2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de* 45 *grados y semieje generado por el vector* $(1,1,1)$.

Buscamos una base ortonormal bien orientada en la cual el primer vector tenga la misma dirección y sentido que el semieje de giro:

$$\bar{u}_1 = \frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1).$$

Los vectores perpendicualres a $\bar{u}_1$ cumplen:

$$(x,y,z)(1,1,1) = 0 \iff x+y+z=0.$$

Tomamos el vector $(1,-1,0)$ verificando esta ecuación. Buscamos un tercero perpendicular a ambos:

$$\begin{aligned} (x,y,z)(1,1,1) = 0 &\iff x+y+z=0 \\ (1,-1,0)(x,y,z) = 0 &\iff x-y=0 \end{aligned}$$

Escogemos el vector $(1,1,-2)$. Normalizados quedan:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2).$$

Comprobamos que está bien orientada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

En la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz del giro es:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(45) & sin(45) \\ 0 & -sin(45) & cos(45) \end{pmatrix}.$$

Ahora basta cambiarla de base. Tenemos en cuenta que por ser la base canónica y la base B ortonormales, la matriz de cambio de base es ortogonal, es decir $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$. Queda entonces:

$$T_{CC} = M_{CB} T_{BB} M_{BC} = M_{CB} T_{BB} M_{CB}^y,$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$M_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

8.– *Consideramos el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual. Calcular la matriz asociada* T_C *(respecto de la base canónica) de una transformación ortogonal* $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *que cumple:*

$$det(T_C) = -1, \qquad traza(T_C) = 1/5, \qquad t(0,1,0) = (0,-1,0).$$

¿Es única la solución?.

Como la matriz asociada a la transformación ortgonal tiene determinante negativo, entonces es un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al semieje de giro. En cierta base que en principio desconocemos, la matriz de la transformación es de la forma:

$$F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(A) & -sin(A) \\ 0 & sin(A) & cos(A) \end{pmatrix} \qquad (*)$$

Y como la traza se conserva por cambios de base:

$$-1 + 2cos(A) = 1/5 \iff cos(A) = 3/5.$$

Además el semieje de giro está generado por un autovector asociado al -1 (único salvo múltiplo por ser un giro distinto de 180 grados). Tal vector nos es dado en el enunciado $(0,1,0)$.

En definitiva se trata de un giro de un ángulo A con $cos(A) = 3/5$ y semieje generado por $(0,1,0)$ compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular. Con los datos dados no podemos saber la orientación del giro, por lo que hay dos posibles transformaciones en las condiciones dadas, con:

$$sin(A) = +\sqrt{1 - cos(A)^2} = +4/5 \text{ ó } sin(A) = -\sqrt{1 - cos(A)^2} = -4/5.$$

Para hallar la matriz asociada a la transformación respecto de la base canónica, hallamos la base B y cambiamos de base la matriz $(*)$. B es una base ortonormal cuyo primer vector es el semieje de giro normalizado:

$$B = \{(0,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$$

En definitiva:

$$F_C = M_{CB} F_B M_{BC} = M_{BC}^{-1} F_B M_{BC}.$$

Donde:

$$M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3/5 & \pm 4/5 \\ 0 & \mp 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

y $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$ por se una matriz de cambio de base entre dos bases ortonormales.

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & \mp 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ \pm 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

10.– *En el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios* U *generado por los vectores* $\bar{u}_1 = (1,2,-2)$ *y* $\bar{u}_2 = (1,1,0)$ *y* V *generado por el vector* $\bar{v} = (1,0,-1)$. *Hallar el subespacio vectorial simétrico del* V *respecto de* U.

