

1.— Se considera el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ referido a una base ortonormal. Obtener la expresión matricial en esta base de:

(a) la simetría ortogonal con respecto al subespacio $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$;

Calculamos una base del subespacio ortogonal a $\mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$:

$$(x, y, z) \cdot (1, 1, 1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z = 0 \Rightarrow \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}^\perp = \mathcal{L}\{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$$

La matriz de la simetría en la base $B = \{(1, 1, 1), (1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ es:

$$S_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(**Observación:** Para las *simetrías* no es necesario que la base que se utiliza sea *ortonormal*, basta tomar una base cualquiera formada por bases arbitrarias de la dirección con respecto a la cual se hace la simetría y su subespacio ortogonal. Sin embargo para los *giros* si hay que escoger una base *ortonormal*.)

Para calcular la matriz en la base inicial hacemos el cambio de base:

$$\begin{aligned} S_{CC} &= M_{CB} S_{BB} M_{CB}^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & -1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & -1/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2.— En $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar usual y la orientación dada por la base canónica. Calcular las ecuaciones del giro de 45 grados y semieje generado por el vector $(1, 1, 1)$.

Buscamos una base ortonormal bien orientada en la cual el primer vector tenga la misma dirección y sentido que el semieje de giro:

$$\bar{u}_1 = \frac{(1, 1, 1)}{\|(1, 1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1).$$

Los vectores perpendiculares a $\bar{u}_1$ cumplen:

$$(x, y, z)(1, 1, 1) = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Tomamos el vector $(1, -1, 0)$ verificando esta ecuación. Buscamos un tercero perpendicular a ambos:

$$\begin{aligned} (x, y, z)(1, 1, 1) &= 0 \iff x + y + z = 0 \\ (1, -1, 0)(x, y, z) &= 0 \iff x - y = 0 \end{aligned}$$

Escogemos el vector $(1, 1, -2)$. Normalizados quedan:

$$\bar{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1), \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \quad \bar{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2).$$

Comprobamos que está bien orientada:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

En la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz del giro es:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(45) & \sin(45) \\ 0 & -\sin(45) & \cos(45) \end{pmatrix}.$$

Ahora basta cambiarla de base. Tenemos en cuenta que por ser la base canónica y la base B ortonormales, la matriz de cambio de base es ortogonal, es decir $M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$. Queda entonces:

$$T_{CC} = M_{CB}T_{BB}M_{BC} = M_{CB}T_{BB}M_{CB}^t,$$

con

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \end{pmatrix}, \quad T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$M_{CC} = \begin{pmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} & \frac{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{3}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{6} & \frac{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}}{6} \\ \frac{6}{2-\sqrt{6}-\sqrt{2}} & \frac{3}{2+\sqrt{6}-\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{3} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

- 5.— En el espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ se considera una transformación $t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada en la base anterior es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostrar que es ortogonal. Hallar sus autovalores y autovectores. Interpretarla geométricamente, considerando la orientación de la base de partida.

Para ver que es ortogonal hay que comprobar que $T^t = T^{-1}$ o equivalentemente que $TT^t = Id$. Pero haciendo el producto se ve inmediatamente que se verifica dicha condición.

Ahora tenemos que:

$$\det(T) = 1, \quad \text{traza}(T) = -1.$$

Se trata por tanto de un giro de ángulo α verificando:

$$1 + 2\cos(\alpha) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \cos(\alpha) = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha = \pi.$$

Es decir un giro de π radianes o equivalentemente una simetría respecto a una recta; tal eje está generado por un autovector asociado al autovalor 1:

$$S_1 = \{(x, y, z) / -x - z = 0; \quad -2y = 0; \} = \mathcal{L}\{(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$$

Concluimos que T es una simetría ortogonal respecto al subespacio $S_1 = \mathcal{L}\{(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})\}$.

- 10.**— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ y con respecto a una base ortonormal, se consideran los subespacios U generado por los vectores $\bar{u}_1 = (1, 2, -2)$ y $\bar{u}_2 = (1, 1, 0)$ y V generado por el vector $\bar{v} = (1, 0, -1)$. Hallar el subespacio vectorial simétrico del V respecto de U .

