ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas (Curso 2018–2019)

1.– *Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 2x_1y_2 - 3x_1y_1$

Dados $(x_1, x_2), (x'_1, x'_2), (y_1, y_2), (y'_1, y'_2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Basta comprobar que:

$$f(\lambda(x_1, x_2) + \mu(x'_1, x'_2), (y_1, y_2)) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x'_1, x'_2), (y_1, y_2))$$
$$f((x_1, x_2), \lambda(y_1, y_2) + \mu(y'_1, y'_2)) = \lambda f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) + \mu f((x_1, x_2), (y'_1, y_2))$$

Haciendo "cuentas" vemos que SI es BILINEAL. Otra manera es tratar de calcular la matriz A en la base canónica como si ya supiésemos que es bilineal y luego ver que se expresa de la forma:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} f((1,0),(1,0)) & f((1,0),(0,1)) \\ f((0,1),(1,0)) & f((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y efectivamente f se escribe como:

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz no es simétrica ni antisimétrica por tanto la forma bilineal NO es SIMETRICA y NO es ANTISIMETRICA.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 5x_1y_1 + 4x_1y_2 + 1 - x_2y_1 + 5x_3y_1$

NO es BILINEAL porque el cero no va al cero, es decir:

$$h((0,0,0), (0,0,0)) = 1$$

(e) $m : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad m(p, q) = p(1)q(-1) - p(-1)q(1)$

Veamos si es bilineal utilizando la definición. Sean $p, q, p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tenemos:

$$\begin{aligned} m(\lambda p_1 + \mu p_2, q) &= (\lambda p_1(1) + \mu p_2(1))q(-1) - (\lambda p_1(-1) + \mu p_2(-1))q(1) \\ &= \lambda p_1(1)q(-1) - \lambda p_1(-1)q(1) + \mu p_2(1)q(-1) - \mu p_2(-1)q(1) = \lambda m(p_1, q) + \mu m(p_2, q) \end{aligned}$$

Análogamente vemos que:

$$m(p, \lambda q_1 + \mu q_2) = \lambda m(p, q_1) + \mu(p, q_2)$$

y por tanto ES BILINEAL.

Calculamos la matriz de la aplicación en la base canónica $\{1, x, x^2\}$: La matriz es:

$$A = \begin{pmatrix} m(1,1) & m(1,x) & m(1,x^2) \\ m(x,1) & m(x,x) & m(x,x^2) \\ m(x^2,1) & m(x^2,x) & m(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz es antisimétrica y por tanto la aplicación bilineal ES ANTISIMETRICA.

3.– *Dada la forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$,

$w(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz + 2yz + z^2$.

(i) *Calcular la matriz asociada a* w *en la base canónica. Clasificar la forma cuadrática indicando su rango y signatura.*

La matriz asociada a w en la base canónica, trasladando adecuadamente los coeficientes de la expresión dada queda:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = F_B$$

Vemos que tiene $rango = 2$ y $signatura = (1, 1)$. Se trata por tanto de una forma cuadrática degenerada e indefinida.

(ii) *Calcular una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cual la matriz asociada es la identidad. Entonces realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna hechas en el proceso de diagonalización y obtendremos la matriz M_{CB} siendo B (las columnas de la matriz) la base buscada.

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

y así $B = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados descomponiéndolos, si es posible, como unión de dos planos.*

Dado que la forma cuadrática es indefinida y de rango dos sabemos que los vectores autoconjugados se pueden descomponer como unión de dos planos. En concreto si trabajamos con la forma diagonal obtenida en el primer apartado y por tanto respecto a la base B obtenida en el segundo se tiene que:

$$\begin{aligned} autoconj(w) &= \{(x', y', z')_B | w(x', y', z) = 0\} = \{(x', y', z')_B | (x', y', z) F_B (x', y', z')^t = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B | x'^2 - y'^2 = 0\} = \{(x', y', z')_B | (x' - y')(x' + y) = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B | x' + y' = 0\} \cup \{(x', y', z')_B | x' - y' = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1, -1, 0)_B, (0, 0, 1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_B, (0, 0, 1)_B\} \end{aligned}$$

Cambiamos los vectores de la base B a la canónica para expresar el resultado respecto a esta última base:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de forma que:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(2, -1, 0), (-1, 0, 1)\} \cup \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (-1, 0, 1)\}$$

(iv) *Si* f *es la forma bilineal simétrica asociada a* w *calcular* $f((1, 0, 1), (0, 1, 0))$.