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U. Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores ortogonales:

$$(x,y,z) \cdot (1,2,-2) = 0 \iff x + 2y - 2z = 0$$
$$(x,y,z) \cdot (1,1,0) = 0 \iff x + y = 0$$

Por tanto un vector $\bar{u}_3$ ortogonal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre U. Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U. Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U:

$$\left.\begin{array}{l} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 = \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 = \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} 9a + 3b = 3 \\ 3a + 2b = 1 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} a = 1/3 \\ b = 0 \end{array}\right.$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de $\bar{v}$ se construye sumando al vector $\bar{w}$ el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}) - (1, 0, -1) = (-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

(Examen final, setiembre 2003)

11.– *Sea el espacio euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual y consideremos como orientación positiva la dada por la base canónica. Para cada $a, b \in R$, se considera un endomorfismo $t : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada respecto de la base canónica es:*

$$T = \begin{pmatrix} a & a & b \\ a & a & -b \\ -b & b & 0 \end{pmatrix}$$

(i) *Hallar los valores de a y b para las cuales t es una transformación ortogonal.*

Para que una matriz T asociada a un endomorfismo respecto a una base ortonormal corresponda a una transformación ortogonal ha de cumplir $TT^t = Id$. En nuestro caso:

$$TT^t = \begin{pmatrix} 2a^2 + b^2 & 2a^2 - b^2 & 0 \\ 2a^2 - b^2 & 2a^2 + b^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2b^2 \end{pmatrix}$$

Igualando a la identidad obtenemos las eucaciones:

$$2a^2 + b^2 = 1, \quad 2a^2 - b^2 = 0, \quad 2b^2 = 1.$$

Notamos que la primera es la suma de las otras dos (dependiente) luego queda:

$$a^2 = b^2/2, \quad b^2 = 1/2.$$

De donde $b = \pm\sqrt{1/2}$ y obtenemos cuatro soluciones:

- Caso I): $a = 1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso II): $a = 1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

- Caso III): $a = -1/2$, $b = -1/\sqrt{2}$.

- Caso IV): $a = -1/2$, $b = 1/\sqrt{2}$.

(ii) *Para los valores hallados en (i) clasificar la transformación ortgonal, indicando si procede el semieje de giro, ángulo de giro y/o subespacios de simetría.*

Para clasificar la transformación basta saber su traza y su determimante. Tenemos:

$$det(A) = 4ab^2, \quad traza(A) = 2a.$$

Entonces:

- Caso I): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0), (1,0,0), t(1,0,0)\} = \{(1,1,0), (1,0,0), (-1/2, 1/2, 1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso II): $det(A) = 1$, $traza(A) = 1$. Se trata de un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) + 1 = 1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$.

El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor 1:

$$(T - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff -x/2 + y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0), (1,0,0), t(1,0,0)\} = \{(1,1,0), (1,0,0), (-1/2, 1/2, -1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$.

- Caso III): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 - z/\sqrt{2} = 0, \quad x/\sqrt{2} - y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = -1/\sqrt{2} < 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $-\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

- Caso IV): $det(A) = -1$, $traza(A) = -1$. Se trata de una simetría compuesta con un giro de ángulo α verificando: $2cos(\alpha) - 1 = -1$, es decir $cos(\alpha) = 0$. Por tanto un giro de $\pm\pi/2$. El semieje de giro es un autovector asociado al autovalor -1:

$$(T + Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0,0,0) \iff x/2 - y/2 + z/\sqrt{2} = 0, \quad -x/\sqrt{2} + y/\sqrt{2} - z = 0.$$

Un vector cumpliendo ambas ecuaciones es $(1,1,0)$. Para saber el signo del ángulo tomamos otro vector cualquiera $(1,0,0)$ y comprobamos la orientación de la base:

$$B = \{(1,1,0),(1,0,0),t(1,0,0)\} = \{(1,1,0),(1,0,0),(1/2,-1/2,-1/\sqrt{2})\}.$$

Se tiene:

$$det(M_{CB}) = 1/\sqrt{2} > 0.$$

Por tanto se trata de un giro de $\pi/2$ respecto al semieje generado por $(1,1,0)$, compuesto con una simetía respecto al plano ortogonal al semieje: $S_{-1}^{\perp} = \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-1,0)\}$.