Para calcular el simétrico del subespacio V basta calcular el simétrico del vector que lo genera.

Método I: Calcularemos la transformación correspondiente a la simetría respecto al espacio U . Para ello necesitamos una base de U (no necesariamente ortonormal) y completarla hasta una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores ortogonales:

$$\begin{aligned}(x, y, z) \cdot (1, 2, -2) &= 0 \iff x + 2y - 2z = 0 \\ (x, y, z) \cdot (1, 1, 0) &= 0 \iff x + y = 0\end{aligned}$$

Por tanto un vector $\bar{u}_3$ ortogonal a $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ es:

$$\bar{u}_3 = (2, -2, -1)$$

Ahora en la base $B = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ la matriz de la simetría es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la transformación en la base canónica, hacemos el cambio de base:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix}$$

Ahora el simétrico del vector que genera V es:

$$\frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 4 \\ 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 4/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$$

Es decir el simétrico de V es el subespacio generado por el vector $(-1, 4, -1)$.

Método II: Calculamos primero la proyección ortogonal de $\bar{v}$ sobre U . Será un vector $\bar{w} \in U$ verificando que $\bar{w} - \bar{v}$ es ortogonal a U . Sea $\bar{w} = a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2$. Basta imponer que $\bar{w} - \bar{v}$ sea ortogonal a los vectores que generan U :

$$\left. \begin{aligned} a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_1 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_1 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_1 \\ a\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 + b\bar{u}_2 \cdot \bar{u}_2 &= \bar{v} \cdot \bar{u}_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} 9a + 3b &= 3 \\ 3a + 2b &= 1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} a &= 1/3 \\ b &= 0 \end{aligned} \right.$$

Por tanto $w = (1/3, 2/3, -2/3)$. Ahora el simétrico de $\bar{v}$ se construye sumando al vector $\bar{w}$ el vector $\bar{w} - \bar{v}$. Queda:

$$2\bar{w} - \bar{v} = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right) - (1, 0, -1) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

y alcanzamos de nuevo el mismo resultado visto en el primer método.

(Examen final, setiembre 2003)

- 12.**— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal en una determinada base de un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3. Se sabe que $\text{traza}(T) = 2$. Justificar que se trata de un giro y dar el correspondiente ángulo del mismo.

Sabemos que al cambiar de base la matriz asociada se conservan el determinante y la traza. Las trazas posibles para una transformación ortogonal en dimensión 3 son:

- $\text{Traza} = 3$ si la aplicación es la identidad.
- $\text{Traza} = 1$ si se trata de una simetría respecto a un plano o un giro.
- $\text{Traza} = -1$ si se trata de una simetría respecto a una recta o un giro ms simetría.
- $\text{Traza} = -3$ si se trata de una simetría respecto al origen.
- $-1 < \text{traza} = 1 + 2\cos(A) < 3$ y $\text{traza} \neq 1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje.
- $-3 < \text{traza} = -1 + 2\cos(A) < 1$ y $\text{traza} \neq -1$ si se trata de un giro de ángulo A respecto a un determinado eje compuesto con una simetría.

En nuestro caso $\text{traza}(T) = 2$. Luego necesariamente se trata de un giro. El ángulo A cumple:

$$1 + 2\cos(A) = 2 \Rightarrow \cos(A) = 1/2 \Rightarrow A = \pi/3.$$

-
- 13.**— Sea T la matriz asociada a una transformación ortogonal $\mathbb{R}^2$ respecto a una base arbitraria. Razonar la veracidad o la falsedad de las siguientes cuestiones:

Observamos primeramente que la traza y determinante de la matriz asociada a un endomorfismo no depende de la base en la que estemos trabajando. Eso es consecuencia de que la semejanza conserva traza y determinante. Por otra parte sabemos que una transformación ortogonal en el plano es:

- O bien una simetría respecto a una recta, y entonces en una cierta base $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y por tanto $\det(T) = -1$ y $\text{traza}(T) = 0$;
- o bien un giro y entonces en una base ortonormal $T_B = \begin{pmatrix} \cos(A) & -\sin(A) \\ \sin(A) & \cos(A) \end{pmatrix}$ y por tanto $\det(T) = 1$ y $\text{traza}(T) = 2\cos(A)$.

