal.*

VERDADERO. A y B son un par de matrices asociadas a transformaciones ortogonales respecto a una base ortonormal. Por tanto cumplen $A^tA = Id$ y $B^tB = Id$. Veamos que su producto cumple también esta propiedad, es decir, $(AB)^t(AB) = Id$:

$$(AB)^t(AB) = (B^tA^t)AB = B^t(A^tA)B = B^tIdB = B^tB = Id.$$

(ii) *$A \cdot B$ es la matriz de un giro.*

VERDADERO. La matriz asociada a una transformacióno ortogonal es un giro si y sólo si su determinante es 1. Como f y g son, por hipótesis, giros se cumple que $det(A) = det(B) = 1$. Entonces:

$$det(AB) = det(A)det(B) = 1.$$

Y por tanto AB es la matriz de un giro.

(iii) *$A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. No tiene porque ser cierto. Por ejemplo la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90^o) & -sin(90^o) \\ 0 & sin(90^o) & cos(90^o) \end{pmatrix},$$

es una matriz de giro de 90 grados y semieje $(1, 0, 0)$. La matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(-30^o) & -sin(-30^o) \\ 0 & sin(-30^o) & cos(-30^o) \end{pmatrix},$$

Es una matriz de giro de 30 grados y semieje generado por $(-1, 0, 0)$ (ya que si se invierte el sentido del semieje de giro cambial el signo del ángulo). Su producto es:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix},$$

que es una matriz de giro de 60 grados.

(iv) *Si f y g tiene el mismo eje de giro, $A \cdot B$ es la matriz de un giro de 120 grados.*

FALSO. El ejemplo descrito en el apartado anterior lo justifica.

(v) *$A \cdot B$ puede ser la matriz de un giro de 60 grados.*

VERDADERO. Basta considerar el ejemplo del caso (iii).

ÁLGEBRA **Soluciones a los problemas adicionales**

Transformaciones ortogonales (Curso 2013–2014)

I.– *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B', en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vecor $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_e\}$ tienen la misma orientación que la base B:

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\begin{aligned}
\|\bar{u}_1\|^2 &= (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_1\| = 1. \\
\|\bar{u}_2\|^2 &= (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}. \\
\|\bar{u}_3\|^2 &= (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\pi/3) & -sin(\pi/3) \\ 0 & sin(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{2} & -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}}{2} & \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & ' & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

III.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:*

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$.
- $det(F_{CC}) = -1$.
- $traza(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $traza(F_{CC}) = 1$ y $det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1. Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

IV.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:*

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = -1$ y $traza(T) = 0$;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = 1$ y $traza(T) = 2cos(A)$.

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $traza(T) = 0$ ó $|traza(T)| = |2cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

(ii) *Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.*

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $traza(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) *Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.*

VERDADERO. Si $det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $traza(T) = 0$.

(iv) *Si* $traza(T)=0$ *entonces* $det(T)=-1$.

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A=\pi/2$ tenemos $traza(T)=2cos(\pi/2)=0$, pero $det(T)=1$.

VI.– *En* $\mathbb{R}^2$ *y en una base orientada* $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$, *tal que el módulo de* $\vec{e}_1$ *es* 1 *y el de* $\vec{e}_2$ *es* $\sqrt{2}$. *Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector* $\vec{e}_1$ *en el vector* $\frac{7}{5}\vec{e}_1+\frac{4}{5}\vec{e}_2$.

Sea F la matriz del endomorfismo y G la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que F sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G=F^tGF$$

Sabemos:

$$G=\begin{pmatrix}1 & b\\ b & 2\end{pmatrix}; \qquad F=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & \alpha\\ 4 & \beta\end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\|\frac{7}{5}\vec{e}_1+\frac{4}{5}\vec{e}_2\|=\|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix}\frac{7}{5} & \frac{4}{5}\end{pmatrix}G\begin{pmatrix}\frac{7}{5}\\ \frac{4}{5}\end{pmatrix}=1 \quad\Rightarrow\quad b=-1$$

Ahora la condición $G=F^tGF$ queda:

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\frac{1}{25}\begin{pmatrix}7 & 4\\ \alpha & \beta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7 & \alpha\\ 4 & \beta\end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}25&=49-28-28+32\\ -25&=3\alpha+\beta\\ 50&=\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha=-8 \text{ y } \beta=-1; \qquad \text{ó} \qquad \alpha=-6 \text{ y } \beta=-7;$$

Veamos cada una de ellas:

- Caso I: $F=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}7 & -8\\ 4 & -1\end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49+24)=1$$

y por tanto dado que $F\neq Id$ y $F\neq -Id$ se trata de un giro. y la traza es:

$$traza(F)=6/5.$$

Por tanto el ángulo α cumple:

$$cos(\alpha)=traza(F)/2=3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B=\{(1,0),F(1,0)\}=\{(1,0),(7/5,4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $+arc\,cos(3/5)$.

- Caso II: $F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49+24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$(F' - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3,1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

VII.– *En* $\mathbb{R}^3$ *consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea* B *una base de* $\mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

y f *el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada con respecto a la base* B *es:*

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) *Probar que* f *es una transformación ortogonal.*

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C:

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot {F_{CC}}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente* f*, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$det(F) = -1; \qquad traza(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$cos(\alpha) = (traza(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1}:

$$S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, (F_{CC} + 1 \cdot Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 |\, x = 0,\, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0,1,0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0,1,0),(1,0,0),f(1,0,0)\} = \{(0,1,0),(1,0,0),(3/5,0,4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0,1,0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raiz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1. Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

(ii) $cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respecivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

IX.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x,y,z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4,0,3)$ y de la segunda $v = (0,1,0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4,0,3)\cdot(0,1,0)}{\|(4,0,3)\| \|(0,1,0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4,0,3) \times (0,1,0) = (-3,0,4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3,0,4)$ ó $(3,0,-4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3,0,4)$ la base:

$$\{(-3,0,4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3,0,4), (4,0,3), (0,1,0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0,1,0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB} G_B M_{BC} = M_{CB} G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

X.– *Determinar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *cuya matriz respecto a un base ortonormal es:*

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A \cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Para clasificarla observamos que $det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(cos(\alpha) - 1) + ysin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(sin(\alpha), 1 - cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} sin(\alpha) &= 2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2). \\ 1 - cos(\alpha) &= 1 - cos^2(\alpha/2) + sin^2(\alpha/2) = 2sin^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2), 2sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (cos(\alpha/2), sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX.

(Examen final, junio 2006)

XI.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se consideran dos vectores independientes* $\bar{v}$ *y* $\bar{u}$ *que forman entre sí un ángulo* α*. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por* $\bar{v}$ *y de la simetría respecto del subespacio generado por* $\bar{u}$ *es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.*

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-sin(\alpha), cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} =$

$(cos(\alpha), sin(\alpha), 0), (-sin(\alpha), cos(\alpha), 0), e_3 = (0,0,1)\}$. Tiene la misma orientación que B. La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)