ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la Práctica 2.1-2.2

Espacios Euclídeos. Ortogonalidad (Curso 2019–2020)

1.– *Se considera un espacio euclídeo de dimensión 3, y en él una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ tal que el módulo de $\bar{e}_1$ y el de $\bar{e}_3$ es 2 y el de $\bar{e}_2$ es 1, y además el ángulo formado por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_3$ es de 90^o y los formados por $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ y por $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ son de 60^o. Se dan los vectores*

$$\bar{a} = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$$
$$\bar{b} = \bar{e}_1 - 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3$$

Se pide:

$$G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(b) *Módulo de $\bar{a}$ y de $\bar{b}$.*

Tenemos:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} \qquad \|\bar{b}\| = \sqrt{\bar{b} \cdot \bar{b}}$$

Para calcular los productos escalares utilizamos la matriz de Gram en la base $\{\bar{e}\}$:

$$\bar{a} \cdot \bar{a} = (\,1 \quad -1 \quad 0\,)\, G \,\{\,1 \quad -1 \quad 0\,\} = 3$$
$$\bar{b} \cdot \bar{b} = (\,1 \quad -2 \quad 1\,)\, G \,\{\,1 \quad -2 \quad 1\,\} = 4$$

y entonces:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{3} \qquad \|\bar{b}\| = \sqrt{4} = 2$$

(c) *Producto escalar de $\bar{a}$ por $\bar{b}$.*

Simplemente utilizamos la matriz de Gram del producto escalar:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (\,1 \quad -1 \quad 0\,)\, G \,\{\,1 \quad -2 \quad 1\,\} = 2$$

(d) *Calcular un vector de módulo 2, que forme un ángulo de 90^o con $\bar{a}$ y uno de 60^o con $\bar{b}$.*

Buscamos un vector $\bar{v} = v_1\bar{e}_1 + v_2\bar{e}_2 + v_3\bar{e}_3$ verificando:

$$\|\bar{v}\| = 2 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{v} = 4$$
$$cos(\bar{v}, \bar{a}) = cos(90) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{v} \cdot \bar{a}}{\|\bar{v}\|\|\bar{a}\|} = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{a} = 0$$
$$cos(\bar{v}, \bar{b}) = cos(60) \quad \Rightarrow \quad \frac{\bar{v} \cdot \bar{b}}{\|\bar{v}\|\|\bar{b}\|} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{b} = 2$$

Utilizando la matriz de Gram para hacer los productos escalares, obtenemos que las dos últimas ecuaciones se escriben:

$$0 = 3v_1 - v_3$$
$$2 = 2v_1 + 2v_3$$

Vemos que $v_1 = \dfrac{1}{4}$ y $v_3 = \dfrac{3}{4}$. Aplicando ahora la primera condición:

$$\bar{v} \cdot \bar{v} = 4 \quad \Rightarrow \quad (v_2)^2 + 2v_2 - \frac{3}{2} = 0$$

Resolviendo la ecuación resulta $v_2 = -1 \pm \dfrac{\sqrt{10}}{2}$ y por tanto hay dos vectores cumpliendo las condiciones que nos piden:

$$\frac{1}{4}\bar{e}_1 + (-1 + \frac{\sqrt{10}}{2})\bar{e}_2 + \frac{3}{4}\bar{e}_3 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{4}\bar{e}_1 + (-1 - \frac{\sqrt{10}}{2})\bar{e}_2 + \frac{3}{4}\bar{e}_3$$

2.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera una forma bilineal* f *cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 6 \\ 2 & 6 & 13 \end{pmatrix}$$

(i) *Probar que* F_C *define un producto escalar.*

Un producto escalar es una forma bilineal simétrica y definida positiva. El enunciado ya nos dice que es una forma bilineal. Dado que su matriz asociada es simétrica, la correspondiente forma es también simétrica.

Sólo queda ver que es definida positiva, para ello comprobamos diagonalizando por congruencia que su signtaura es $(3,0)$:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)H_{31}(-2)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *Con respecto al producto escalar definido por* f*:*

a) *Calcular una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$.

Una base ortonormal es aquella respecto a la cuál la matriz del producto escalar es la identidad. Teniendo en cuenta que el cambio de base se hace por congruencia completamos la diagonalización del apartado anterior hasta llegar a Id:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_2(1/\sqrt{2})\mu_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} = Id = F_B$$

Para hallar la base B realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización, obteniendo la matriz de cambio de base M_{CB}.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_2(1/\sqrt{2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{BC}$$

Las coordenadas de los vectores de la base B respecto de la base canónica son las columnas de la matriz:

$$B = \{(1,0,0), (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0,-2,1)\}$$

b) *Calcular la norma del vector* $(-1,1,0)$.

