ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas (Curso 2024–2025)

1.– *Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - 3x_1y_1$

Dados $(x_1, x_2), (x_1', x_2'), (y_1, y_2), (y_1', y_2') \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Basta comprobar que:

$$f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(x_1', x_2'), (y_1, y_2)) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1', x_2'), (y_1, y_2))$$
$$f((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2) + \mu(y_1', y_2')) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1, x_2), (y_1', y_2))$$

Haciendo "cuentas" vemos que SI es BILINEAL. Otra manera es tratar de calcular la matriz A en la base canónica como si ya supiésemos que es bilineal y luego ver que se expresa de la forma:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} f((1,0),(1,0)) & f((1,0),(0,1)) \\ f((0,1),(1,0)) & f((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y efectivamente f se escribe como:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz no es simétrica ni antisimétrica por tanto la forma bilineal NO es SIMETRICA y NO es ANTISIMETRICA.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 1 - x_2y_1 + 5x_3y_1$

NO es BILINEAL porque el cero no va al cero, es decir:

$$h((0, 0, 0), (0, 0, 0)) = 1$$

(d) $l : \mathcal{M}_{2\times2} \times \mathcal{M}_{2\times2} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad l(A, B) = \mathrm{tr}(AB)$

Veamos si es bilineal utilizando la definición. Sean $A, A', B, B' \in \mathcal{M}_{2\times2}$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$l(\lambda A + \mu A', B) = \mathrm{tr}((\lambda A + \mu A')B) = \mathrm{tr}(\lambda AB + \mu A'B)$$

Teniendo en cuenta que la traza es lineal, queda:

$$l(\lambda A + \mu A', B) = \mathrm{tr}(\lambda AB + \mu A'B) = \lambda \mathrm{tr}(AB) + \mu \mathrm{tr}(A'B) = \lambda l(A, B) + \mu l(A', B)$$

Análogamente vemos que:

$$l(A, \lambda B + \mu B') = \lambda l(A, B) + \mu l(A, B')$$

y por tanto la aplicación ES BILINEAL.

Calculemos la matriz de la aplicación en la base canónica:

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} l(E_1,E_1) & l(E_1,E_2) & l(E_1,E_3) & l(E_1,E_4) \\ l(E_2,E_1) & l(E_2,E_2) & l(E_2,E_3) & l(E_2,E_4) \\ l(E_3,E_1) & l(E_3,E_2) & l(E_3,E_3) & l(E_3,E_4) \\ l(E_4,E_1) & l(E_4,E_2) & l(E_4,E_3) & l(E_4,E_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que es simétrica y por tanto la aplicación bilineal ES SIMETRICA.

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p,q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

Veamos si es bilineal utilizando la definición. Sean $p, q, p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} m(\lambda p_1 + \mu p_2, q) &= (\lambda p_1(1) + \mu p_2(1))q(-1) - (\lambda p_1(-1) + \mu p_2(-1))q(1) \\ &= \lambda p_1(1)q(-1) - \lambda p_1(-1)q(1) + \mu p_2(1)q(-1) - \mu p_2(-1)q(1) = \lambda m(p_1,q) + \mu m(p_2,q) \end{aligned}$$

Análogamente vemos que:

$$m(p, \lambda q_1 + \mu q_2) = \lambda m(p,q_1) + \mu(p,q_2)$$

y por tanto ES BILINEAL.

Calculamos la matriz de la aplicación en la base canónica $\{1, x, x^2\}$: La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} m(1,1) & m(1,x) & m(1,x^2) \\ m(x,1) & m(x,x) & m(x,x^2) \\ m(x^2,1) & m(x^2,x) & m(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz es antisimétrica y por tanto la aplicación bilineal ES ANTISIMETRICA.

2.– *Dada la forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $w(x,y) = x^2 + 4xy + 3y^2$:

(i) *Clasificarla indicando su rango y signatura.*

Para claisficarla diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1,1)$ y el rango es 2. Se trata por tanto de una forma cuadrática no degenerada e indefinida.

(ii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Es una base B' en la cual la matriz asociada es diagonal. En el apartado anterior ya hemos diagonalizado por tanto basta aplicar sobre la identidad las mismas operaciones columna que en el proceso anterior obteniendo así la matriz de paso $M_{CB'}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}$$

Por tanto $B' = \{(1,0), (-2,1)\}$.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados, expresándolos de la manera más sencilla posible (dar el resultado respecto de la base canónica).*

Dado que w es indefinida de rango 2 sabemos que los autoconjugados pueden expresarse como unión de dos rectas. Si trabajamos en la base B' en la cuál diagonaliza:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x',y')_{B'} | w((x',y')_B) = 0\} = \left\{ (x',y')_{B'} \,\middle|\, (x' \quad y') \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \{(x',y')_{B'} | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x',y')_B | x' - y' = 0\} \cup \{(x',y')_{B'} | x' + y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,1)_{B'}\} \cup \mathcal{L}\{(1,-1)_{B'}\} \end{aligned}$$

Por último pasamos los generadores a la base canónica:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB'}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C, \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{M_{CB'}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{B'} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}_C,$$

y así:

$$Autoconj(w) = \mathcal{L}\{(-1,1)\} \cup \mathcal{L}\{(3,-1)\}.$$

(iv) *Calcular la matriz asociada a w en la base:*

$$B = \{(1,1),(1,-1)\}$$

Simplemente aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(v) *Si f es la forma bilineal simétrica asociada a w calcular $f((2,1),(1,3))$.*

La matriz asociada a f es la misma que la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((2,1),(1,3)) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 25.$$

6.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:*

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Clasificar la forma cuadrática en función de k, indicando su rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada realizando las mismas operaciones elementales fila y columna:

$$F_C \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-(k-1))} \xrightarrow{\mu_{32}(-(k-1))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-k^2 \end{pmatrix}$$

El tipo de forma cuadrática depende de los signos de la diagonal. Para distinguir casos estudiamos cuando se anulan los términos de la diagonal:

$$2k - k^2 = 0 \iff k(2-k) = 0 \iff k = 0 \text{ ó } k = 2.$$

Distinguimos:

-Si $k < 0$ entonces: $sign(2,1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.