- (i) $|\text{traza}(T)| \leq 2$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, bien $\text{traza}(T) = 0$ ó $|\text{traza}(T)| = |2\cos(A)| \leq 2 \cdot 1$.

- (ii) Si $\text{traza}(T) = 2$ entonces $T = Id$.

VERDADERO. Por lo que hemos razonado antes, si $\text{traza}(T) = 2$ necesariamente es un giro de ángulo A verificando $2\cos(A) = 2$. Pero entonces el ángulo A es cero y un giro de cero grados es precisamente la transformación identidad.

- (iii) Si $\det(T) = -1$ entonces $\text{traza}(T) = 0$.

VERDADERO. Si $\det(T) = -1$ hemos visto que se trata de una simetría y por tanto $\text{traza}(T) = 0$.

- (iv) Si $\text{traza}(T) = 0$ entonces $\det(T) = -1$.

FALSO. Por ejemplo si es un giro de ángulo $A = \pi/2$ tenemos $\text{traza}(T) = 2\cos(\pi/2) = 0$, pero $\det(T) = 1$.

(1.1 puntos)

I.— Sea V un espacio vectorial euclídeo. Sea $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ una base de V que define la orientación positiva. La matriz de Gram del producto escalar en la base B es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcular respecto a la base dada la matriz de giro de ángulo $\pi/3$ respecto al semieje generado por el vector $(1, 0, 0)$

Construiremos una base ortonormal B' , en la que el primer vector coincida con el semieje de giro. Tomamos:

$$\bar{u}_1 = (1, 0, 0)_B.$$

Ahora buscamos vectores ortogonales a él:

$$(x, y, z)G_B(1, 0, 0)^t = 0 \iff x = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_2 = (0, 1, 0)$ y buscamos un vector cumpliendo esta ecuación y además ortogonal a $\bar{u}_2$:

$$(x, y, z)G_B(0, 1, 0)^t = 0 \iff 2y + z = 0.$$

Escogemos el vector $\bar{u}_3 = (0, -1, 2)$. Comprobemos si $B' = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$ tienen la misma orientación que la base B :

$$|M_{BB'}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0$$

Vemos que tienen la misma orientación. La base B'' es ortogonal. Normalicémosla dividiendo cada vector por su norma:

$$\|\bar{u}_1\|^2 = (1, 0, 0)G_B(1, 0, 0)^t = 1 \Rightarrow \|\bar{u}_1\| = 1.$$

$$\|\bar{u}_2\|^2 = (0, 1, 0)G_B(0, 1, 0)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_2\| = \sqrt{2}.$$

$$\|\bar{u}_3\|^2 = (0, -1, 2)G_B(0, -1, 2)^t = 2 \Rightarrow \|\bar{u}_3\| = \sqrt{2}.$$

En definitiva tomamos la base $B'' = \{(1, 0, 0), (0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})\}$. La matriz de giro en dicha base será:

$$T_{B''B''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\pi/3) & -\sin(\pi/3) \\ 0 & \sin(\pi/3) & \cos(\pi/3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Sólo resta hacer un cambio de base:

$$T_{BB} = M_{BB''}T_{B''B''}M_{B''B},$$

donde

$$M_{BB''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

y $M_{B''B} = M_{BB''}^{-1}$. Operando queda:

$$T_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{3}}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \sqrt{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

(Segundo parcial, junio 2006)

II.— En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica escoger un semieje de giro y un ángulo de giro que lleve los semiejes positivos OX, OY, OZ en, respectivamente, los semiejes positivos OY, OZ, OX .