12.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $traza(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.*

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $Traza = 3$ si la aplicación es la identidad.

- $Traza = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.

- $Traza = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.

- $Traza = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.

- $-1 < traza = 1 + 2cos(A) < 3$ y $traza \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.

- $-3 < traza = -1 + 2cos(A) < 1$ y $traza \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $traza(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2cos(A) = 2 \quad \Rightarrow \quad cos(A) = 1/2 \quad \Rightarrow \quad A = \pi/3.$$

ÁLGEBRA LINEAL II — Problemas adicionales

Transformaciones ortogonales (Curso 2011–2012)

I.– *Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B', en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vecor $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_e\}$ tienen la misma orientación que la base B:

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_1\| = 1.$$
$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$
$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \quad \Rightarrow \quad \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\pi/3) & -sin(\pi/3) \\ 0 & sin(\pi/3) & cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & ' & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M^{-1}_{BB''}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1-\sqrt{3}}{2} & \dfrac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

III.– *Sea $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:*

- $f(1,0,0) = (-1,0,0)$.
- $det(F_{CC}) = -1$.
- $traza(F_{CC}) = 1$.

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $traza(F_{CC}) = 1$ y $det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1. Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1,0,0) = (-1,0,0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x,y,z) \in R^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0),(0,0,1)\}.$$

IV.– *Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitaria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:*

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = -1$ y $traza(T) = 0$;

- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} cos(A) & -sin(A) \\ sin(A) & cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $det(T) = 1$ y $traza(T) = 2cos(A)$.

(i) $|traza(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $traza(T) = 0$ ó $|traza(T)| = |2cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

(ii) *Si $traza(T) = 2$ entonces $T = Id$.*

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $traza(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

(iii) *Si $det(T) = -1$ entonces $traza(T) = 0$.*

VERDADERO. Si $det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $traza(T) = 0$.

(iv) *Si* $traza(T) = 0$ *entonces* $det(T) = -1$.

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A = \pi/2$ tenemos $traza(T) = 2cos(\pi/2) = 0$, pero $det(T) = 1$.

V.– *En* $\mathbb{R}^2$ *con el producto escalar usual, hallar cuando sea posible, las ecuaciones de una transformación ortogonal directa que lleve el vector* $(3,4)$ *en el vector:*

a) $(2,6)$.

b) $(4,3)$

Las tranformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ directas son los giros. Además recordemos que una transformación ortogonal debe de conservar el módulo de los vectores. Comenzamos comprobando si el vector inicial y su candidato a vector transformado tienen el mismo módulo:

$$\|(3,4)\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$$

$$\|(2,6)\| = \sqrt{2^2+6^2} = 2\sqrt{10}$$

$$\|(4,3)\| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$$

Concluimos que:

a) No existe ninguna transformación ortogonal que lleve $(3,4)$ en $(2,6)$ porque ambos vectores no tienen el mismo módulo.

b) Podemos construir un giro que lleve el vector $(3,5)$ en el $(4,3)$, porque ambos tienen el mismo módulo. Sabemos que la matriz de giro respecto de la base canónica y es de la forma:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix}.$$

El ángulo α de giro cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{(3,4)\cdot(4,3)}{\|(3,4)\|\|4,3\|} = \frac{24}{25}.$$

Entonces:

$$sin(\alpha) = \pm\sqrt{1-cos(\alpha)^2} = \pm\frac{7}{25}$$

Por tanto la matriz de giro es una de estas dos:

$$A = \begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}, \qquad \text{ó} \qquad B = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}.$$

Comprobamos cual de las dos es la que buscamos teniendo en cuenta que nuestra dicha de giro T ha de cumplir:

$$T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Se tiene:

$$\begin{pmatrix} 24/25 & -7/25 \\ 7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{44}{25} \\ \frac{117}{25} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Así la transformación ortogonal pedida viene dada por las ecuaciones:

$$t(x,y) = \begin{pmatrix} 24/25 & 7/25 \\ -7/25 & 24/25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{24x+7y}{25} \\ \dfrac{-7x+24y}{25} \end{pmatrix}.$$