-Si $k = 0$ entonces: $sign(2,0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.

-Si $0 < k < 2$ entonces: $sign(3,0)$, $rango = 2$ y es por tanto no degenerada y definida positiva.

-Si $k = 2$ entonces: $sign(2,0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.

-Si $k > 2$ entonces: $sign(2,1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.

(ii) *Para $k = 1$ calcular una base de vectores conjugados.*

Es una base en la cual la forma cuadrática diagonaliza. Para hallar realizamos sobre la identidas las mismas operaciones columna realizadas en el proceso de diagonalización. Obtendremos la matriz M_{CB} siendo B la base buscada.

$$Id \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto la base pedida es:

$$B = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,-1,0),(0,-1,1)\}.$$

(iii) *Para $k = 0$ calcular los vectores autoconjugados.*

Dado que para $k = 0$ la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$autoconj(w) = ker(f) = \{(x,y,z) | F_c(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\}$$

Quedan las ecuaciones:

$$2x + y = 0, \quad x + y + z = 0, \quad y + 2z = 0$$

Eliminando dependientes y resolviendo:

$$autoconj(w) = ker(f) = \{(x,y,z) | F_c(x,y,z)^t = (0,0,0)^t\} = \mathcal{L}\{(1,-2,1)\}.$$

(iv) *¿Para qué valores de k la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.*

La forma bilineal es simétrica por estar asociada a una forma cuadrática. Es producto escalar cuando además es definida positiva, es decir, según vimos en (i) cuando $0 < k < 2$.

7.– *Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w(x,y,z) = x^2 + 2kxy - z^2 + 2yz$$

(i) *Clasificar w en función de los valores de k, indicando su rango y signatura.*

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada respecto a la base canónica. Ésta la hallamos trasladando adecuadamente coeficientes.

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-k)} \xrightarrow{\mu_{21}(-k)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -k^2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{23}} \xrightarrow{\mu_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -k^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-k^2 \end{pmatrix}$$

Analizamos cuando pueden anularse los valores de la diagonal en función de k, ya que son los puntos límite de cambio de signo:

$$1 - k^2 = 0 \iff k^2 = 1 \iff k = \pm 1.$$

Resumimos en la siguiente tabla la signatura y rango de la matriz y su clasificación:

k	signatura	rango	clasificación
$k < -1$	$(1,2)$	3	no degenerada e indefinida
$k = -1$	$(1,1)$	2	degenerada e indefinida
$-1 < k < 1$	$(2,1)$	3	no degenerada e indefinida
$k = 1$	$(1,1)$	2	degenerada e indefinida
$k > 1$	$(1,2)$	3	no degenerada e indefinida

(ii) *Para $k=1$ hallar los vectores autoconjugados. Expresar el resultado de la manera más sencilla posible y con respecto a la base canónica.*

Para $k=1$ la forma cuadrática es indefinida y de rango 2. En ese caso sabemos que los vectores autoconjugados pueden expresarse como unión de dos planos.

Si trabajamos con la matriz asociada diagonalizada que calculamos antes:

$$F_B \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos que:

$$autoconj(w) = \{(x',y',z')_B | w((x',y',z')_B) =\} = \left\{ (x',y',z')_B \middle| \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \{(x',y',z')_B | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x',y',z')_B | (x'+y')(x'-y') = 0\} =$$
$$= \{(x',y',z')_B | x'+y' = 0\} \cup \{(x',y',z')_B | x'-y' = 0\} =$$
$$= \mathcal{L}\{(1,-1,0)_B, (0,0,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,1,0)_B, (0,0,1)_B\}$$

Para pasar el resultado a la base canónica necesitamos tener la matriz de cambio de base M_{CB}. Para hallarla realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Hacemos el cambio de base de los generadores de los dos planos:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Concluimos que:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(1,0,-1), (-1,1,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,0,1)_B, (-1,1,1)_B\}$$

(iii) *Dar un vector que sea autoconjugado para cualquier valor de k.*

Desde luego el vector nulo $(0,0,0)$ siempre es autoconjugado para cualquier forma cuadrática y por tanto para cualquier valor de k.

También dado que la matriz asociada F_C toma el valor 0 en la posición $2,2$ independientemente del vector de k se tiene que:

$$w(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) = (F_C)_{22} = 0$$

y por tanto $\vec{e}_2 = (0,1,0)$ es autoconjugado para cualquier valor de k.

(iv) *Calcular k para que los vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$ sean conjugados.*

Para que sean conjugados tiene que cumplirse que $f((1,0,0),(0,1,0)) = 0$, siendo f la forma bilineal simétrica asociada a w. Dado que tiene la misma matriz asociada que ésta tiene que verificarse:

$$0 = f((1,0,0),(0,1,0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = k.$$

(v) *¿Existe algún valor de k para el cuál no existan vectores autoconjugados no nulos?.*

No. Vimos en (iii) que para cualquier valor de k, $w(0,1,0) = 0$ es decir $(0,1,0)$ es un vector no nulo autoconjugado.