Por definición:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{(-1,1,0)\cdot(-1,1,0)}$$

y

$$(-1,1,0)\cdot(-1,1,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$$

En definitiva:

$$\|(-1,1,0)\| = \sqrt{2}.$$

3.– *De una forma bilineal simétrica* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *se sabe que:*

- $ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}$.

- *Los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(1,1,1)$ *son conjugados respecto de* f.

- *Si* w *es la forma cuadrática asociada a* f*,* $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$.

Se pide:

(i) *Hallar la matriz asociada a* F *respecto de la base canónica.*

Comenzamos trabajando en una base sobre la cual tenemos información y por tanto respecto a ella será más fácil obtener la matriz pedida:

$$B = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (1,0,0), u_3 = (1,1,1)\}$$

Es base de $\mathbb{R}^3$ porque son tres vectores en un espacio de dimensión 3 y además indpendientes porque vemos que la matriz de coordenadas tiene rango 3:

$$rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

Dado que $u_1 = (1,0,1) \in ker(f)$ entonces $f(u_1, v) = 0$ para cualquier vector $v \in \mathbb{R}^3$.

Como $u_2 = (1,0,0)$ y $u_3 = (1,1,1)$ son conjugados entonces $f(u_2, u_3) = 0$.

Por último si $w(1,0,0) = w(1,1,1) = 2$ entonces por definición de forma cuadrática asociada a una forma bilineal simétrica $f((1,0,0),(1,0,0)) = f((1,1,1),(1,1,1) = 2$.

Como la matriz asociada F_B cumple por definición que $(F_B)_{ij} = f(u_i, u_j)$ y es simétrica (por ser f simétrica) deducimos que:

$$F_B = \begin{pmatrix} f(u_1,u_1) & f(u_1,u_2) & f(u_1,u_3) \\ f(u_2,u_1) & f(u_2,u_2) & f(u_2,u_3) \\ f(u_3,u_1) & f(u_3,u_2) & f(u_3,u_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Finalmente cambiamos la matriz a la base canónica:

$$F_C = (M_{BC})^t F_B M_{BC}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la forma cuadrática* w *indicando además su rango y signatura.*

Ya tenemos diagonalizada la forma cuadrática respecto de la base B:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vemos que tiene rango 2 y es por tanto degenerada y signatura $(2,0)$ y es semidefinida positiva.

(iii) *Dar una base de vectores conjugados respecto de w.*

Una base de vectores conjugados es una base respecto a la cual la matriz asociada es diagonal. Hemos visto que F_B es diagonal y así una base que cumple lo pedido es precisamente la base B:

$$B = \{(1,0,1),(1,0,0),(1,1,1)\}.$$

(iv) *Calcular los vectores autoconjugados.*

Dado que la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores conjugados coinciden con el núcleo; pero éste no es dado en el enunciado:

$$autoconj(w) = ker(f) = \mathcal{L}\{(1,0,1)\}.$$

4.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ y un producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base B es:*

$$G_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dados los vectores $\vec{v} = (1,0,1)$, $\vec{u} = (0,1,1)$ calcular $\vec{u}\cdot\vec{v}$, $\|u\|$, $\|v\|$ y el ángulo que forman.

Para poder haces los cálculos primero obtenemos la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (\,1 \quad 0 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} = +\sqrt{(\,1 \quad 0 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|\vec{v}\| = +\sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = +\sqrt{(\,0 \quad 1 \quad 1\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{3}$$

Finalmente:

$$ang(\vec{u},\vec{v}) = arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}\right) = arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

8.– *Se considera el espacio vectorial real E de las funciones continuas $f:[0,\pi]\longrightarrow \mathbb{R}$ y la aplicación*

$$\begin{array}{rcl} p: E\times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,g) & \longrightarrow & \int_0^\pi f(x)\,g(x)\,dx. \end{array}$$

(a) *Demostrar que esta aplicación dota a E de la estructura de espacio vectorial euclídeo.*

Sabemos que E es un espacio vectorial. Para ver la estrucura euclídea hay que comprobar que p es una forma bilineal, simétrica y definida positiva.

En primer lugar es claro que es simétrica, porque:

$$p(f,g)=\int_0^\pi f(x)\,g(x)\,dx=\int_0^\pi g(x)\,f(x)\,dx=p(g,f)$$

Por tanto para ver que es bilineal, basta con comprobar la linealidad en la primera componente. Dadas $f,g,h\in E$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} p(\lambda f+\mu h,g) &= \int_0^\pi (\lambda f+\mu h)(x)\,g(x)\,dx=\int_0^\pi (\lambda f(x)+\mu h(x))\,g(x)\,dx= \\ &=\lambda\int_0^\pi f(x)\,g(x)\,dx+\lambda\int_0^\pi h(x)\,g(x)\,dx=\lambda p(f,g)+\mu p(h,g) \end{aligned}$$

luego se p es bilineal.

