2.– *Considerando en* $\mathbb{R}^3$ *el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.*

La matriz G_C es por definición la que en la fila i columna j tiene la imagen del vector i con el vector j de la base canónica. Dado que $(G_C)_{1,3} = 0$ se tiene que:

$$\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{e_3} = 0.$$

y por tanto $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ son ortogonales.

(ii) *Dado* $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ *calcular una base de su subespacio ortogonal* $U^{\perp}$.

En primer lugar entre los generadores de U eliminamos los vectores dependientes escalonando la matriz que forman sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)H_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $U = \mathcal{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Ahora calculamos $U^{\perp}$:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (1,1,0)\cdot(x,y,z) = 0, \quad (0,0,1)\cdot(x,y,z) = 0\}$$

donde:

$$(1,1,0)\cdot(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 3y + z$$

$$(0,0,1)\cdot(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + 3z$$

y:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y + z = 0, \quad y + 2z = 0\}$$

Resolvemos el sistema:

$$y = -2z, \qquad x = \frac{1}{2}(-3y - z) = \frac{1}{2}(6z - z) = \frac{5}{2}z$$

de donde:

$$U^{\perp} = \mathcal{L}\{(5/2, -2, 1)\} = \mathcal{L}\{(5, -4, 2)\}.$$

(iii) *Hallar una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$.

Una base ortonormal B se caracteriza porque la matriz de Gram respecto a la misma es la identidad. Entonces diagonalizamos por congruencia la matriz G_C hasta llegar a Id y hallamos la correspondiente matriz de paso por columnas que será M_{CB}:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

La base ortonormal resulta $B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, -1, 1)\}$.

(iv) *Calcular el ángulo que forman los vectores* $(1, 0, 0)$ *y* $(0, 1, 0)$.

Se tiene que:

$$ang((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = arcos \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 1, 0\|},$$

donde:

$$(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|(1, 0, 0)\| = \sqrt{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|(0, 1, 0)\| = \sqrt{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

Finalmente:

$$ang((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = arcos \frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 1, 0\|} = arcos \frac{1}{\sqrt{2}} = arcos \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o,$$

5.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera un producto escalar* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *cumpliendo:*

- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$ *y* $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *son ortogonales.*

- Los vectores $(1, 1, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$ *forman un ángulo de* $\pi/3$.

- Los tres vectores anteriores son unitarios.

(i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.

Consideramos la base formada por los tres vectores sobre los cuales tenemos información:

$$B = \{u_1 = (1, 0, 1), u_2 = (1, 1, 0), u_3 = (0, 0, 1)\}$$

Forman base porque tenemos tantos vectores como la dimensión del espacio $\mathbb{R}^3$ y además son independientes porque la matriz formada por sus coordenads tiene rango 3.

Por definición de matriz de Gram:

$$G_B = \begin{pmatrix} u_1 \cdot u_1 & u_1 \cdot u_2 & u_1 \cdot u_3 \\ u_2 \cdot u_1 & u_2 \cdot u_2 & u_2 \cdot u_3 \\ u_3 \cdot u_1 & u_3 \cdot u_2 & u_3 \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

De la ortogonalidad indicada en el primer apartado sabemos que $u_1 \cdot u_2 = u_1 \cdot u_3 = 0$. Del hecho de ser unitarios sabemos que $u_1 \cdot u_1 = u_2 \cdot u_2 = u_3 \cdot u_3 = 1$.

Por último usamos el dato del ángulo:

$$u_2 \cdot u_3 = \|u_2\|\|u_3\|cos(\pi/3) = \frac{1}{2}.$$

De todo esto deducimos que:

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente la pasamos a la base canónica:

$$G_C = (M_{BC})^t G_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = (M_{CB})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

$$G_C = \begin{pmatrix} 2 & -5/2 & -1 \\ -5/2 & 4 & 3/2 \\ -1 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$ respecto al producto escalar dado.*

En primer lugar calculamos una base de U eliminando los posibles vectores dependientes entre sus generadores:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(0,0,1)\}$. Ahora:

$$\begin{aligned} U^\perp &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(1,1,1) = 0,\ (x,y,z)\cdot(0,0,1) = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)G_c(1,1,1)^t = 0,\ (x,y,z)\cdot(0,0,1)^t = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | -\frac{3}{2}x + 3y + \frac{3}{2}z = 0,\ -x + \frac{3}{2}y + z = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0,\ x - z = 0\} = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}. \end{aligned}$$

6.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera la forma bilineal simétrica cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) *Demostrar que f es un producto escalar.*