9.– *Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se define la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1)$$

(i) *Demostrar que f es una forma bilineal simétrica.*

Primero veamos que es simétrica, es decir, que $f(p(x), q(x)) = f(q(x), p(x))$:

$$f(q(x), p(x)) = q(1)p(1) - q'(1)'(1) = p(1)q(1) - p'(1)q'(1) = f(p(x), q(x))$$

Por ser simétrica, para tener la bilinealidad basta con comprobar la linealidad en la primera componente. Es decir, probaremos que:

$$f(ap_1(x) + bp_2(x), q(x)) = af(p_1(x), q(x)) + bf(p_2(x), q(x))$$

para $a, b \in \mathbb{R}$, $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned} f(ap_1(x) + bp_2(x), q(x)) &= (ap_1(1) + bp_2(1))q(1) - (ap_1'(1) + bp_2'(1))q'(1) = \\ &= ap_1(1)q(1) + bp_2(1)q(1) - ap_1'(1)q'(1) - bp_2'(1)q'(1) = \\ &= a(p_1(1)q(1) - p_1'(1)q'(1)) + b(p_2(1)q(1) - p_2'(1)q'(1)) = \\ &= af(p_1(x), q(x)) + bf(p_2(x), q(x)). \end{aligned}$$

(ii) *Clasificar f indicando además su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizaremos por congruencia su matriz asociada respecto de la base canónica $C = \{1, x\}$. Por definición de matriz asociada de una formaa bilineal respecto de una base:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) \\ f(x,1) & f(x,x) \end{pmatrix}.$$

donde por simetría $f(1, x) = f(x, 1)$:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 \\ f(1,x) &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 = 1 \\ f(x,x) &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Escribimos y diagonalizamos la matriz F_C:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Vemos que el rango es 2 y la signatura $(1, 1)$: es no degenerada e indefinida.

(iii) *Dar un par de polinomios que formen una base de vectores conjugados respecto de f.*

Una base B de vectores conjugados es aquella respecto a la cuál la matriz asociada es diagonal. Como yo diagonalizamos en el apartado anterior, basta aplicar las mismas operaciones columna del proceso de diagonalización sobre la identidad y obtendremos la matriz M_{CB}:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}.$$

Por tanto:

$$B = \{(1,0)_C, (-1,1)_C\} = \{1, x - 1\}.$$

(iv) *Calcular el conjunto de vectores autoconjugados. Si puede escribirse como unión de dos subespacios de dimensión 1 dar un generador de cada uno de ellos.*

Dado que la forma bilineal es indefinida y de rango 2 sabemos que los vectores autoconjugados se descomponen como unión de dos hiperplanos (en este caso dos rectas). En concreto:

$$\begin{aligned} autoconj(f) &= \{(a_0,a_1)_C | f((a_0,a_1)_C,(a_0,a_1)_C = 0\} = \{(a_0,a_1)_C | (a_0 \quad a_1)F_C(a_0 \quad a_1)^t = 0\} = \\ &= \{(a_0,a_1)_C | a_0^2 + 2a_0a_1 = 0\} = \{(a_0,a_1)_C | a_0(a_0+2a_1) = 0)\} = \\ &= \{(a_0,a_1)_C | a_0 = 0)\} \cup \{(a_0,a_1)_C | a_0 + 2a_1 = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(0,1)_C\} \cup \mathcal{L}\{(2,-1)_C\} = \mathcal{L}\{x\} \cup \mathcal{L}\{2-x\} \end{aligned}$$

(v) *Hallar $w(1+2x)$ siendo w la forma cuadrática asociada a f.*

Se tiene que:

$$w(1+2x) = f(1+2x, 1+2x) = (1+2\cdot 1)(1+2\cdot 1) - 2\cdot 2 = 9 - 4 = 5.$$

O también:

$$w(1+2x) = w((1,2)_C) = (1 \quad 2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{F_C}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5.$$

10.– *De una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ se sabe que:*

a) $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$ *es una base de vectores conjugados.*

b) *Es degenerada.*

c) $w(1,0,1) = -w(0,0,1) = 4$.

(i) *Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

Dado que B es una base de vectores conjugados sabemos que la matriz asociada F_B en esa base es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Calcularemos esta matriz y luego la cambiamos a la base canńonica.

Para usar que $w(1,0,1) = -w(0,0,1) = 4$ expresamos los vectores dados en la base B. Tenemos que:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \qquad M_{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

y

$$w(1,0,1) = 4 \quad \Rightarrow \quad w((1,0,0)_B) = 4 \quad \Rightarrow \quad (1 \quad 0 \quad 0)\,F_B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

$$w(0,0,1) = -4 \quad \Rightarrow \quad w((0,0,1)_B) = .4 \quad \Rightarrow \quad (1 \quad 0 \quad 0)\,F_B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad c = -4.$$

Finalmente como es degenerada $rango(F_B) < 3$ y así $b = 0$. Por tanto:

$$F_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Finalmente la pasamos a la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Indicar el rango y la signatura de w.*

Se tiene que $rango(w) = rango(F_B) = 2$ y $sign(w) = (1,1)$ porque en la forma diagonalizada F_B aparece un signo positivo y otro negativo en la diagonal.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados. Dar el resultado en la base canónica. Si es posible, descomponer el conjunto de vectores autoconjugados como unión de dos planos.*

Dado que es indefinida y de rango 2 sabemos que los autoconjugados pueden descomponerse como unión de dos planos. Para facilitar esa descomposición trabajamos en la base B:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x',y',z')_B | w((x',y',z')_B) = 0\} = \left\{ (x',y',z')_B | \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \right\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | 4x'^2 - 4z'^2 = 0\} = \{(x',y',z')_B | (2x'-2y')(2x'+2z') = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'-z' = 0\} \cup \{(x',y',z')_B | x'+z' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,0,1)_B, (0,1,0)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1,0,-1)_B, (0,1,0)_B\}. \end{aligned}$$