Finalmente veamos que es definida positiva. Dada $f\in E$ se verifica:

$$p(f,f)=\int_0^\pi f(x)\,f(x)\,dx=\lambda\int_0^\pi f(x)^2\,dx\geq 0$$

Además si $f\neq 0$, entonces f es no nula en un entorno del 0 por ser continua, luego:

$$p(f,f)=\int_0^\pi f(x)\,f(x)\,dx=\lambda\int_0^\pi f(x)^2\,dx> 0$$

(b) *Si llamamos U al subespacio vectorial generado por $\{1,\mathrm{sen}x,\cos x,\mathrm{sen}^2x\}$, encontrar una base ortogonal de U usando el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.*

Llamemos f_1,f_2,f_3,f_4 a las cuatro funciones que buscamos. Tomamos $f_1(x)=1$ y vamos calculando el resto utilizando el método de Gram-Schmidt. Construimos f_2:

$$f_2(x)=\mathrm{sen}x+a_1f_1(x)$$

de manera que $p(f_2,f_1)=0$. Por tanto:

$$a_1=-\frac{p(\mathrm{sen}x,1)}{p(1,1)}=-\frac{\int_0^\pi \mathrm{sen}x\,dx}{\int_0^\pi 1\,dx}=-\frac{2}{\pi}\quad\Rightarrow\quad f_2(x)=\mathrm{sen}x-\frac{2}{\pi}$$

Construimos f_3:

$$f_3(x)=\cos x+b_1f_1(x)+b_2f_2(x)$$

de manera que $p(f_3,f_1)=p(f_3,f_2)=0$. Ahora:

$$\left.\begin{array}{l} b_1=-\dfrac{p(\cos x,1)}{p(1,1)}=0 \\ b_2=-\dfrac{p(\cos x,f_2)}{p(f_2,f_2)}=0 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad f_3(x)=\cos x$$

Y por último f_4:

$$f_4(x)=\mathrm{sen}^2x+c_1f_1+c_2f_2+c_3f_3$$

con $p(f_4,f_1)=p(f_4,f_2)=p(f_4,f_3)=0$. Obtenemos:

$$\left.\begin{array}{l} c_1=-\dfrac{p(\mathrm{sen}^2x,1)}{p(1,1)}=-\dfrac{1}{2} \\ c_2=-\dfrac{p(\mathrm{sen}^2x,f_2)}{p(f_2,f_2)}=-\dfrac{2\pi}{\pi^2-8} \\ c_3=-\dfrac{p(\mathrm{sen}^2x,f_3)}{p(f_3,f_3)}=0 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad f_4(x)=\mathrm{sen}^2x-\frac{2\pi}{\pi^2-8}\sin x-\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2-8}$$

9.– *Se considera el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$ dotado del producto escalar ordinario. Encontrar la matriz F, en la base canónica, de un endomorfismo simétrico f de $\mathbb{R}^3$, sabiendo que el núcleo de f es el subespacio $\mathcal{L}\{(1,1,1)\}$ y 3 es autovalor doble de f.*

Sabemos que los autovalores de f son el 0 y el 3 con multiplicidades 1 y 2 respectivamente. Como los subespacios característicos son ortogonales entre si, el subespacio característico relativo al autovalor 3 es precisamente el ortogonal a $S_0 = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$:

$$S_3 = S_0^{\perp} = \{(x,y,z)/x+y+z=0\} = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(1,0,-1)\}$$

Buscamos una base ortogonal de este subespacio. Tomamos $\bar{u}_1 = (1,-1,0)$ y

$$\bar{u}_2 = a\bar{u}_1 + (1,0,-1);$$

tal que $\bar{u}_1 \cdot \bar{u}_2 = 0$. Obtenemos $a = -1/2$ y:

$$S_3 = \mathcal{L}\{(1,-1,0),(1/2,1/2,-1)\}$$

Por tanto, la matriz de f en la base $\{(1,1,1),(1,-1,0),(1/2,1/2,-1)\}$ es:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Haciendo el cambio de base obtenemos la matriz que buscamos:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1/2 \\ 1 & -1 & 1/2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, setiembre 2002)

11.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera el producto escalar dado por la matriz de Gram:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Calcular, respecto de la base canónica, la matriz asociada a la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio:

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0, \quad y + 2z = 0\}.$$

¿Cuál es la proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio U?.