VI.– *En $\mathbb{R}^2$ y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de $\vec{e}_1$ es 1 y el de $\vec{e}_2$ es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector $\vec{e}_1$ en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.*

Sea F la matriz del endomorfismo y G la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que F sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G = F^t G F$$

Sabemos:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}; \qquad F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\|\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2\| = \|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 1 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

Ahora la condición $G = F^t G F$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25}\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= 49 - 28 - 28 + 32 \\ -25 &= 3\alpha + \beta \\ 50 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha = -8 \text{ y } \beta = -1; \qquad \text{ó} \qquad \alpha = -6 \text{ y } \beta = -7;$$

Veamos cada una de ellas:

- Caso I: $F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = 1$$

y por tanto dado que $F \neq Id$ y $F \neq -Id$ se trata de un giro. y la traza es:

$$traza(F) = 6/5.$$

Por tanto el ángulo α cumple:

$$cos(\alpha) = traza(F)/2 = 3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B = \{(1,0), F(1,0)\} = \{(1,0), (7/5, 4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $+arc\,cos(3/5)$.

- Caso II: $F = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$(F' - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3,1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

VII.– *En* $\mathbb{R}^3$ *consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea* B *una base de* $\mathbb{R}^3$ *dada por:*

$$B = \{(1,1,0),(0,1,0),(0,0,1)\},$$

y f *el endomorfismo de* $\mathbb{R}^3$ *cuya matriz asociada con respecto a la base* B *es:*

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) *Probar que* f *es una transformación ortogonal.*

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C:

$$F_{CC} = M_{CB} F_{BB} M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es un base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot {F_{CC}}^t = Id$.

(b) *Clasificar razonadamente* f*, indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.*

Vemos que:

$$det(F) = -1; \qquad traza(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^{\perp}$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$cos(\alpha) = (traza(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1}:

$$S_{-1} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | \, x = 0, \, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0,1,0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0,1,0),(1,0,0), f(1,0,0)\} = \{(0,1,0),(1,0,0),(3/5,0,4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0,1,0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VIII.– *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B. Determinar e interpretar geométricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raiz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1. Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

(i) $cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

(ii) $cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respecivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

IX.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x, y, z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\| \|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\| \|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det\begin{pmatrix} -3 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4 & 3 & 0\end{pmatrix} > 0 \quad\Rightarrow\quad \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3,0,4),(4,0,3),(0,1,0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5,0,4/5),(4/5,0,3/5),(0,1,0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & cos(90) & -sin(90)\\ 0 & sin(90) & cos(90)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB}G_BM_{BC} = M_{CB}G_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}G_BM_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 4/5 & 3/5 & 0\end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25\\ 4/5 & 0 & 3/5\\ -12/25 & -3/5 & 16/25\end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix} = G_C\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25\\ 4x/5 + 3z/5\\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25\end{pmatrix}.$$

X.– *Determinar si el endomorfismo de* $\mathbb{R}^2$ *cuya matriz respecto a un base ortonormal es:*

$$A = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A\cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha)\\ sin(\alpha) & -cos(\alpha)\end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha) & 0\\ 0 & cos^2(\alpha)+sin^2(\alpha)\end{pmatrix} = Id.$$

Para clasificarla observamos que $det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(cos(\alpha) - 1) + ysin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(sin(\alpha), 1 - cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} sin(\alpha) &= 2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2). \\ 1 - cos(\alpha) &= 1 - cos^2(\alpha/2) + sin^2(\alpha/2) = 2sin^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2sin(\alpha/2)cos(\alpha/2), 2sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (cos(\alpha/2), sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX.

(Examen final, junio 2006)

XI.– *En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α. Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.*

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(cos(\alpha), sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-sin(\alpha), cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} = (cos(\alpha), sin(\alpha), 0), (-sin(\alpha), cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B. La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ -sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & -cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) & 0 \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)