Pasamos los generadores a la base canónica:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_C, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

Por tanto:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(1,0,2),(1,1,0)\} \cup \mathcal{L}\{(1,0,0),(1,1,0)\}.$$

(iv) *Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1,0,2),(0,2,3))$.*

La matriz asociada a la forma bilineal asociada a w es la misma que la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((1,0,2),(0,2,3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -28.$$

13.– *En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).*

(i) *w es definida positiva.*

Un forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ es definida positiva si su matriz asociada en alguna base es diagonal con todos los términos en ella positivos: por ejemplo la identidad. Para conseguir una matriz asociada que no sea diagonal hacemos congruencia que sabemos que equivale a un cambio de base y por tanto conserva la propiedad de ser definida positiva.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *w es semidefinida negativa.*

Una matriz diagonal semidefinida negativa tiene signos negativos en la diagonal y también ceros. Para conseguir que NO sea diagonal manteniendo la propiedad de ser semidefinida negativa, usamos la misma técnica que en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *w es indefinida y no degenerada.*

En su forma diagonal para que sea indefinida tienen que aparecer signos positivos y negativos; para que sea no degenerada tiene que tener rango máximo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv) *w es indefinida y degenerada.*

Como antes para que sea indefinida tienen que aparecer signos positivos y negativos en la forma diagonal; para que sea degenerada tiene que tener rango menor que 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

14.– *Sea $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una forma cuadrática* **no degenerada** *en $\mathbb{R}^3$ y F_C su matriz asociada en la base canónica. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(iv) *Si $F_C = Id$ entonces $f((x_1, x_2, x_3)_B, (y_1, y_2, y_3)_B) = x_1y_1 + x_1y_3 + 2x_2y_2 + x_3y_1 + 3x_3y_3$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w, en una base B.*

VERDADERA. La matriz asociada a la forma bilineal dada en la base B es $F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Para que dos matrices simétricas puedan corresponder a la misma forma bilineal tienen que ser congruentes, es decir, tener la misma signatura. La signatura de $F_C = Id$ es obviamente $(3, 0)$. Para F_B la hallamos diagonalizando por congruencia:

$$F_B \overset{H_{31}(-1)\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Vemos que $sign(f) = (3, 0)$ y por tanto F_B es congruente con F_C.

(v) *$f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + yx' + yy' + zz'$ puede ser la expresión de una forma bilineal simétrica asociada a w.* (0.5 puntos)

FALSO. La matriz asociada a f es

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos que tiene rango < 3 (ya que las dos primeras filas son iguales) y así es degenerada; por tanto es imposible que esté asociada a w en base alguna ya que w es NO degenerada.

15.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Si w es una forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ de rango 1 entonces no puede ser indefinida.*

VERDADERO. Si es de rango 1 y en $\mathbb{R}^2$ entonces en la forma diagonalizada necesariamente aparece un cero y otro elemento no nulo. Por tanto en ningún caso pueden aparecer dos números de diferentes signo y no puede ser indefinida.

(ii) *Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$ entonces w es semidefinida positiva.*

FALSO. Por ejemplo si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

cumple que $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = 0$. Pero su determinante es no nulo, por tanto no puede ser semidefinida.

(iii) *Si $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ es una matriz asociada a una forma cuadrática w y verifica $a_{11} = 1$, $a_{22} = 1$ y $a_{33} = -1$ entonces w es indefinida.*

VERDADERO. Si A es la matriz asociada en una determinada base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ y f es la forma bilineal simétrica asociada a w, entonces $1 = a_{11} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1) > 0$ y $-1 = a_{33} = f(\vec{u}_1, \vec{u}_1) = w(\vec{u}_1) < 0$. Por tanto es indefinida, ya que hay que vectores sobre las cuáles la forma cuadrática toma valores positivos y otros sobre los cuales toma valores negativos.

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.*

VERDADERO. Son matrices asociadas a una misma forma cuadrática precisamente si tienen la misma signatura. Para comprobarlo las diagonalizamos por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vemos que ambas tienen signatura $(1, 1)$. Por tanto son congruentes y corresponde a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.

(v) *Si $A \in \mathcal{M}_{2015\times 2015}(\mathbb{R})$ es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces $det(A) < 0$.*

FALSO. De hecho por ser semidefinida en la forma diagonal siempre aparece algún cero. El rango de la forma cuadrática no es máximo y así el determinante de cualquier matriz asociada es nulo (y NO menor que cero).

I.– *Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.*

(a) *Demostrar que ϕ es bilineal.*

Sean $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in E$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}')g(\bar{y})$$

Por la linealidad de f queda:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}', \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y})$$

Análogamente utilizando la linealidad de g se ve que:

$$\phi(\bar{x}, \lambda\bar{y} + \mu\bar{y}') = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y}')$$

y por tanto la aplicación es bilineal.

(b) *Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.*

Supongamos que las matrices de f y g son respectivamente A y B, con:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $a_i = f(\bar{e}_i)$ y $b_i = g(\bar{e}_i)$.

La matriz asociada a ϕ en la base canónica es:

$$C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_i)g(\bar{e}_j) = a_i b_j$$

y matricialmente puede escribirse como:

$$C = A \cdot B^t$$

(c) *¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?*

No tiene porque ser simétrica ni antisimétrica. Por ejemplo tomando f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas por la matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matriz de ϕ queda:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica ni antisimétrica.