Calculamos primero el generador de U (tiene dimensión 1 porque está definido en $\mathbb{R}^3$ por dos ecuaciones implícitas independientes). Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones:

$$x = 0, \quad y = -2z$$

obteniendo las paramétricas:

$$x = 0, \quad y = -2a, \quad z = a$$

de donde $U = \mathcal{L}\{(0,-2,1)\}$

Calculamos ahora una base de $U^{\perp}$; es decir calculamos los vectores (x,y,z) ortogonales a $(0,-2,1)$:

$$(x,y,z) \cdot (0,-2,1) = 0 \iff (\,x \quad y \quad z\,)\, G_C \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff z = 0.$$

Por tanto $U^{\perp} = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Formamos una base con los generadores de U y $U^{\perp}$:

$$B = \{\underbrace{(0,-2,1)}_{U}, \underbrace{(1,0,0),(0,1,0)}_{U^{\perp}}\}$$

En tal base la matriz de la proyección ortogonal sobre U es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

$$P_C = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando queda:

$$P_C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proyección ortogonal de $(1,1,1)$ sobre el subespacio U es:

$$P_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

12.– *Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:*

- *Los vectores* $(1,0)$ *y* $(0,1)$ *forma un ángulo de* 60 *grados.*
- $\|(1,1)\| = \sqrt{3}$.
- $B = \{(1,0),(1,-2)\}$ *es una base ortogonal.*

Sabemos que la matriz de Gram de un producto escalar es simétrica:

$$G_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por ser b una base ortogonal:

$$(1,0)\cdot(1,-2) = 0 \iff (1 \quad 0)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \iff a - 2b = 0.$$

Dado que $\|(1,1)\| = \sqrt{3}$:

$$3 = \|(1,1)\|^2 = (1,1)\cdot(1,1) \iff 3 = (1 \quad 1)\, G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = a + 2b + c = 3$$

De estas dos ecuaciones ya tenemos que:

$$a = 2b, \quad c = 3 - 4b \qquad \Rightarrow \qquad G_C = \begin{pmatrix} 2b & b \\ b & 3-4b \end{pmatrix}$$

Finalmente si los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forma un ángulo de 60 grados:

$$(1,0)\cdot(1,0) = \|(1,0)\|\|(0,1)\|cos(60)$$

donde:

$$\|(1,0)\|^2 = (1,0)\cdot(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2b$$

$$\|(0,1)\|^2 = (0,1)\cdot(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 3-4b$$

$$(1,0)\cdot(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

Nos queda:

$$b = \sqrt{2b(3-4b)}\cdot\frac{1}{2}$$

Quitando denominadores y elevando al cuadrado:

$$4b^2 = 6b - 8b^2 \iff 2b^2 = b$$

de donde $b=0$ ó $b=1/2$.

Si $b=0$ entonces $G_C = 0$ y eso noes posible por ser la matriz de un producto escalar definida positiva.

Por tanto $b = 1/2$ y $G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

I.– *En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:*

(a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.

(b) El subespacio vectorial U, definido por la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ en la base B, es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.

(c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2,2,0), (2,0,-1), (0,2,-1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas en la base B.

De la condición (a) obtenemos:

$$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 3$$

La condición (b) significa que:

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \forall \bar{x} \in U$$

y teniendo en cuenta que una base de U está formada por los vectores $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{e}_1 - \bar{e}_3$, obtenemos:

$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$

De estas dos condiciones deducimos que la matriz es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

La condición (c) significa que:

$$((\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) - 3\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\,1 \quad -2 \quad 1\,)\, G\, \{\,0 \quad 1 \quad 0\,\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Finalmente utilizando la hipótesis (d) sabemos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\bar{e}_3 \cdot (2,2,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 = 0 \text{ luego no puede ser.}$$
$$\bar{e}_3 \cdot (2,0,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$
$$\bar{e}_3 \cdot (0,2,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

Por tanto en principio, hay dos posibilidades para la matriz G:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ ó } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, sabemos que la forma bilineal asociada ha de ser definida positiva (todos los autovalores de la matriz positivos). En particular el determinante ha de ser mayor que cero. Pero $|G_1| = -4$ y $|G_2| = 8$. Luego la matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1998)

II.– *En un espacio vectorial V de dimensión n, se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ es A^2, siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f.*

En primer lugar, como A es una matriz simétrica y no singular, entonces A^2 es simétrica y no singular, y por tanto define una forma bilineal simétrica. Si $\bar{v} = v_i\bar{e}_i$ y $\bar{w} = w_i\bar{e}_i$, entonces:

$$f(\bar{v}, \bar{w}) = (v_i)A^2\{w_i\}$$

Para ver que es un producto escalar hay que comprobar que es definida positiva. Sea $\bar{v} = v_i\bar{e}_i \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (v_i)A^2\{v_i\} = (v_i)AA\{v_i\} = (v_i)A((v_i)A)^t$$

Como A es no singular y $\bar{v}$ es no nulo, $(v_i)A = (u_i)$ es un vector no nulo y por tanto:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (u_i)(u_i)^t = \sum_{i=1}^{n}(u_i)^2 > 0$$

y vemos que f es definida positiva.