Un producto escalar es una forma bilineal simétrica definida positiva. En el enunciado ya partimos de una forma bilineal simétrica así que sólo tenemos que comprobar que es definida positiva. Lo hacemos por el Criterio de Sylvester:

$$det\,(\,1\,) = 1 > 0, \quad det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1 > 0, \quad det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = 4 > 0$$

(ii) *Sea* $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$. *Respecto al producto escalar definido por* f*:*

(ii.a) *Hallar una base ortogonal de* U *por el método de Gram Schdmit.*

Primero hallamos una base cualquiera del subespacio pasando de implícita a paramétricas:

$$x+y+z=0 \quad \Longleftrightarrow \quad z=-x-y \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x=a \\ y=b \\ z=-a-b \end{cases}$$

de donde $U = \{(1,0,-1),(0,1,-1)\}$.

Entonces por Gram Schmidt, el primer vector lo dejamos igual $v_1 = (1,0,-1)$. El segundo es de la forma:

$$v_2 = (0,1,-1) + k(1,0,-1) \text{ cumpliendo } v_1 \cdot v_2 = 0.$$

de donde:

$$k = -\frac{(1,0,-1)\cdot(0,1,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = -\frac{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = -\frac{5}{6}$$

y

$$v_2 = (0,1,-1) - \frac{5}{6}(1,0,-1) = \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)$$

La base ortogonal queda:

$$\left\{(1,0,-1), \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{1}{6}\right)\right\}.$$

(ii.b) *Calcular las ecuaciones paramétricas de* $U^\perp$.

El espacio ortogonal $U^\perp$ está generado por los vectores perpendiculares a los generadores de U:

$$U^\perp = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (x,y,z)\cdot(1,0,-1) = 0, \quad (x,y,z)\cdot(0,1,-1) = 0\}$$

Planteamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 5z = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x + y - 4z = 0$$

Resolviendo:

$$x = 5z, \qquad y = 4z - x = -z$$

de donde

$$x = 5\lambda, \quad y = -\lambda, \quad z = \lambda$$

(iii.c) *Hallar la proyección ortogonal del vector* $(1,1,1)$ *sobre* U.

La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre U es un vector $u \in U$ tal que $(1,1,1) - u \in U^\perp$. Entonces:

$$u = a(1,0,-1) + b(0,1,-1) = (a, b, -a-b)$$

y

$$(1,1,1) - u = (1-a, 1-b, 1+a+b)$$

Imponemos que cumpla las ecuaciones de $U^\perp$ halladas en el apartado anterior:

$$(1-a) - 5(1+a+b) = 0$$
$$1 - a + 1 - b - 4 - 4a - 4b = 0$$

Resolviendo se obtiene $a = -2$ y $b = 8/5$ y así:

$$u = (-2, 8/5, 2/5).$$

8.– *Dada la matriz simétrica* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *hallar una matriz* P *ortogonal* ($P^{-1} = P^t$) *tal que* $P^{-1}AP$ *sea una matriz diagonal.*

Dado que A es simétrica sabemos que podemos diagonalizarla ortogonalmente, es decir, respecto a una base ortonormal; equivalentemente encontrar una matriz P ortogonal tal que $P^{-1}AP = P^tAP$ es diagonal.

Los pasos son:

- Calcular los autovalores.

- Calcular los autovectores.

- Los autovectores asociados a autovalores distintos son ortogonales; los asociados al mismo autovalor hay que ortogonalizarlos por Gram-Schmidt.

- Finalmente normalizamos la base ortgonal de autovectores dividiendo cada uno de ellos por su norma.

Comencemos calculando el polinomio caraterístico:

$$p_A(\lambda) = det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 3-\lambda & 3-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda) det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(3-\lambda).$$

Los autovalores son sus raíces.

$\lambda_1 = 0$ con multiplicidad algebraica 2.

$\lambda_2 = 3$ con multiplicidad algebraica 1.

Por ser simétrica sabemos que algebraicas y geométricas coinciden. Calculamos los autovectores.

Asociados a $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0.$$

Pasando de implícitas a paramétricas obtenemos:

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = -\alpha - \beta$$

y de ahí;

$$S_0 = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

Asociados a $\lambda_2 = 3$:

$$(A - 3 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -2x + y + z = 0, \quad x - 2y + z = 0, \quad x + y - 2x = 0.$$

Eliminando ecuaciones dependientes y resolviendo el sistema obtenemos las paramétricas:

$$x = \alpha, \quad y = \alpha, \quad z = \alpha$$

y de ahí;

$$S_3 = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}.$$

Ortogonalizamos los vectores de $S_0 = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$, por el método de Gram-Schmidt:

$$\vec{u}_1 = (1, 0, -1)$$
$$\vec{u}_2 = (0, 1, -1) + a(1, 0, -1)$$

Imponiendo que $\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 0$ y despejando a:

$$a = \frac{-(1,0,-1)\cdot(0,1,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = \frac{-1}{2}.$$

de donde $\vec{u}_2 = (0,1,-1) - (1/2)(1,0,-1) = (-1/2, 1, -1/2)$.