II.– *En el espacio vectorial real* $\mathbb{R}^3$, *hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:*

- *el vector* $(1,1,0)$ *es autoconjugado,*
- *el vector* $(2,0,1)$ *pertenece al núcleo,*
- *la forma cuadrática aplicada en* $(0,1,0)$ *da* 2 *y*
- *la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores* $(0,1,0)$ *y* $(1,1,0)$ *da* -1.

Consideramos la base $B = \{(1,1,0),(2,0,1),(0,1,0)\}$. Primero hallamos la matriz de la forma cuadrática (o equivalentemente de la polar asociada) con respecto a esta base. Si llamamos f a la forma polar asociada, tenemos:

- Por la primera condición, $f((1,1,0),(1,1,0)) = 0$.

- Por la segunda condición, $f((2,0,1),\bar{u}) = 0$, para cualquier $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. En particular, $f((2,0,1),(1,1,0)) = f((2,0,1),(2,0,1)) = f((2,0,1),(0,1,0)) = 0$.

- Por la tercera condición $f((0,1,0),(0,1,0)) = 2$.

- Finalmente por la cuarta condición $f((0,1,0),(1,1,0)) = -1$.

Obtenemos así la matriz de la forma cuadrática en la base B (teniendo en cuenta que es simétrica):

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0),(1,1,0)) & f((1,1,0),(2,0,1)) & f((1,1,0),(0,1,0)) \\ f((2,0,1),(1,1,0)) & f((2,0,1),(2,0,1)) & f((2,0,1),(0,1,0)) \\ f((0,1,0),(1,1,0)) & f((0,1,0),(2,0,1)) & f((0,1,0),(0,1,0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora teniendo en cuanta que la matriz para pasar de coordenadas de la base canónica a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Hallamos la matriz que nos piden haciendo el cambio de base de la anterior:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 6 \\ -8 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *una forma bilineal simétrica y* w *su forma cuadrática asociada. Se sabe que:*

- $ker(w) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$.

- $w(0,1) = 2$

(i) *Calcular la matriz asociada a* w *en la base canónica.*

Sabemos que la matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica. Por tanto es de la forma:

$$F_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Imponemos las condiciones dadas:

- $ker(w) = \mathcal{L}\{(1,1)\}$:

$$F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \end{cases} \iff b=-a, \quad c=-b=a.$$

- $w(0,1)=2$

$$2 = w(0,1) = (\,0 \quad 1\,)\, F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c = a$$

Concluimos que $a=c=2$ y $b=-a=-2$, y por tanto:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.*

Para clasificar diagonalizamos por congruencia la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1,0)$ y el rango 1. Se trata de una forma cuadrática degenerada ($rango < dim(\mathbb{R}^2)$) y semidefinida positiva.

(iii) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Si B es una base de vectores conjugados, entonces F_B es diagonal. En el apartado anterior ya hemos diagonalizado la matriz por congruencia, lo cuál se interpreta como un cambio de base. Basta hallar la base B o equivalentemente M_{CB}. Para ello realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que las realizadas en el proceso de diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto $B=\{(1,0),(1,1)\}$.

(iv) *Hallar los vectores autoconjugados.*

Dado que la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$autoconju(w) = ker(w) = \mathcal{L}\{(1,1)\}.$$

(v) *Calcular $w(1,2)$.*

$$w(1,2) = (\,1 \quad 2\,)\, F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (\,1 \quad 2\,) \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2.$$

IV.– *Fijados $a,b \in \mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z,t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) *Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar su signatura y clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F \xrightarrow[H_{21}(-b)]{\mu_{21}(-b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora distinguimos dos casos:

i) Si $a \neq b^2$, continuamos:

$$\xrightarrow[H_{32}(-b/(a-b^2))]{\mu_{32}(-b/(a-b^2))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & \dfrac{-b^2}{a-b^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{34}]{\mu_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Dos subcasos:

i.a) Si $b \neq 0$:

$$\xrightarrow[H_{43}((a-b^2)/b)]{\mu_{43}((a-b^2)/b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b^2 \end{pmatrix}$$

i.b) Si $b = 0$, directamente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si $a = b^2$, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{24}(1)]{\mu_{24}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & b & b \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{42}(-1/2)]{\substack{\mu_{32}(-1/2) \\ H_{32}(-1/2) \\ \mu_{42}(-1/2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & b/2 \\ 0 & 0 & b/2 & -b/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{43}(1)]{\mu_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los casos que hemos ido distinguiendo dependen de las condiciones $a = b^2$ y $b = 0$. Por tanto hacemos la siguiente tabla:

	$b < 0$		$b = 0$		$b > 0$	
$a > b^2$	$sig(3,1)$	$rg = 4$	$sig(2,0)$	$rg = 2$	$sig(3,1)$	$rg(4)$
$a = b^2$	$sig(2,1)$	$rg = 3$	$sig(1,0)$	$rg = 1$	$sig(2,1)$	$rg(3)$
$a < b^2$	$sig(2,2)$	$rg = 4$	$sig(1,1)$	$rg = 2$	$sig(2,2)$	$rg(4)$

y la consiguiente clasificación:

	$b < 0$	$b = 0$	$b > 0$
$a > b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	no degenerada, indefinida
$a = b^2$	degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	degenerada, indefinida
$a < b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, indefinida	no degenerada, indefinida

(ii) *Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.*

Hay tes casos:

i) $b \neq 0$ y $a = b^2$. El núcleo está formado por los vectores (x, y, z, t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x+by=0, \quad bx+b^2y+bt=0, \quad bt=0, \quad by+bz=0.$$