Para encontrar una base ortonormal, buscamos una matriz B de cambio de base de manera que, la matriz de Gram en dicha base sea la identidad. Es decir, si

$$(\bar{u}_i) = (\bar{e}_j)B$$

la matriz de Gram de f en la base $\{\bar{u}_i\}$ es:

$$B^tA^2B$$

Para que sea la identidad basta tomar $B = A^{-1}$, ya que entonces, como A es simétrica:

$$B^tA^2B = A^{-t}A^2A^{-1} = A^{-1}A^2A^{-1} = Id$$

Deducimos que una base otonormal es aquella cuyos vectores tienen por coordenadas en la base $\{\bar{e}_i\}$ las columnas de la matriz A^{-1}.

III.– *Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2. Comprobar que:*

(a) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$

Primero veamos que $(U_1 + U_2)^{\perp} \subset U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$:

$$\bar{v} \in (U_1 + U_2)^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in U_1 + U_2$$

Pero en particular cualquier $\bar{u}_1 \in U_1$ ó $\bar{u}_2 \in U_2$ está en $U_1 + U_2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^{\perp} \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \quad \Rightarrow \quad v \in U_2^{\perp} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$$

Ahora veamos que $U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \subset (U_1 + U_2)^{\perp}$:

$$v \in U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \bar{v} \in U_1^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \\ \bar{v} \in U_2^{\perp} \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \end{array}\right.$$

Dado cualquier $\bar{u} \in U_1 + U_2$ es de la forma $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ con $\bar{u}_1 \in U_1$ y $\bar{u}_2 \in U_2$. Luego:

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \bar{v}.\bar{u}_1 + \bar{v}.\bar{u}_2 = 0$$

y por tanto $\bar{v} \in (U_1 + U_2)^{\perp}$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$

Utilizando el apartado anterior y que $(U^{\perp})^{\perp} = U$ obtenemos:

$$(U_1 \cap U_2)^{\perp} = ((U_1^{\perp})^{\perp} \cap (U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = ((U_1^{\perp} + U_2^{\perp})^{\perp})^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$$

IV.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una determinada base* $\{\bar{e}_i\}$ *se definen el producto escalar*

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + x_1y - 2 + x_2y_1 + 2x_1y_3 + 2x_3y_1$$

y el endomorfismo f *que verifica:* $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. *¿Es* f *un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de* f *sea diagonal.*

La matriz de Gram del producto escalar que nos dan respecto a la base $\{\bar{e}_i\}$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz del endomorifsmo:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

f será simétrico si GF es una matriz simétrica. Y efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Para hallar una base ortonormal, basta tomar una base ortonormal de cada subespacio característico de f. Primero calculamos los autovalores:

$$|F - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

Ahora calculamos los espacios característicos:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2x + 3y \\ 0 = -2y + 2z \end{cases}$$

luego, $S_0 = \mathcal{L}\{(3,-2,-2)\}$

Y para el otro autovalor:

$$(F - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0$$

luego, $S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Ahora los ortonormalizamos utilizando la matriz G. En S_0 basta dividr el vector base por su norma.

$$\|(3,-2,-2)\| = \sqrt{(3,-2,2)G\{3,-2,2\}} = \sqrt{2}$$

En S_2 calculamos $\bar{u} = a(1,0,0) + (0,0,1)$ ortogonal a $(1,0,0)$:

$$a = -\frac{(1,0,0)G\{(0,0,1)\}}{(1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = -1$$

luego $\bar{u} = (-1,0,1)$ y dividimos por las normas:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{((1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = \sqrt{2}$$
$$\|(-1,0,1)\| = \sqrt{(-1,0,1)G\{(-1,0,1)\}} = 1$$

La base que buscamos es:

$$\{(3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2},0,0), (-1,0,1)\}$$

V.– *En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.*

Sea $f: V \longrightarrow V_1$ la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2. Sabemos que:

$$f(v) = v_1, \qquad \text{siendo } v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2.$$

Por otra parte que f sea simétrica significa que:

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v; \qquad \forall u, v \in V$$

- Supongamos que V_1 y V_2 son ortogonales. Entonces sean $u, v \in V$ cualesquiera. Se descomponen como $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$ y $u_2, v_2 \in V_2$. Entonces:

$$u \cdot f(v) = (u_1 + u_2) \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1$$

ya que $v_1 \cdot u_2 = 0$ por ser V_1 y V_2 ortogonales.

De igual forma:

$$f(u) \cdot v = u_1 \cdot (v_1 + v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_1 = u \cdot f(v)$$

y por tanto f es simétrico.

- Recíprocamente supongamos que f es simétrico y veamos que entonces V_1 y V_2 son ortogonales. Sean $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ cualesquiera. Por ser f simétrico:

$$v_1 \cdot f(v_2) = f(v_1) \cdot v_2$$

Pero esto es equivalente a:

$$v_1 \cdot 0 = v_1 \cdot v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \cdot v_2 = 0$$

y tenemos la ortogonalidad de v_1 y v_2.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.– *Dada la matriz $n \times n$ A definida por*

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

A es una matriz simétrica y por tanto se puede interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que entonces existe una base ortonormal en la que la matriz de f es diagonal. Deducimos que A es diagonalizable por semejanza ortogonal (existe C ortogonal, $C^{-1} = C^t$ tal que $C^t A C$ es diagonal).