Entonces $S_0 = \mathcal{L}\{(1,0,-1), (-1/2,1,-1/2)\}$ y:

$$B = \{\underbrace{(1,0,-1), (-1/2,1,-1/2)}_{S_0}, \underbrace{(1,1,1)}_{S_3}\}$$

es una base ortogonal. La normalizamos dividiendo cada vector por su norma:

$$\begin{aligned}
\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|} &= (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \\
\frac{(-1/2,1,-1/2)}{\|(1,0,-1)\|} &= (-2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}, -2\sqrt{5}) \\
\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|} &= (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Colocando los tres vectores como columnas de una matriz tenemos:

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{5} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}, con P^{-1}AP = D$$

siendo D la matriz diagonal formada por los autovalores:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

9.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera una forma bilineal* f *cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) *Demostrar que es un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar tiene que ser una forma bilineal, simétrica y definida positiva:

- La bilinealidad es un dato del enunciado.

- La simetría es consecuencia de que la matriz asociada es simétrica.

- Para ver que es definida positiva podemos usar el criterio de Sylvester: debemos de comprobar que los sucesivos determinantes de las k primeras filas y columnas son positivos para $k = 1, 2, 3$:

$$|\,1\,| = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

(ii) *Respecto al producto escalar definido por* f*:*

(ii.a) *Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre* $\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.

Calculamos primero una base del subespacio ortogonal al dado $V = \mathcal{L}\{(1,0,0)\}$:

$$V^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 | (x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0\}$$

donde

$$(x,y,z) \cdot (1,0,0) = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Pasamos de implícitas a paramétricas y luego a generadores:

$$z = -x - y$$

de donde las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a - b$$

y

$$V^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}.$$

Formamos una base con los genedaores de V y $V^{\perp}$:

$$B = \{\underbrace{(1,0,0)}_{V}, \underbrace{(1,0,-1),(0,1,-1)}_{V^{\perp}}\}$$

en esta base sabemos que la matriz de la proyección es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la pasamos a la canónica:

$$P_B = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde} \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii.b) *Hallar una base ortogonal del subespacio* $U = \{(x,y,z) \in \mathrm{I\!R}^3 | x + y + z = 0\}$.

Primero hallamos una base del subespacio. Lo hemos hecho en el apartado anterior ya que coincide con $V^{\perp}$:

$$U = \mathcal{L}\{(1,0,-1),(0,1,-1)\}.$$

Ahora ortogonalizamos la base por el método de Gram-Schmidt.

El primer vector queda igual $v_1 = (1,0,-1)$. Buscamos un segundo vector de la forma:

$$v_2 = (0,1,-1) + a(1,0,-1)$$

Escogemos a exigiendo que sea ortogonal al primero:

$$v_2 \cdot v_1 = 0 \iff (0,1,-1) \cdot (1,0,-1) + a(1,0,-1) \cdot (1,0,-1) = 0 \iff a = \frac{-(0,1,-1) \cdot (1,0,-1)}{(1,0,-1) \cdot (1,0,-1)}$$

Hacemos las cuentas:

$$(0,1,-1)\cdot(1,0,-1) = (\,0 \quad 1 \quad -1\,)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$(1,0,-1)\cdot(1,0,-1) = (\,1 \quad 0 \quad -1\,)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

Resulta:

$$a = \frac{-(0,1,-1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)} = \frac{-4}{4} = -1, \qquad \Rightarrow \quad v_2 = (0,1,-1)-(1,0,-1) = (-1,1,0).$$

La base pedida es:

$$\{(1,0,-1),(-1,1,0)\}$$

13.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y+2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ *sobre el subespacio* U*?.*

Calculamos primero el generador de U (tiene dimensión 1 porque está definido en $\mathbb{R}^3$ por dos ecuaciones implícitas independientes). Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$x = 0, \quad y = -2z$$

obteniendo las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = -2a, \quad z = a$$

de donde $U = \mathcal{L}\{(0,-2,1)\}$

Calculamos ahora una base de $U^{\perp}$; es decir calculamos los vectores (x,y,z) ortogonales a $(0,-2,1)$:

$$(x,y,z)\cdot(0,-2,1) = 0 \iff (\,x \quad y \quad z\,)\,G_C\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff z = 0.$$

Por tanto $U^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Formamos una base con los generadores de U y $U^{\perp}$:

$$B = \{\underbrace{(0,-2,1)}_{U},\underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{U^{\perp}}\}$$

En tal base la matriz de la proyección ortogonal sobre U es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de $(1, 1, 1)$ sobre el subespacio U es:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

I.– *En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:*

(a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.