Como $b\neq 0$ resulta:

$$ker(w)=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 | z=-y, \quad x=-by, \quad t=0\}=\mathcal{L}\{(-b,1,-1,0)\}$$

ii) $b=0$ y $a\neq 0$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x=0, \quad ay=0$$

Como $a\neq 0$ resulta:

$$ker(w)=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 | x=y=0\}=\mathcal{L}\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

iii) $b=a=0$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\\ t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$ker(w)=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 | x=0\}=\mathcal{L}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

(iii) *Si $f:\mathbb{R}^4\times\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a=b=1$ calcular $f((1,1,0,0),(1,0,1,1))$.*

Simplemente:

$$f((1,1,0,0),(1,0,1,1))=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}F_C\begin{pmatrix} 1\\ 0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}=3.$$

V.– *En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar e_1,\bar e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y)=x^2+2xy-y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar v_1,\bar v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v)=2uv+v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.*

La matriz de la forma cuádratica en la base $\{\bar e_1,\bar e_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \omega((1,0)) & \dfrac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) \\ \dfrac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) & \omega(0,1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Nota: En general si la expresión de una forma cuadrática esta dada a partir de las coordenadas $(x_1,\dots,x_n)$ de un vector con respecto a una base, la expresión matricial se obtiene tomando en la diagonal los coefientes de los términos $(x_i)^2$ y en la posición ij, con $i\neq j$, los coeficientes de los términos x_ix_j divididos por dos.

Análogmante la matriz de ω con respecto a la nueva base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de ver si ambas matrices son congruentes. Para ello diagonalizamos ambas por congruencia, calculando además las matrices de paso. Hacemos operaciones por filas y las simétricas por columnas. Para tener además la matriz de paso hacemos también las operaciones fila sobre la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y para la segunda matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se deduce que:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de una matriz a otra es por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en función de la primera se escribe:

$$\begin{aligned} \bar{v}_1 &= (1 - 1/\sqrt{2})\bar{e}_1 + (1/\sqrt{2})\bar{e}_2 \\ \bar{v}_1 &= \bar{e}_1 \end{aligned}$$

VI.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x, y, z) = ax^2 + y^2 + 4xy + 2axz.$$

(i) Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.

Para clasificarla estudiamos su rango y signatura. Para ello diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{12}}{\longrightarrow} \overset{\mu_{12}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 4$ continuamos:

$$\overset{H_{32}(-a/(a-4))}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-a/(a-4))}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/(a-4) \end{pmatrix}$$

Si $a = 4$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)} \xrightarrow{\mu_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal se anulan cuando $a = 4$ ó $a = 0$. Por tanto distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 0$ la signatura es $(2, 1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 0$ la signatura es $(1, 1)$ y su rango es 2. La forma cuadrática es indefinida y degenerada.

- Si $0 < a < 4$ la signatura es $(2, 1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 4$ la signatura es $(2, 1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a > 4$ la signatura es $(2, 1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

En resumen: la forma cuadrática es siempre indefinida. Es no degenerada excepto si $a = 0$.

(ii) *Para $a = 0$ hallar los vectores autoconjugados, expresándolos si es posible como unión de dos planos.*

Por definición los vectores autoconjugados son aquellos cuya imagen por la forma cuadrática es nula. Dado que la forma cuadrática para $a = 0$ es indefinida y tiene rango 2 los vectores autoconjugados pueden descomponerse en unión de dos planos:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | w(x, y, z) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + 4xy = 0\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y(y + 4x) = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y + 4x = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(0, 0, 1), (1, -4, 0)\} \end{aligned}$$

VII.– *Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) *Probar que f es una forma bilineal simétrica.*

Primero veamos que es simétrica, es decir que cumple que:

$$f(p(x), q(x)) = f(q(x), p(x)).$$

Pero:

$$f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1) = q'(1)p'(1) + q(-1)p(-1) = f(q(x), p(x)).$$

Ahora por ser simétrica para la bilinealidad basta con comprobar la linealidad en la primera componente:

$$f(ap(x) + br(x), q(x)) = af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)).$$

Pero:

$$\begin{aligned} f(ap(x) + br(x), q(x)) &= (ap(x) + br(x))'(1)q'(1) + (ap(-1) + br(-1))q(-1) = \\ &= (ap'(1) + br'(1))q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= ap'(1)q'(1) + br'(1)q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= a(p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)) + b(r'(1)q'(1) + r(-1)q(-1)) = \\ &= af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)). \end{aligned}$$

ii) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

La base canónica es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada respecto de tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 0\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1 \\ f(1,x) &= 0\cdot 1 + 1\cdot(-1) = -1 \\ f(1,x^2) &= 0\cdot 2 + 1\cdot(-1)^2 = 1 \\ f(x,x) &= 1\cdot 1 + (-1)\cdot(-1) = 2 \\ f(x,x^2) &= 1\cdot 2 + (-1)\cdot(-1)^2 = 1 \\ f(x^2,x^2) &= 2\cdot 2 + (-1)^2\cdot(-1)^2 = 5 \end{aligned}$$

y el resto se completa por simetría. Obtenemos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

iii) *Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.*

Cambiar de base la matriz asociada equivale a diagonalizarla por congruencia (haciendo mismas operaciones fila y columna); la matriz de paso nos devuelve las coordenadas de la nueva base en función de la inicial:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{21}(1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto deducimos que en la base $B' = \{1, 1+x, -3-2x+x^2\}$ la matriz asociada es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv) *Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.*

El rango de la forma cuádratica asociada coincide con el rango de la matriz asociada en cualquier base. Vemos que:

$$rango(F_{B'}) = 2.$$

La signatura indica el número de términos positivos y negativos de la diagonal en la forma diagonalizada:

$$signatura = (2, 0).$$

VIII.– *Sea $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrárica. Se sabe que:*

- *Los vectores $\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ son una base de vectores conjugados.*

- *w tiene rango 1.*

- *$(0,1,0)$ es un vector autoconjugado.*

- *$w(1,2,0)=1$.*

i) *Hallar la matriz asociada a w respecto de la base canónica.*

Por ser $B=\{(1,1,0),(0,1,0),(1,1,1)\}$ una base de vectores conjugados, la matriz asociada a w respecto a dicha base es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Por ser $(0,1,0)$ autoconjugado, $w(0,1,0)=0$. Observamos que $(0,1,0)_C=(0,1,0)_B$ y así matricialemente:

$$(0,1,0)F_B(0,1,0)^t=0$$

de donde $b=0$.