Para calcular la matriz de paso, basta calcular una base ortonormal de autovectores de cada subespacio característico. Primero calculamos los autovalores:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n-\lambda)$$

Por tanto tenemos el autovalor $\lambda_1 = n$ con mulptiplicidad 1 y el autovalor $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad $n-1$. El espacio característico asociado al autovalor 0 tiene dimensión $n-1$ y esta dado por la ecuación:

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \iff x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$$

Una base ortogonal del mismo es:

$$\{(1,-1,0,\dots,0,0),(1,1,-2,\dots,0,0),\dots,(1,1,1,\dots,2-n,0),(1,1,1,\dots,1,1-n)\}$$

El subespacio característico asociado al autovalor n es precisamente el ortogonal al anterior, es decir, el generado por el vector $\{(1,1,1,\dots,1,1)\}$.

Divididiendo estos vectores por sus normas obtenemos las filas de la matriz de paso ortogonal que buscamos:

$$\begin{aligned} \|(1,1,1,\dots,1,1)\| &= \sqrt{n} \\ \|(1,-1,0,\dots,0,0)\| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \|(1,1,-2,\dots,0,0)\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ &\vdots \\ \|(1,1,1,\dots,2-n,0)\| &= \sqrt{n-2+(2-n)^2} = \sqrt{n^2-3n+2} \\ \|(1,1,1,\dots,1,1-n)\| &= \sqrt{n-1+(1-n)^2} = \sqrt{n^2-n} \end{aligned}$$

y por tanto la matriz C es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \frac{2-n}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{n^2-n}} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.– *En un espacio euclídeo V se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:*

(a) *Ver si f es lineal.*

Veamos que es lineal. Sean $\bar{x}, \bar{y} \in V$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Hay que comprobar que $f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y})$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) &= (\bar{a}\cdot(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}))\bar{b} - 3(\lambda\bar{x} + \mu\bar{y}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} + \mu(\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b} - 3\lambda\bar{x} - 3\mu\bar{y} = \\ &= \lambda((\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}) + \mu((\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b} - 3\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}) + \mu f(\bar{y}) \end{aligned}$$

(b) *Determinar los autovalores y autovectores.*

Sea λ un autovalor y $\bar{v}$ un autovector asociado no nulo. Se tiene:

$$\lambda\bar{v} = f(\bar{v}) = (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} - 3\bar{v} \quad \Rightarrow \quad (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} = (\lambda+3)\bar{v}$$

Por tanto hay dos posibilidades:

- $\lambda = -3$ y $\bar{a}\cdot\bar{v} = 0$, es decir, $\bar{v} \in \{\bar{a}\}^{\perp}$, o bien,

- $\bar{v} = \bar{b}$ y $\lambda + 3 = \bar{a}\cdot\bar{b}$.

Es decir si $dim(V) = n$, el autovalor $\lambda_1 = -3$ tiene multiplicidad geométrica $dim(\{\bar{a}\}^{\perp}) = n-1$, ya que el subespacio caracerístico es precisamente $S_{-3} = \{\bar{a}\}^{\perp}$.

Además si $\bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$ aparece otro autovalor $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3$ distinto, cuyo subespacio caracerístico es precisamente $S_{\lambda_2} = \mathcal{L}\{\bar{b}\}$.

(c) *¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?*

Para que sea diagonalizable, la suma de las multiplicidades geométricas han de ser la dimensión de V. Por lo razonado en el apartado anterior, esto ocurre precisamente si $\bar{a}\cdot\bar{b} \neq 0$ ese decir si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son ortogonales.

(d) *Si en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ la matriz de Gram es*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son $(1,2,-1)$ *y* $(2,0,-3)$, *respectivamente, determinar en dicha base la matriz de f, los autovalores y los autovectores.*

Los autovalores son $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3$. Para calcular este producto, basta calcular las coordenadas contravariantes de $\bar{b}$:

$$G^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b} - 3 = (\,1 \quad 2 \quad -1\,)\{\,3 \quad 1 \quad -1\,\} - 3 = 3$$

Los autovectores asociados son:

$$\begin{aligned} S_{-3} &= \{\bar{a}\}^{\perp} = \{x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 |\, x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\} = \mathcal{L}\{\bar{e}_1 + \bar{e}_3, \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3\} \\ S_3 &= \mathcal{L}\{\bar{b}\} = \mathcal{L}\{3\bar{e}_1 + \bar{e}_2 - \bar{e}_3\} \end{aligned}$$

Por último la imagen de un vector (x,y,z) es:

$$f(x,y,z) = ((x,y,z)\cdot\bar{a})\bar{b} - (3x,3y,3z) = (-2x+6y-3z, x-3y-z, -x-2y-2z)$$

La matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1997)

VIII.– *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ *una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ *el subespacio generado por* $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,0)\}$.