La matriz asociada a f es precisamente la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((1, 0, 1), (0, 1, 0)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

6.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera la forma cuadrática dada por:*

$$w(x,y,z) = ax^2 + y^2 + 4xy + 2axz.$$

(i) *Clasificarla en función de a indicando además en cada caso su rango y signatura.*

Para clasificarla estudiamos su rango y signatura. Para ello diagonalizamos por congruencia la matriz asociada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} a & 2 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{\mu_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & a \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 4$ continuamos:

$$\xrightarrow{H_{32}(-a/(a-4))} \xrightarrow{\mu_{32}(-a/(a-4))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-4 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2/(a-4) \end{pmatrix}$$

Si $a = 4$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(1)} \xrightarrow{\mu_{23}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Los elementos de la diagonal se anulan cuando $a = 4$ ó $a = 0$. Por tanto distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 0$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 0$ la signatura es $(1,1)$ y su rango es 2. La forma cuadrática es indefinida y degenerada.

- Si $0 < a < 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a = 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

- Si $a > 4$ la signatura es $(2,1)$ y su rango es 3. La forma cuadrática es indefinida y no degenerada.

En resumen: la forma cuadrática es siempre indefinida. Es no degenerada excepto si $a = 0$.

(ii) *Para $a = 0$ hallar los vectores autoconjugados, expresándolos si es posible como unión de dos planos.*

Por definición los vectores autoconjugados son aquellos cuya imagen por la forma cuadrática es nula. Dado que la forma cuadrática para $a = 0$ es indefinida y tiene rango 2 los vectores autoconjugados pueden descomponerse en unión de dos planos:

$$\begin{aligned} Autoconj(w) &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | w(x,y,z) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y^2 + 4xy = 0\} = \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y(y+4x) = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y = 0\} \cup \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | y + 4x = 0\} = \\ &= \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\} \cup \mathcal{L}\{(0,0,1),(1,-4,0)\} \end{aligned}$$

7.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *se considera la forma bilineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x,y,z),(x',y',z')) = xx' + axy' + xz' + ayx' + yy' + yz' + bzx' + zy' + 2zz'$$

(i) *¿Para qué valores de a y b es f una forma bilineal simétrica?.*

La matriz asociada respecto de la base canónica, trasladando coeficientes, es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ b & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Que la forma bilineal sea simétrica equivale a que la matriz asociada sea simétrica. Esto ocurre cuando $b = 1$ y a toma cualquier valor.

(ii) *Para los valores determinados en el apartado anterior clasificar la forma cuadrática asociada a f indicando además su rango y signatura.*

Para $b = 1$ clasificamos la forma cuadrática diagonalizando su matriz asociada por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-a)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow}\overset{\mu_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{32}(a-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(a-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a(1-a) \end{pmatrix}$$

Dado que $2a(1-a)$ se anula para $a = 0$ y $a = 1$ distinguimos los siguientes casos:

- Si $a < 0$ la signatura es $(2, 1)$ y el rango 3. Es no degenerada e indefinida.
- Si $a = 0$ la signatura es $(2, 0)$ y el rango 2. Es degenerada y semidefinida positiva.
- Si $0 < a < 1$ la signatura es $(3, 0)$ y el rango 3. Es no degenerada y definida positiva.
- Si $a = 1$ la signatura es $(2, 0)$ y el rango 2. Es degenerada y semidefinida positiva.
- Si $a > 1$ la signatura es $(2, 1)$ y el rango 3. Es no degenerada e indefinida.

(iii) *Para $a = 0$ y $b = 1$ determinar los vectores autoconjugados.*

Para $a = 0$ y $b = 1$ es una forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Por tanto los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + z = 0, \quad y + z = 0, \quad x + y + 2z = 0.$$

La última ecuación es suma de las otras dos; por tanto nos quedan dos ecuaciones implícitas independientes.

$$x + z = 0, \quad y + z = 0.$$

Resolviendo obtenemos las paramétricas:

$$x = \lambda, \quad y = \lambda, \quad z = -\lambda$$

Por lo que:

$$Autoconjug(f) = ker(f) = \mathcal{L}\{(1, 1, -1)\}.$$

(iv) *Para $a = 2$ dar una base de vectores conjugados.*

Una base de vectores conjugados es aquella respecto a la cuál la matriz asociada a la forma cuadrática es diagonal. Entonces basta aplicar las mismas operaciones fila que hicimos en la diagonalización en (ii) sobre la identidad, para obtener una matriz cuyas filas son las coordenadas de la base buscada respecto de la base canónica:

$$Id \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La base pedida es:

$$\{(1, 0, 0), (-1, 0, 1), (-3, 1, 1)\}$$

(v) *Para $a = 1$ y $b = 0$ hallar la matriz asociada a f respecto de la base $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 0, 0)\}$.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB}$$

donde:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$F_B = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 6 & 9 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

8.– *En* $\mathbb{R}^3$ *se considera una forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$. *Se sabe que:*

- $B = \{(1,0,1),(1,0,0),(0,1,0)\}$ *es una base de vectores conjugados.*

- $(1,2,3)$ *es autoconjugado,* $(1,0,1) \in ker(w)$ *y* $w(2,1,0) = 3$.