Los semiejes positivos OX, OY, OZ están generados respectivamente por los vectores de la base canónica $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$. La transformación ortogonal t que nos piden cumple:

$$t(e_1) = e_2, \quad t(e_2) = e_3, \quad t(e_3) = e_1.$$

Por tanto su matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Verifica que $\det(T) = 1$ y $\text{traza}(T) = 0$. Se trata por tanto de un giro de ángulo α dado por:

$$2\cos(\alpha) + 1 = 0 \Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{-1}{2} \Rightarrow \alpha = \pm \frac{2\pi}{3}.$$

El semieje de giro viene dado por un autovector asociado al 1:

$$(T - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \iff -x + z = 0, \quad x - y = 0 \iff (x, y, z) \in \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Finalmente decidimos el signo del ángulo de giro. Nos fijamos en la orientación de $\{(1, 1, 1), (1, 0, 0), t(1, 0, 0) = (0, 1, 0)\}$:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 > 0.$$

Se trata de un giro de ángulo $\frac{2\pi}{3}$ y semieje generador por $(1, 1, 1)$.

III.— Sea $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación ortogonal con respecto al producto escalar usual. Clasificarla indicando, si procede, el ángulo de giro y/o subespacio de simetría, sabiendo que:

$$- f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0).$$

$$- \det(F_{CC}) = -1.$$

$$- \text{traza}(F_{CC}) = 1.$$

Teniendo en cuenta que las matrices asociadas a un mismo endomorfismo pero respecto de bases diferentes tienen la misma traza y el mismo determinante, sabemos que podemos clasificar la transformación ortogonal con los datos dados.

Como $\text{traza}(F_{CC}) = 1$ y $\det(F_{CC}) = -1$ vemos que se trata de una simetría respecto de un plano, de manera que respecto a una base adecuada la matriz asociada sería:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

El plano es perpendicular al autovector asociado al -1 . Pero tal autovector nos lo dan en el enunciado ya que $f(1, 0, 0) = (-1, 0, 0)$. Por tanto el plano de simetría es:

$$\{(x, y, z) \in R^3 | (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

V.— En $\mathbb{R}^2$ y en una base orientada $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$, tal que el módulo de $\vec{e}_1$ es 1 y el de $\vec{e}_2$ es $\sqrt{2}$. Hallar todas las transformaciones ortogonales que transforman el vector $\vec{e}_1$ en el vector $\frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2$.

Sea F la matriz del endomorfismo y G la matriz de Gram, ambas con respecto a la base dada. Para que F sea ortogonal se ha de cumplir:

$$G = F^t G F$$

Sabemos:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & b \\ b & 2 \end{pmatrix}; \quad F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

En particular ha de cumplirse que:

$$\left\| \frac{7}{5}\vec{e}_1 + \frac{4}{5}\vec{e}_2 \right\| = \|\vec{e}_1\|$$

y por tanto

$$\begin{pmatrix} \frac{7}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} G \begin{pmatrix} \frac{7}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow b = -1$$

Ahora la condición $G = F^t G F$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{25} \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & \alpha \\ 4 & \beta \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} 25 &= 49 - 28 - 28 + 32 \\ -25 &= 3\alpha + \beta \\ 50 &= \alpha^2 - 2\alpha\beta + 2\beta^2 \end{aligned}$$

de donde resultan dos soluciones:

$$\alpha = -8 \text{ y } \beta = -1; \quad \text{ó} \quad \alpha = -6 \text{ y } \beta = -7;$$

Veamos cada una de ellas:

- **Caso I:** $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -8 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = 1$$

y por tanto dado que $F \neq Id$ y $F \neq -Id$ se trata de un giro. y la traza es:

$$\text{traza}(F) = 6/5.$$

Por tanto el ángulo α cumple:

$$\cos(\alpha) = \text{traza}(F)/2 = 3/5.$$

Para ver el signo que ha de tomarse comprobamos la orientación de:

$$B = \{(1, 0), F(1, 0)\} = \{(1, 0), (7/5, 4/5)\}.$$

Vemos que:

$$|M_{CB}| = 4/5 > 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $+\arccos(3/5)$.