(a) *Probar que la forma bilineal f define un producto escalar.*

Para que f defina una forma bilineal su matriz asociada ha de ser simétrica y definida positiva.

La simetría se cumple por ser la matriz A simétrica.

La diagonalizamos por congruencia para comprobar que es definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1/2)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(2/3)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{32}(2/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+,+,+)$ y por tanto f es definida positiva.

(b) *Obtener una base ortogonal de S respecto del producto escalar f.*

En primer lugar vemos si los vectores que generan S son independientes. Para ello obtenemos un sistema de generadores equivalente haciendo operaciones fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $S = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Para obtener una base ortogonal de S podemos utilizar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Tomamos como primer vector $\bar{v}_1 = (1,0,0)$.

Ahora buscamos otro vector de S de la forma:

$$\bar{v}_2 = (0,1,0) + \lambda \bar{v}_1$$

tal que

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,1,0)\cdot \bar{v}_1 + \lambda \bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{(0,1,0)\cdot \bar{v}_1}{\bar{v}_1 \cdot \bar{v}_1}$$

Tenemos en cuenta que para hacer el producto escalar tenemos que utilizar la matriz A de f:

$$\lambda = -\frac{(0,1,0)A(1,0,0)^t}{(1,0,0)A(1,0,0)^t} = \frac{1}{2}$$

Por tanto la base pedida es:

$$\{(1,0,0),(\frac{1}{2},1,0)\}$$

IX.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre".*

Es VERDADERO. Sean v, w tales vectores. Si fueran dependientes, como $w \neq 0$, existiría un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $w = \lambda v$. Pero entonces, por ser ortogonales,

$$0 = v \cdot w = \lambda |v|^2,$$

de donde se derivaría que $v = 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. Así pues, son linealmente independientes y constituyen un sistema libre.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.– *Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2. Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in R$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.*

Sean u, v dos vectores no nulos. La medida del ángulo que forma se hace mediante la fórmula:

$$cos(u, v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Apliquémosla para cada uno de los productos escalares. Para G_1:

$$cos(u, v) = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}.$$

Para G_2:

$$\begin{aligned} cos(u, v) &= \frac{(u)G_2(v)^t}{\|(u)G_2(u)^t\|\|(v)G_2(v)^t\|} = \frac{(u)(\lambda G_1)(v)^t}{\|(u)(\lambda G_1)(u)^t\|\|(v)(\lambda G_1)(v)^t\|} = \\ &= \frac{\lambda (u)G_1(v)^t}{\lambda \|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} \end{aligned}$$

Luego vemos que ambos conincіden.

En cuanto a las longitudes:

$$\|u\|_1 = \sqrt{(u)G_1(u)^t},$$

pero

$$\|u\|_2 = \sqrt{(u)G_2(u)^t} = \sqrt{(u)(\lambda G_1)(u)^t} = \lambda \sqrt{(u)G_1(u)^t} = \lambda \|u\|_1.$$

Como $\lambda > 1$ vemos que la longitud con el segundo producto escalar es superior a la primera.

(Examen final, septiembre 2008)

XI.– *En el espacio de matrices $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ consideramos las formas bilineales:*

$$\begin{aligned} f : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(A, B) = traza(AB^t) \\ g : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \times M_{n\times n}(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}, \quad g(A, B) = traza(AB) \end{aligned}$$

(a) *Estudiar si son simétricas.*

Dadas $A, B, \in M_{n\times n}$ veamos la simetría de f:

$$f(A, B) = traza(AB^t) = traza((AB^t)^t) = traza(BA^t) = f(B, A),$$

donde hemos usado que la traza de una matriz coincide con su traspuesta.

Ahora la simetría de g:

$$g(A, B) = traza(AB) = traza(BA) = g(B, A),$$

donde usamos que la traza de AB es la misma que la traza de BA:

$$traza(AB) = \sum_{i=1}^{n} (AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} B_{ki}$$
$$traza(BA) = \sum_{k=1}^{n} (BA)_{kk} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} B_{ki} A_{ik}$$

(b) *Probar que para $n \geq 2$, f define un producto escalar, pero g no. ¿Qué ocurre para $n = 1$?.*

Necesitamos ver que f es definida positiva, es decir, que $f(A, A) > 0$ si $A \neq \Omega$. Pero:

$$f(A, A) = traza(A \cdot A^t) = \sum_{i=1}^{n} (AA^t)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik} (A^t)_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} A_{ik}^2$$

Como la suma es de cuadrados, es mayor que cero si alguno de los coeficientes A_{ik} es no nulo.