Además $w(1,2,0)=1$. Pasamos el vector $(1,2,0)$ a la base B para expresar matricialmente la condición dada:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = M_{CB}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $(1,2,0)_C=(1,1,0)_B$ y $w(1,2,0)=1$ se expresa como:

$$(1,1,0)F_B(1,1,0)^t=0$$

de donde $a+b=1$. Dado que $b=0$, deducimos que $a=1$.

Finalmente como w tiene rango 1 y:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

deducimos que $c=0$.

Para terminar hacemos un cambio de base de la matriz asociada:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = M_{CB}^{-t} F_B M_{CB}^{-1}$$

donde

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ii) *Clasificar w.*

La forma diagonal asociada a w es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto el rango es 1, la signatura $(1,0)$. Se trata de una forma cuadrática degenerada semidefinida positiva.

iii) *Hallar todos los vectores autoconjugados de* w*.*

Se trata de los vectores cuya imagen por w es nula.

Método I: Dado que la forma cuadrática es semidefinida positiva sabemos que los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0, \quad -x + z = 0 \iff x - z = 0$$

Pasando de implícitas a paramétricas queda:

$$Aut(w) = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,0,1)\}.$$

Método II: Trabajando en la base B:

$$\begin{aligned} Aut(w) &= \{(x',y',z')_B | (x',y',z')F_B(x',y',z')^t = 0\} = \\ &= \{(x',y',z')_B | x'^2 = 0\} = \{(x',y',z')_B | x' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(0,1,0)_B, (0,0,1)_B\}. \end{aligned}$$

Expresamos el resultado en la base canónica:

$$(0,1,0)_B = (0,1,0)_C, \qquad (0,0,1)_B = (1,1,1)_C.$$

Por tanto:

$$Aut(w) = \mathcal{L}\{(0,1,0),(1,1,1)\}.$$

IX.– *Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es*

$$\omega(\bar{x}) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_4)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

(a) *Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.*

La matriz asociada a la forma cuadrática que nos dan es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

la diagonalizamos por congruencia:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{41}(1)]{H_{21}(-1)} \xrightarrow[\nu_{41}(1)]{\nu_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\substack{H_{23}(-1/2) \\ \nu_{23}(-1/2)}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{42}(-1)]{H_{32}(1)} \xrightarrow[\nu_{42}(-1)]{\nu_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_{43}(-1)} \xrightarrow{\nu_{43}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos autovalores positivos, uno negativo y otro nulo. Por tanto su rango es 3 y su signatura $(2,1)$. Es por tanto indefinida degenerada. La forma en suma de cuadradados en coordenadas en la base $\{(1,0,0,0),(-1,1,-1/2,0),(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$ es:

$$\omega(y_1,y_2,y_3,y_4)=2(y_1)^2+(y_2)^2-(y_3)^2$$

(b) *Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.*

Como la signatura es $(2,1)$ y la dimensión del espacio es 4, la máxima dimensión posible para un subespacio en el cual la restricción de ω es semidefinida negativa es 2. Tomamos el subespacio generado por los correspondientes vectores relativos al valor negativo y nulo de la diagonal $\{(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$.

X.– *Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:*

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

(a) *Calcular el rango y la signatura de ω.*

Diagonalizamos la matriz mediante operaciones elementales en fila y sus simétrica en columna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ -1/2 & -1 & -1 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & -1 & -3/2\\ 0 & -1/2 & -3/2 & -1/4\end{pmatrix}\longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4\end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es 4 y la signatura $(2,2)$.

(b) *Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.*

Teniendo en cuenta que en la matriz que nos dan aparecen ceros en la diagonal, basta tomar, por ejemplo, $\bar{v}=(1,0,0,0)$.

(c) *Considérese el subespacio vectorial*

$$V=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4/\ x-y+2z=z+t=0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

Una base de V está formada por los vectores $\{(1,1,0,0),(0,2,1,-1)\}$. La matriz de Ω en dicha base es:

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0,0),(1,1,0,0)) & f((1,1,0,0),(0,2,1,-1))\\ f((1,1,0,0),(0,2,1,-1) & f((0,2,1,-1),(0,2,1,-1)\end{pmatrix}$$

donde f es la forma bilineal asociada a ω, es decir, $f(\bar{u},\bar{v})=(\bar{u})A\{\bar{v}\}$. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2001)

XI.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) *Probar que es una forma bilineal simétrica.*

Veamos primero que es lineal en la primera componente. Sean $c, d \in R$, $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(cp_1(x) + dp_2(x), q(x)) &= (cp_1(a) + dp_2(a))q(-a) + (cp_1(-a) + dp_2(-a))q(a) = \\ &= cp_1(a)q(-a) + dp_2(a)q(-a) + cp_1(-a)q(a) + dp_2(-a)q(a) = \\ &= c(p_1(a)q(-a) + p_1(-a)q(a)) + d(p_2(a)q(-a) + p_2(-a)q(a)) = \\ &= cf(p_1(x), q(x)) + df(p_2(x), q(x)) \end{aligned}$$