(b) El subespacio vectorial U, definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en la base B, es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.

(c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2, 2, 0), (2, 0, -1), (0, 2, -1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base B.

De la condición (a) obtenemos:

$$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 3$$

La condición (b) significa que:

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \forall \bar{x} \in U$$

y teniendo en cuenta que una base de U está formada por los vectores $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{e}_1 - \bar{e}_3$, obtenemos:

$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$

De estas dos condiciones deducimos que la matriz es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

La condición (c) significa que:

$$((\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) - 3\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} G \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{Bmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Finalmente utilizando la hipótesis (d) sabemos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\bar{e}_3 \cdot (2, 2, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 = 0 \text{ luego no puede ser.}$$
$$\bar{e}_3 \cdot (2, 0, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$
$$\bar{e}_3 \cdot (0, 2, -1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

Por tanto en principio, hay dos posibilidades para la matriz G:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ ó } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, sabemos que la forma bilineal asociada ha de ser definida positiva (todos los autovalores de la matriz positivos). En particular el determinante ha de ser mayor que cero. Pero $|G_1| = -4$ y $|G_2| = 8$. Luego la matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1998)

II.– *En un espacio vectorial V de dimensión n, se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es A^2, siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f.*

En primer lugar, como A es una matriz simétrica y no singular, entonces A^2 es simétrica y no singular, y por tanto define una forma bilineal simétrica. Si $\bar{v} = v_i\bar{e}_i$ y $\bar{w} = w_i\bar{e}_i$, entonces:

$$f(\bar{v}, \bar{w}) = (v_i)A^2\{w_i\}$$

Para ver que es un producto escalar hay que comprobar que es definida positiva. Sea $\bar{v} = v_i\bar{e}_i \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (v_i)A^2\{v_i\} = (v_i)AA\{v_i\} = (v_i)A((v_i)A)^t$$

Como A es no singular y $\bar{v}$ es no nulo, $(v_i)A = (u_i)$ es un vector no nulo y por tanto:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (u_i)(u_i)^t = \sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 > 0$$

y vemos que f es definida positiva.

Para encontrar una base ortonormal, buscamos una matriz B de cambio de base de manera que, la matriz de Gram en dicha base sea la identidad. Es decir, si

$$(\bar{u}_i) = (\bar{e}_j)B$$

la matriz de Gram de f en la base $\{\bar{u}_i\}$ es:

$$B^tA^2B$$

Para que sea la identidad basta tomar $B = A^{-1}$, ya que entonces, como A es simétrica:

$$B^tA^2B = A^{-t}A^2A^{-1} = A^{-1}A^2A^{-1} = Id$$

Deducimos que una base otonormal es aquella cuyos vectores tienen por coordenadas en la base $\{\bar{e}_i\}$ las columnas de la matriz A^{-1}.

III.– *Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2. Comprobar que:*

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

Primero veamos que $(U_1 + U_2)^\perp \subset U_1^\perp \cap U_2^\perp$:

$$\bar{v} \in (U_1 + U_2)^\perp \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in U_1 + U_2$$

Pero en particular cualquier $\bar{u}_1 \in U_1$ ó $\bar{u}_2 \in U_2$ está en $U_1 + U_2$, luego:

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 & \Rightarrow & v \in U_1^\perp \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 & \Rightarrow & v \in U_2^\perp \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

Ahora veamos que $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subset (U_1 + U_2)^\perp$:

$$v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{lll} \bar{v} \in U_1^\perp & \Rightarrow & \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \\ \bar{v} \in U_2^\perp & \Rightarrow & \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \end{array}\right.$$

Dado cualquier $\bar{u} \in U_1 + U_2$ es de la forma $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ con $\bar{u}_1 \in U_1$ y $\bar{u}_2 \in U_2$. Luego:

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \bar{v}.\bar{u}_1 + \bar{v}.\bar{u}_2 = 0$$

y por tanto $\bar{v} \in (U_1 + U_2)^\perp$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

Utilizando el apartado anterior y que $(U^\perp)^\perp = U$ obtenemos:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = ((U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp)^\perp = ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

IV.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una determinada base* $\{\bar{e}_i\}$ *se definen el producto escalar*