Sin embargo para la aplicación g si tomamos la matriz:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

se cumple $B \neq 0$:

$$g(B, B) = traza(B^2) = traza(\Omega) = 0$$

luego B no es definida positiva.

Si $n = 1$ entonces las aplicaciones f y g son en realidad la misma, porque una matriz de dimensión uno coincide con su traspuesta. Por tanto ambas son productos escalares.

(c) *Para $n = 2$ calcular la matriz asociada a g respecto de la base canónica, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada.*

Si llamamos:

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}, \quad B = A = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$$

se tiene:

$$g(A, B) = traza(AB) = traza \begin{pmatrix} x_1y_1 + x_2y_3 & x_1y_2 + x_2y_4 \\ x_3y_1 + x_4y_3 & x_3y_2 + x_4y_4 \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_3 + x_3y_2 + x_4y_4$$

de donde la matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para hallar la signatura la diagonalizamos por congruencia:

$$G \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la signatura es $(3, 1)$ y la forma cuadrática asociada a g es no degenerada e indefinida.

(d) *Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, calcular la matriz asociada respecto de la base canónica de la aplicación proyección ortogonal sobre el subespacio de matrices simétricas.*

Consideramoas la base del subespacio de matrices simétrias:

$$\left\{ S_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, S_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Lo completamos hasta una base ortogonal de la misma. Buscamos matrices $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ tales que:

$$f(X, S_1) = f(X, S_2) = f(X, S_3) = 0.$$

Operando:

$$\begin{array}{rcc} f(X, S_1) = 0 & \iff & x_1 = 0 \\ f(X, S_2) = 0 & \iff & x_2 + x_3 = 0 \\ f(X, S_3) = 0 & \iff & x_4 = 0 \end{array}$$

Por tanto podemos tomar:

$$S_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En la base $B = \{S_1, S_2, S_3, S_4\}$ la matriz de la proyección ortogonal es:

$$P_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base canónica:

$$P_{CC} = M_{CB} P_{BB} M_{BC} = M_{CB} P_{BB} M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$P_{CC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(e) *Para $n = 2$ y con el producto escalar definido por f, hallar una base ortonormal del subespacio generado por las matrices:*

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Comprobamos si los tres vectores son independientes. Para ello analizamos el rango de la matriz de sus coordenadas respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ttiene rango 2. Por tanto una base de ese subespacio está formada por dos vectores.

Ahora aplicamos GramSchmidt a los vectores:

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Tomamos:

$$V_1 = U_1, \quad V_2 = \lambda V_1 + U_2,$$

con

$$f(V_1, V_2) = 0 \iff \lambda = -\frac{f(U_2, U_1)}{f(U_1, U_1)} = -\frac{traza(U_2 U_1^t)}{traza(U_1 U_1^t)} = -\frac{-2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Por tanto:

$$V_2 = \frac{2}{5}U_1 + U_2 = \begin{pmatrix} 2/5 & 0 \\ 1 & -1/5 \end{pmatrix}.$$

Finalmente normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma:

$$\|V_1\|^2 = f(V_1, V_1) = traza(V_1 V_1^t) = 5, \qquad \|V_2\|^2 = f(V_2, V_2) = traza(V_2 V_2^t) = \frac{1}{5}$$

La base pedida es:

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} V_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}, \qquad W_2 = \frac{1}{1/\sqrt{5}} V_2 = \begin{pmatrix} 2\sqrt{5}/5 & 0 \\ \sqrt{5} & -\sqrt{5}/5 \end{pmatrix}.$$

(f) *Para cualquier $n > 2$, hallar la signatura y clasificar la forma cuadrática asociada a g.*

Observamos que sobre las matrices simétricas f y g actúan igual ya que si B es simétrica $traza(AB) = traza(AB^t)$. Por tanto, la restricción de g al subespcio de matrices simétricas es definida positiva, porque coincide con f. Así el número de signos positivos de la signatra es mayor o igual que la dimensión p del espacio de matrices simétricas, donde:

$$p = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Además sabemos que matrices simétricas y hemisimétricas son espacios suplementarios. Si nos restringimos a las matrices hemisimétricas, se cumple que dada A hemisimétrica no nula:

$$g(A, A) = traza(A \cdot A) = traza(-A \cdot A^t) = -f(A, A) < 0,$$

luego esa restricción es definida negativa. Por tanto el número de signos negativos de la signatura es mayor o igual que la dimensión q el espacio de matrices hemisimétricas, donde:

$$q = n^2 - p = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Deducimos que la signatura es (p', q') con $p' \geq p$ y $q' \geq q$ pero como:

$$n^2 \geq p' + q' \geq p + q \geq n^2$$

en realidad son igualdades y la signatura es:

$$(p', q') = (p, q) = \left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right).$$