(i) *Hallar la matriz asociada a* w *respecto de la base canónica.*

Comenzamos hallando la matriz asociada en la base B. Como ésta es de vectores conjugados, la matriz asociada es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}.$$

Para aplicar las otras condiciones usando esta matriz pasamos los vectores dados a la base B. Tenemos que:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}_B, \quad M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \quad M_{BC}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}_B.$$

Entonces:

- Si $(1,2,3)$ es autoconjugado:

$$0 = w(1,2,3) = w((3,-2,2)_B) = (3,-2,2)F_B(3,-2,2)^t = 9a + 4b + 4c.$$

- Si $(1,0,1) = (1,0,0)_B \in ker(w)$ entonces:

$$(1,0,0)F_B = (0,0,) \quad \Rightarrow \quad a = 0.$$

- Si $w(2,1,0) = 3$ entonces:

$$3 = w(2,1,0) = w((0,2,1)_B) = (0,2,1)F_B(0,2,1)^t \quad \Rightarrow \quad 4b + c = 3.$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones se obtiene $a = 0$, $b = 1$, $c = -1$. Finalmente hacemos un cambio de base:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.*

La matriz F_B ya es diagonal. Vemos que su rango es 2 y su signatura $(1,1)$. Por tanto la forma cuadrática es degenerada e indefinida.

(iii) *Si f es la forma polar asociada a w calcular $f((1,1,0),(0,1,1))$.*

Simplemente:

$$f((1,1,0),(0,1,1)) = (1,1,0)F_C(0,1,1)^t = -2.$$

(iv) *Hallar, si existe, una base B' tal que la matriz asociada a w en tal base sea:*

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que la matriz $F_{B'}$ tiene la misma signatura que la forma cuadrática dada si es posible encontar la base con la matriz asociada indicada. Como el cambio de base de una matriz asociada a una forma cuadrática se realiza por congruencia, tratamos de llegar de la matriz F_B a $F_{B'}$ haciendo operaciones elementales fila y las mismas en columna:

$$F_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}}\xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matriz de cambio de base $M_{BB'}$ se obtiene haciendo las mismas operaciones columna sobre la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M_{BB'}.$$

Por tanto:

$$M_{CB'} = M_{CB}M_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Y así la base pedida es la formada por las columnas de esta matriz:

$$B' = \{(0,1,0),(1,0,0),(1,0,1)\}.$$

9.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:*

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) *Probar que ϕ es simétrica.*

Hay que comprobar que para dos polinomios cualesquiera $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple que:

$$\phi(p(x),q(x)) = \phi(q(x),p(x)).$$

Pero:

$$\phi(p(x),q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 q'(x)p(x)dx + \int_0^1 q(x)p'(x)dx =$$
$$= \int_0^1 q(x)p'(x)dx + \int_0^1 q'(x)p(x)dx = \phi(q(x),p(x)$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada en tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,x) & \phi(1,x^2) \\ \phi(x,1) & \phi(x,x) & \phi(x,x^2) \\ \phi(x^2,1) & \phi(x^2,x) & \phi(x^2,x^2) \end{pmatrix}.$$

Para hacer las "cuentas" de manera más rápida podemos hacer dos observaciones:

- Por ser ϕ simétrica:

$$\phi(x,1) = \phi(1,x), \quad \phi(x^2,1) = \phi(1,x^2), \quad \phi(x^2,x) = \phi(x,x^2).$$

- Por las propiedades del cálculo diferencial e integral:

$$\int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 (p(x)q(x))'dx = p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \phi(1,1) &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 = 0. \\ \phi(1,x) &= 1 \cdot 1 - 1 \cdot 0 = 1. \\ \phi(1,x^2) &= 1 \cdot 1^2 - 1 \cdot 0^2 = 1. \\ \phi(x,x) &= 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1. \\ \phi(x,x^2) &= 1 \cdot 1^2 - 0 \cdot 0^2 = 1. \\ \phi(x^2,x^2) &= 1^2 \cdot 1^2 - 0^2 \cdot 0^2 = 1. \end{aligned}$$

y así:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) *Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.*

Para calcular el rango y signatura diagonalizamos la matriz asociada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \xrightarrow{\nu_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{\nu_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\nu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Por tanto $rango(\phi) = 2$ y $sign(\phi) = (1, 1)$.