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y - 2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo f *que verifica:* $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. *¿Es* f *un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de* f *sea diagonal.*

La matriz de Gram del producto escalar que nos dan respecto a la base $\{\bar{e}_i\}$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz del endomorifsmo:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

f será simétrico si GF es una matriz simétrica. Y efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Para hallar una base ortonormal, basta tomar una base ortonormal de cada subespacio característico de f. Primero calculamos los autovalores:

$$|F - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

Ahora calculamos los espacios característicos:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2x + 3y \\ 0 = -2y + 2z \end{cases}$$

luego, $S_0 = \mathcal{L}\{(3,-2,-2)\}$

Y para el otro autovalor:

$$(F - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0$$

luego, $S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Ahora los ortonormalizamos utilizando la matriz G. En S_0 basta dividr el vector base por su norma.

$$\|(3,-2,-2)\| = \sqrt{(3,-2,2)G\{3,-2,2\}} = \sqrt{2}$$

En S_2 calculamos $\bar{u} = a(1,0,0) + (0,0,1)$ ortogonal a $(1,0,0)$:

$$a = -\frac{(1,0,0)G\{(0,0,1)\}}{(1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = -1$$

luego $\bar{u} = (-1,0,1)$ y dividimos por las normas:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{((1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = \sqrt{2}$$
$$\|(-1,0,1)\| = \sqrt{(-1,0,1)G\{(-1,0,1)\}} = 1$$

La base que buscamos es:

$$\{(3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1, 0, 1)\}$$

V.– *En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.*

Sea $f : V \longrightarrow V_1$ la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2. Sabemos que:

$$f(v) = v_1, \qquad \text{siendo } v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2.$$

Por otra parte que f sea simétrica significa que:

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v; \qquad \forall u, v \in V$$

- Supongamos que V_1 y V_2 son ortogonales. Entonces sean $u, v \in V$ cualesquiera. Se descomponen como $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$ y $u_2, v_2 \in V_2$. Entonces:

$$u \cdot f(v) = (u_1 + u_2) \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1$$

ya que $v_1 \cdot u_2 = 0$ por ser V_1 y V_2 ortogonales.

De igual forma:

$$f(u) \cdot v = u_1 \cdot (v_1 + v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_1 = u \cdot f(v)$$

y por tanto f es simétrico.

- Recíprocamente supongamos que f es simétrico y veamos que entonces V_1 y V_2 son ortogonales. Sean $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ cualesquiera. Por ser f simétrico:

$$v_1 \cdot f(v_2) = f(v_1) \cdot v_2$$

Pero esto es equivalente a:

$$v_1 \cdot 0 = v_1 \cdot v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \cdot v_2 = 0$$

y tenemos la ortogonalidad de v_1 y v_2.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.– *Dada la matriz $n \times n$ A definida por*

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

A es una matriz simétrica y por tanto se puede interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que entonces existe una base ortonormal en la que la matriz de f es diagonal. Deducimos que A es diagonalizable por semejanza ortogonal (existe C ortogonal, $C^{-1} = C^t$ tal que C^tAC es diagonal).

Para calcular la matriz de paso, basta calcular una base ortonormal de autovectores de cada subespacio característico. Primero calculamos los autovalores:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n-\lambda)$$

Por tanto tenemos el autovalor $\lambda_1 = n$ con mulptiplicidad 1 y el autovalor $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad $n-1$. El espacio característico asociado al autovalor 0 tiene dimensión $n-1$ y esta dado por la ecuación:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

Una base ortogonal del mismo es:

$$\{(1,-1,0,\dots,0,0),(1,1,-2,\dots,0,0),\dots,(1,1,1,\dots,2-n,0),(1,1,1,\dots,1,1-n)\}$$

El subespacio característico asociado al autovalor n es precisamente el ortogonal al anterior, es decir, el generado por el vector $\{(1,1,1,\dots,1,1)\}$.