- **Caso II:** $F = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 7 & -6 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Su determinante es:

$$\frac{1}{25}(-49 + 24) = -1$$

y por tanto se trata de una simetría ortonormal. El eje de simetría corresponde al espacio característico asociado al autovalor $\lambda = 1$:

$$(F' - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff 2x - 6y = 0 \iff S_1 = \mathcal{L}\{(3, 1)\}$$

(Examen final, junio 2004)

VI.— En $\mathbb{R}^3$ consideramos el producto escalar usual y la orientación determinada por la base canónica. Sea B una base de $\mathbb{R}^3$ dada por:

$$B = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\},$$

y f el endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada con respecto a la base B es:

$$F_{BB} = \begin{pmatrix} 3/5 & -8/5 & 4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ -4/5 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

(a) Probar que f es una transformación ortogonal.

Para manejar mas comodamente f primero escribimos su matriz con respecto a una base ortonormal. En particular con respecto a la base canónica C :

$$F_{CC} = M_{CB}F_{BB}M_{BC},$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1}.$$

Operando obtenemos:

$$F_{CC} = \begin{pmatrix} 3/5 & 0 & -4/5 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ahora dado que C es una base ortonormal basta comprobar que $F_{CC} \cdot F_{CC}^t = Id$.

(b) Clasificar razonadamente f , indicando los subespacios de simetría y/o semieje y ángulo de giro.

Vemos que:

$$\det(F) = -1; \quad \text{traza}(F) = 1/5.$$

Se trata de una simetría respecto al plano $S_{-1}^\perp$ compuesto con un giro de eje S_{-1} y ángulo α verificando:

$$\cos(\alpha) = (\text{traza}(F) + 1)/2 = 3/5.$$

Tomamos como semieje de giro un vector de S_{-1} :

$$S_{-1} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (F_{CC} + 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, z = 0\}.$$

por ejemplo $(0, 1, 0) \in S_{-1}$.

Para saber si el ángulo es positivo o negativo basta comprobar el signo del determinante de la matriz de cambio de base de la base B a la canónica, donde:

$$B = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), f(1, 0, 0)\} = \{(0, 1, 0), (1, 0, 0), (3/5, 0, 4/5)\}$$

y

$$|M_{CB}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 3/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix} = -4/5 < 0$$

Por tanto el ángulo de giro es $-\arccos(3/5)$ y el semieje del giro $(0, 1, 0)$.

(Examen final, diciembre 2005)

VII.— *Se considera un espacio vectorial euclídeo V de dimensión 3, con la orientación correspondiente a una base B . Determinar e interpretar geoméricamente todas las transformaciones ortogonales no diagonalizables definidas en V y cuya matriz en la base B tenga traza nula.*

Sea T la matriz de una transformación ortogonal de V en la base ortonormal dada $B = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$. Como el espacio vectorial V tiene dimensión 3, el polinomio característico de T tiene grado 3. Por tanto necesariamente hay al menos una raíz real. Por ser T ortogonal esta corresponde a un autovalor 1 o -1 . Además como suponemos que la transformación no es diagonalizable hay un único autovalor real. Deducimos que la matriz de la transformación es de la forma:

$$\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Si la traza es 0 se verifica que $\pm 1 + 2\cos(\alpha) = 0$. Puede haber dos casos:

- (i) $\cos(\alpha) = -1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 120 grados. La matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a un giro de 120 grados o -120 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

- (ii) $\cos(\alpha) = 1/2$ y entonces α es un ángulo de ± 60 grados. Ahora, la matriz de la transformación puede ser:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix} \text{ ó } \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por $\bar{v}_2, \bar{v}_3$ compuesta con un giro de 60 grados o -60 grados respectivamente, respecto al vector $\bar{v}_1$.