Además es simétrica:

$$f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a) = q(a)p(-a) + q(-a)p(a) = f(q(x), p(x)).$$

Por tanto de ambas cosas deducimos que también es lineal en la segunda componente y así es bilineal simétrica.

ii) *Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

El espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3. Para que tres vectores formen base basta que sean independientes; equivalentemente basta que la matriz de coordenadas respecto de la base canónica tenga determinante no nulo. La base canónica es:

$$C = \{1, x, x^2\}$$

y

$$(x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2 \equiv (a^2, -2a, 1), \quad x^2 \equiv (0, 0, 1), \quad (x+a)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \equiv (a^2, 2a, 1).$$

Entonces:

$$det M_{CB_a} = det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4a^3.$$

Deducimos que B_a es base si y sólo si $a \neq 0$.

iii) *Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a.*

Tiene sentido cuando B_a es base, es decir, $a \neq 0$. Con respecto a la base canónica la matriz asociada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base B_a:

$$F_{B_a} = M_{CB_a}^t F_C M_{CB_a} = \begin{pmatrix} 0 & 4a^4 & 16a^4 \\ 4a^4 & 2a^4 & 4a^4 \\ 16a^4 & 4a^4 & 0 \end{pmatrix},$$

donde:

$$M_{CB_a} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.*

Diagonalizamos la matriz asoicada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-a^2)\mu_{31}(-a^2)}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

- Si $a = 0$ el rango es 1 y la signatura $(1, 0)$.

- Si $a \neq 0$ el rango es 2 y la signatura $(1, 1)$.

XII.– *Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *$w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ambas tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto son semidefinidas positivas; sin embargo su suma es la identidad, que es definida positiva.

(ii) *$-w_1 - w_2$ no es indefinida.*

VERDADERO. Por ser w_1, w_2 semedefinidas positivas, se tiene:

$$w_1(u), w_2(u) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces:

$$-w_1(u) - w_2(u) \leq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

y por tanto $-w_1 - w_2$ siempre es definida negativa o semidefinida negativa.

(iii) *$w_1 + w_2$ es definida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambas y su suma tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto todas son semidefinidas positivas.

XIII.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:*

$$\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

Escribimos la matriz asociada a ω con respecto a la base canónica. Para clasificarla la diagonalizaremos por congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$ podemos hacer:

$$A \overset{H_{31}(1/a)\nu_{31}(1/a)}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a - 1/a \end{pmatrix}$$

Por el contrario si $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

En ambos casos b es uno de los elementos de la diagonal. Los otros dos dependen de a. Además $a - 1/a$ se anula cuando $a = 1$ o $a = -1$. Teniendo en cuenta todo esto, distinguimos las siguientes posibilidades:

- Si $b > 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (3,0)$ y es definida positiva (no degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (2,0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (2,1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(1,1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 3$, signatura $(1,2)$ y es indefinida (no degenerada).

- Si $b = 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (2,0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 1$, $signatura = (1,0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1,1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 1$, signatura $(0,1)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0,2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

- Si $b < 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (2,1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1,1)$ y es indefinida (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (1,2)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0,2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 3$, signatura $(0,3)$ y es definida negativa (no degenerada).

XIV.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:*

$$\omega_a(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

Escribimos las matrices asociadas a las formas cuadráticas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_a = \begin{pmatrix} 5 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla las diagonalizamos por congruencia:

$$Q_a \overset{H_{12}}{\underset{\nu_{12}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-a)H_{31}(1)}{\underset{\nu_{21}(-a)\nu_{31}(1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-a^2 & 1+a \\ 0 & 1+a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{23}}{\underset{\nu_{23}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 1+a & 5-a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1-a)}{\underset{\nu_{32}(-1-a)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2-2a+4 \end{pmatrix}.$$

Para saber que intervalos hemos de estudiar vemos cuando se anulan los valores de la diagonal:

$$-2a^2 - 2a + 4 = 0 \iff a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -2 \quad \text{ó } a = 1.$$

Distinguimos por tanto los siguientes casos:

VALOR DE a	SIGNATURA	RANGO	TIPO
$a \in (-\infty, -2)$	$(2,1)$	3	indefinida, no degenerada
$a = -2$	$(2,0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (-2, 1)$	$(3,0)$	3	definida positiva, no degenerada
$a = 1$	$(2,0)$	1	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (1, \infty)$	$(2,1)$	3	indefinida, no degenerada

XV.– *Consideramos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$*, la forma bilineal* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$*. Supongamos que*

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$*. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Se verifica que* $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.

Verdadero. Basta tener en cuenta que:

$$f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f((1,0)_B, (1,1)_B) = (1,0)F_B(1,1)^t = a + 1.$$

Por tanto la afirmación es cierta.

(ii) *Si* $a = -2$*, entonces* f *es antisimétrica.*

Falso. Si $a = -2$ la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es una matriz antisimétrica porque no tiene ceros en la diagonal y por tanto $F^t \neq -F$. Deducimos entonces que la correspondiente forma bilineal no es antisimétrica.

(iii) *Si* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, entonces* $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

Falso. Si $det(F_B) = 0$ entonces existen vectores no nulos tales que $\vec{v}F_V = \vec{0}$. Y por tanto $f(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. En nuestro caso:

$$det(F_B) = 1 - 2a.$$

Entonces si $a = -1/2$ y tomamos $\vec{v} = (-2, 1)$ se tiene:

$$f(\vec{v}, \vec{v}) = (-2, 1)F_B(-2, 1)^t = 0.$$