Divididiendo estos vectores por sus normas obtenemos las filas de la matriz de paso ortogonal que buscamos:

$$\begin{aligned} \|(1,1,1,\dots,1,1)\| &= \sqrt{n} \\ \|(1,-1,0,\dots,0,0)\| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \|(1,1,-2,\dots,0,0)\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ &\vdots \\ \|(1,1,1,\dots,2-n,0)\| &= \sqrt{n-2+(2-n)^2} = \sqrt{n^2-3n+2} \\ \|(1,1,1,\dots,1,1-n)\| &= \sqrt{n-1+(1-n)^2} = \sqrt{n^2-n} \end{aligned}$$

y por tanto la matriz C es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \frac{2-n}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{n^2-n}} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.– *En un espacio euclídeo V se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:*

(a) *Ver si f es lineal.*

Veamos que es lineal. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hay que comprobar que $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) &= (\bar{a}\cdot(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}))\bar{b} - 3(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} + \mu(\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b} - 3\lambda\bar{x} - 3\mu\bar{y} = \\ &= \lambda((\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}) + \mu((\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b} - 3\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y}) \end{aligned}$$

(b) *Determinar los autovalores y autovectores.*

Sea λ un autovalor y $\bar{v}$ un autovector asociado no nulo. Se tiene:

$$\lambda\bar{v} = f(\bar{v}) = (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} - 3\bar{v} \quad\Rightarrow\quad (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} = (\lambda+3)\bar{v}$$

Por tanto hay dos posibilidades:

- $\lambda = -3$ y $\bar{a}\cdot\bar{v} = 0$, es decir, $\bar{v} \in \{\bar{a}\}^{\perp}$, o bien,

- $\bar{v} = \bar{b}$ y $\lambda + 3 = \bar{a}\cdot\bar{b}$.

Es decir si $dim(V) = n$, el autovalor $\lambda_1 = -3$ tiene multiplicidad geométrica $dim(\{\bar{a}\}^{\perp}) = n-1$, ya que el subespacio caracerístico es precisamente $S_{-3} = \{\bar{a}\}^{\perp}$.

Además si $\bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$ aparece otro autovalor $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3$ distinto, cuyo subespacio caracerístico es precisamente $S_{\lambda_2} = \mathcal{L}\{\bar{b}\}$.

(c) *¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?*

Para que sea diagonalizable, la suma de las multiplicidades geométricas han de ser la dimensión de V. Por lo razonado en el apartado anterior, esto ocurre precisamente si $\bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$ ese decir si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son ortogonales.

(d) *Si en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ la matriz de Gram es*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son $(1,2,-1)$ *y* $(2,0,-3)$, *respectivamente, determinar en dicha base la matriz de f, los autovalores y los autovectores.*

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3$. Para calcular este producto, basta calcular las coordenadas contravariantes de $\bar{b}$:

$$G^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3 = (\,1 \quad 2 \quad -1\,)\,\{\,3 \quad 1 \quad -1\,\} - 3 = 3$$

Los autovectores asociados son:

$$\begin{aligned} S_{-3} &= \{\bar{a}\}^{\perp} = \{x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 |\, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} = \mathcal{L}\{\bar{e}_1 + \bar{e}_3, \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3\} \\ S_3 &= \mathcal{L}\{\bar{b}\} = \mathcal{L}\{3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3\} \end{aligned}$$

Por último la imagen de un vector (x,y,z) es:

$$f(x,y,z) = ((x,y,z)\cdot\bar{a})\bar{b} - (3x,3y,3z) = (-2x + 6y - 3z, x - 3y - z, -x - 2y - 2z)$$

La matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1997)

10.– *Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} p : E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f, g) & \longrightarrow & \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx. \end{array}$$

(a) *Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.*

Sabemos que E es un espacio vectorial. Para ver la estrucura euclídea hay que comprobar que p es una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

En primer lugar es claro que es simétrica, porque:

$$p(f, g) = \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\pi g(x)\, f(x)\, dx = p(g, f)$$

Por tanto para ver que es bilineal, basta con comprobar la linealidad en la primera componente. Dadas $f, g, h \in E$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda f + \mu h, g) &= \int_0^\pi (\lambda f + \mu h)(x)\, g(x)\, dx = \int_0^\pi (\lambda f(x) + \mu h(x))\, g(x)\, dx = \\ &= \lambda \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, dx + \lambda \int_0^\pi h(x)\, g(x)\, dx = \lambda p(f, g) + \mu p(h, g) \end{aligned}$$

luego se p es bilineal.

Finalmente veamos que es definida positiva. Dada $f \in E$ se verifica:

$$p(f, f) = \int_0^\pi f(x)\, f(x)\, dx = \lambda \int_0^\pi f(x)^2\, dx \geq 0$$

Además si $f \neq 0$, entonces f es no nula en un entorno del 0 por ser continua, luego:

$$p(f, f) = \int_0^\pi f(x)\, f(x)\, dx = \lambda \int_0^\pi f(x)^2\, dx > 0$$

(b) *Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1, \mathrm{sen}x, \cos x, \mathrm{sen}^2 x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Llamemos f_1, f_2, f_3, f_4 a las cuatro funciones que buscamos. Tomamos $f_1(x) = 1$ y vamos calculando el resto utilizando el método de Gram-Schmidt. Construimos f_2:

$$f_2(x) = \mathrm{sen}x + a_1 f_1(x)$$

de manera que $p(f_2, f_1) = 0$. Por tanto:

$$a_1 = -\frac{p(\mathrm{sen}x, 1)}{p(1, 1)} = -\frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}x\, dx}{\int_0^\pi 1\, dx} = -\frac{2}{\pi} \quad \Rightarrow \quad f_2(x) = \mathrm{sen}x - \frac{2}{\pi}$$