VIII.— *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V .*

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \quad V = \mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}.$$

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el semieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4, 0, 3)$ y de la segunda $v = (0, 1, 0)$. El ángulo que forman cumple:

$$\cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(4, 0, 3) \cdot (0, 1, 0)}{\|(4, 0, 3)\|\|(0, 1, 0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4, 0, 3) \times (0, 1, 0) = (-3, 0, 4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3, 0, 4)$ ó $(3, 0, -4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v , si tomamos como semieje el generado por $(-3, 0, 4)$ la base:

$$\{(-3, 0, 4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$\det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3, 0, 4), (4, 0, 3), (0, 1, 0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(90) & -\sin(90) \\ 0 & \sin(90) & \cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$G_C = M_{CB} G_B M_{BC} = M_{CB} G_B M_{CB}^{-1} = M_{CB} G_B M_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$G_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = G_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

IX.— Determinar si el endomorfismo de $\mathbb{R}^2$ cuya matriz respecto a una base ortonormal es:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

es una transformación ortogonal. En caso afirmativo clasificarla, indicando, si es un giro, el correspondiente ángulo y si es una simetría, el correspondiente eje.

Teniendo en cuenta que A es la matriz asociada a un endomorfismo respecto a una base ortogonal, una condición necesaria y suficiente para que corresponda a una transformación ortogonal es que:

$$A \cdot A^t = Id.$$

Vemos que efectivamente se cumple:

$$\begin{aligned} A \cdot A^t &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) & 0 \\ 0 & \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) \end{pmatrix} = Id. \end{aligned}$$

Para clasificarla observamos que $\det(A) = -1$. Por tanto se trate de una simetría respecto al subespacio de autovectores asociados al 1.

$$(A - Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \iff x(\cos(\alpha) - 1) + y\sin(\alpha) = 0.$$

Un vector que cumpla esta ecuación generará el eje:

$$(\sin(\alpha), 1 - \cos(\alpha)).$$

Observación: Puede expresarse esta dirección de forma más clarificadora. Tenemos en cuenta que:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= 2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2). \\ 1 - \cos(\alpha) &= 1 - \cos^2(\alpha/2) + \sin^2(\alpha/2) = 2\sin^2(\alpha/2). \end{aligned}$$

Por tanto la dirección anterior esta generada por el vector:

$$(2\sin(\alpha/2)\cos(\alpha/2), 2\sin^2(\alpha/2)) \quad \text{paralelo a} \quad (\cos(\alpha/2), \sin(\alpha/2)).$$

Esto significa que el eje de simetría forma un ángulo de $\alpha/2$ con el eje OX .

(Examen final, junio 2006)

X.— En $\mathbb{R}^3$ se consideran dos vectores independientes $\bar{v}$ y $\bar{u}$ que forman entre sí un ángulo α . Demostrar que la composición de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{v}$ y de la simetría respecto del subespacio generado por $\bar{u}$ es un giro, indicando la dirección del eje y el ángulo.

En primer podemos suponer que ambos vectores tienen norma 1, ya que esto no influye a la hora de definir las simetrías. En concreto podemos tomar una base ortonormal $B = \{(\bar{v}, \bar{e}_2, \bar{e}_3)\}$. De manera que $\bar{u} \in \mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Trabajaremos con coordenadas contravariantes en esta base. Como $\bar{u}$ forma un ángulo α con $\bar{v}$, las coordenadas de $\bar{u}$ son $(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0)$.

Ahora en la base B la primera simetría tiene por matriz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para calcular la matriz de la segunda simetría tomamos primero un vector normal ortogonal a $\bar{u}$ que esté en $\mathcal{L}\{\bar{v}, \bar{e}_2\}$. Por ejemplo, $(-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0)$. Consideramos la base $B' = \{\bar{u} =$

$(\cos(\alpha), \sin(\alpha), 0), (-\sin(\alpha), \cos(\alpha), 0), e_3 = (0, 0, 1)\}$. Tiene la misma orientación que B . La matriz de la segunda simetría en esta segunda base es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nos interesa expresarla en la base inicial. Hagamos el cambio de base:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ahora componemos ambas:

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \\ & \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y vemos que queda precisamente la composición de dos giros de α grados, es decir, obtenemos un giro de 2α grados respecto al vector $\bar{e}_3$ ortogonal al espacio generado por $\bar{u}$ y $\bar{v}$.

(Segundo parcial, junio 2002)