Construimos f_3:

$$f_3(x) = \cos x + b_1 f_1(x) + b_2 f_2(x)$$

de manera que $p(f_3,f_1)=p(f_3,f_2)=0$. Ahora:

$$\left.\begin{array}{l} b_1=-\dfrac{p(\cos x,1)}{p(1,1)}=0 \\ b_2=-\dfrac{p(\cos x,f_2)}{p(f_2,f_2)}=0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f_3(x)=\cos x$$

Y por último f_4:

$$f_4(x)=\operatorname{sen}^2 x+c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$$

con $p(f_4,f_1)=p(f_4,f_2)=p(f_4,f_3)=0$. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} c_1=-\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x,1)}{p(1,1)}=-\dfrac{1}{2} \\ c_2=-\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x,f_2)}{p(f_2,f_2)}=-\dfrac{2\pi}{\pi^2-8} \\ c_3=-\dfrac{p(\operatorname{sen}^2 x,f_3)}{p(f_3,f_3)}=0 \end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad f_4(x)=\operatorname{sen}^2 x-\frac{2\pi}{\pi^2-8}\sin x-\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2-8}$$

IX.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre".*

Es VERDADERO. Sean v,w tales vectores. Si fueran dependientes, como $w\neq 0$, existiría un escalar $\lambda\neq 0$ tal que $w=\lambda v$. Pero entonces, por ser ortogonales,

$$0=v\cdot w=\lambda|v|^2,$$

de donde se derivaría que $v=0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. Así pues, son linealmente independientes y constituyen un sistema libre.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.– *Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2. Sabiendo que $G_1=\lambda G_2$ con $\lambda\in R$, $\lambda>1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.*

Sean u,v dos vectores no nulos. La medida del ángulo que forma se hace mediante la fórmula:

$$cos(u,v)=\frac{u\cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Apliquémosla para cada uno de los productos escalares. Para G_1:

$$cos(u,v)=\frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}.$$

Para G_2:

$$\begin{aligned} cos(u,v)&=\frac{(u)G_2(v)^t}{\|(u)G_2(u)^t\|\|(v)G_2(v)^t\|}=\frac{(u)(\lambda G_1)(v)^t}{\|(u)(\lambda G_1)(u)^t\|\|(v)(\lambda G_1)(v)^t\|}= \\ &=\frac{\lambda(u)G_1(v)^t}{\lambda\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}=\frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} \end{aligned}$$

Luego vemos que ambos coninciden.

En cuanto a las longitudes:

$$\|u\|_1=\sqrt{(u)G_1(u)^t},$$

pero

$$\|u\|_2=\sqrt{(u)G_2(u)^t}=\sqrt{(u)(\lambda G_1)(u)^t}=\lambda\sqrt{(u)G_1(u)^t}=\lambda\|u\|_1.$$

Como $\lambda>1$ vemos que la longitud con el segundo producto escalar es superior a la primera.

(Examen final, septiembre 2008)

XI.– *En el espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:*

$$\begin{array}{ll} f: M_{n\times n}(\mathbb{R})\times M_{n\times n}(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbb{R}, & f(A,B)=traza(AB^t)\\ g: M_{n\times n}(\mathbb{R})\times M_{n\times n}(\mathbb{R})\longrightarrow \mathbb{R}, & g(A,B)=traza(AB)\end{array}$$

(a) *Estudiar si son simétricas.*

Dadas $A,B,\in M_{n\times n}$ veamos la simetría de f:

$$f(A,B)=traza(AB^t)=traza((AB^t)^t)=traza(BA^t)=f(B,A),$$

donde hemos usado que la traza de una matriz coincide con su traspuesta.

Ahora la simetría de g:

$$g(A,B)=traza(AB)=traza(BA)=g(B,A),$$

donde usamos que la traza de AB es la misma que la traza de BA:

$$\begin{aligned} traza(AB)&=\sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{ki}\\ traza(BA)&=\sum_{k=1}^{n}(BA)_{kk}=\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}B_{ki}A_{ik}\end{aligned}$$

(b) *Probar que para $n\geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n=1$?.*

Necesitamos ver que f es definida positiva, es decir, que $f(A,A)>0$ si $A\neq\Omega$. Pero:

$$f(A,A)=traza(A\cdot A^t)=\sum_{i=1}^{n}(AA^t)_{ii}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}(A^t)_{ki}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}A_{ik}^2$$

Como la suma es de cuadrados, es mayor que cero si alguno de los coeficientes A_{ik} es no nulo.

Sin embargo para la aplicación g si tomamos la matriz:

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0\end{pmatrix}$$

se cumple $B\neq 0$:

$$g(B,B)=traza(B^2)=traza(\Omega)=0$$

luego B no es definida positiva.

Si $n=1$ entonces las aplicaciones f y g son en realidad la misma, porque una matriz de dimensión uno coincide con su traspuesta. Por tanto ambas son productos escalares.

(c) *Para $n=2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.*

Si llamamos:

$$A=\begin{pmatrix} x_1 & x_2\\ x_3 & x_4\end{pmatrix},\quad B=A=\begin{pmatrix} y_1 & y_2\\ y_3 & y_4\end{pmatrix}$$

se tiene:

$$g(A,B)=traza(AB)=traza\begin{pmatrix} x_1y_1+x_2y_3 & x_1y_2+x_2y_4\\ x_3y_1+x_4y_3 & x_3y_2+x_4y_4\end{pmatrix}=x_1y_1+x_2y_3+x_3y_2+x_4y_4$$

de donde la matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la signatura la diagonalizamos por congruencia:

$$G \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la signatura es $(3,1)$ y la forma cuadrática asociada a g es no degenerada e indefinida.

(d) *Para $n=2$ y con el producto escalar definido por f, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.*

Consideramoas la base del subespacio de matrices simétrias:

$$\left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lo completamos hasta una base ortogonal de la misma. Buscamos matrices $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tales que:

$$f(X,S_1) = f(X,S_2) = f(X,S_3) = 0.$$

Operando:

$$\begin{array}{rcc} f(X,S_1) = 0 & \iff & x_1 = 0 \\ f(X,S_2) = 0 & \iff & x_2 + x_3 = 0 \\ f(X,S_3) = 0 & \iff & x_4 = 0 \end{array}$$

Por tanto podemos tomar:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base $B = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ la matriz de la proyección ortogonal es:

$$P_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$P_{CC} = M_{CB} P_{BB} M_{BC} = M_{CB} P_{BB} M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) *Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comprobamos si los tres vectores son independientes. Para ello analizamos el rango de la matriz de sus coordenadas respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ttiene rango 2. Por tanto una base de ese subespacio está formada por dos vectores.

Ahora aplicamos GramSchmidt a los vectores:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos:

$$V_1 = U_1, \quad V_2 = \lambda V_1 + U_2,$$

con

$$f(V_1, V_2) = 0 \iff \lambda = -\frac{f(U_2, U_1)}{f(U_1, U_1)} = -\frac{traza(U_2 U_1^t)}{traza(U_1 U_1^t)} = -\frac{-2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Por tanto:

$$V_2 = \frac{2}{5} U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 1 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma:

$$\|V_1\|^2 = f(V_1, V_1) = traza(V_1 V_1^t) = 5, \qquad \|V_2\|^2 = f(V_2, V_2) = traza(V_2 V_2^t) = \frac{1}{5}$$

La base pedida es:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad W_2 = \frac{1}{1/\sqrt{5}} V_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 0 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}.$$

(f) *Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g.*

Observamos que sobre las matrices simétricas f y g actúan igual ya que si B es simétrica $traza(AB) = traza(AB^t)$. Por tanto, la restricción de g al subespcio de matrices simétricas es definida positiva, porque coincide con f. Así el número de signos positivos de la signatra es mayor o igual que la dimensión p del espacio de matrices simétricas, donde:

$$p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además sabemos que matrices simétricas y hemisimétricas son espacios suplementarios. Si nos restringimos a las matrices hemisimétricas, se cumple que dada A hemisimétrica no nula:

$$g(A, A) = traza(A \cdot A) = traza(-A \cdot A^t) = -f(A, A) < 0,$$

luego esa restricción es definida negativa. Por tanto el número de signos negativos de la signatura es mayor o igual que la dimensión q el espacio de matrices hemisimétricas, donde:

$$q = n^2 - p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Deducimos que la signatura es (p', q') con $p' \geq p$ y $q' \geq q$ pero como:

$$n^2 \geq p' + q' \geq p + q \geq n^2$$

en realidad son igualdades y la signatura es:

$$(p', q') = (p, q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$