(iv) *Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.*

Basta realizar sobre la matriz identidad la mismas operaciones fila que hemos hecho para diagonalziar la matriz asociada; las filas de la matriz que obtengamos son las coordenadas de los vectores de la base buscada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

La base buscada está formada por tanto por los polinomios:

$$\{0 \cdot 1 + 0 \cdot x + 1 \cdot x^2, 0 \cdot 1 + 1 \cdot x - 1 \cdot x^2, 1 \cdot 1 + 0 \cdot x - 1 \cdot x^2\} = \{x^2, x - x^2, 1 - x^2\}.$$

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

12.– *Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.*

Si fuesen dependientes, serían uno múltiplo de otro, es decir tendríamos, para algún $\lambda \in R$:

$$u = \lambda v \quad \Rightarrow \quad 1 = w(u) = w(\lambda v) = \lambda^2 w(v) = -1 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -1$$

Imposible. Por tanto necesariamente son dependientes.

Por otra parte es siempre indefinida porque existen vectores para los cuales la forma cuadrática toma valores positivos (por tano no es definida ni semidefinida negativa) y valores negativos (por tanto no es definida ni semidefinida positiva).

13.– *En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^2$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).*

La matriz asociada a una forma cuadrática es siempre simétrica. Su carácter queda determinado por su signatura. Esta puede obtenerse diagonalizando la matriz por congruencia.

(i) *w es definida positiva.*

Podemos tomar $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Es definida positiva porque su signatura es $(2, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *w es semidefinida negativa.*

Por ejemplo $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Es semidefinida negativa porque su signatura es $(0, -1)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *w es indefinida.*

$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Es indefinida porque su signatura es $(1, 1)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

14.– *Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Una forma cuadrática definida positiva nunca tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Una forma cudrática w definida positiva cumple que:

$$w(\vec{u}) > 0 \qquad \forall \vec{u} \neq \vec{0}.$$

Si $\vec{u}$ es autoconjugado entonces $w(\vec{u}) = 0$ y por tanto necesariamente es el vector nulo.

(ii) *La matriz asociada a una forma cuadrática definida negativa siempre tiene determinante negativo.*

FALSO. Basta tomar la forma cuadrática en $\mathbb{R}^2$ con matriz asociada $-Id$. Su determinante es 1 y su signatura $(0, 2)$. Por tanto es definida negativa y tiene determinante positivo.

(iii) *Una forma cuadrática indefinida siempre tiene vectores autoconjugados no nulos.*

VERDADERO. Si es indefinida existe una base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ respecto a la cual la matriz asociada A es diagonal, con algún término igual a 1 y otro igual a -1, en particular si $a_{ii} = 1$ y $a_{jj} = -1$ entonces:

$$w(\vec{u}_i + \vec{u}_j) = 1^2 \cdot a_{ii} + 1^2 \cdot a_{jj} = 0$$

y por tanto $\vec{u}_i + \vec{u}_j$ es autoconjugado no nulo.

(iv) *La suma de una forma cuadrática indefinida y una definida positiva nunca es definida negativa.*

VERDADERO. Sea w_1 indefinida y w_2 definida positiva. Por ser w_1 indefinida existe un vector $\vec{u}$ no nulo tal que $w_1(\vec{u}) > 0$. Por ser w_2 definida positiva $w_2(\vec{u}) > 0$ y por tanto:

$$(w_1 + w_2)(\vec{u}) = w_1(\vec{u}) + w_2(\vec{u}) > 0$$

y así $w_1 + w_2$ no es definida negativa.

15.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(iv) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ *y* $\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ *pueden ser matrices asociadas a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.*

VERDADERO. Son matrices asociadas a una misma forma cuadrática precisamente si tienen la misma signatura. Para comprobarlo las diagonalizamos por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix}$$

Vemos que ambas tienen signatura $(1, 1)$. Por tanto son congruentes y corresponde a una misma forma cuadrática respecto a diferentes bases.

(v) *Si* $A \in \mathcal{M}_{2015\times 2015}(\mathbb{R})$ *es la matriz asociada a una forma cuadrática semidefinida negativa, entonces* $det(A) < 0$.

FALSO. De hecho por ser semidefinida en la forma diagonal siempre aparece algún cero. El rango de la forma cuadrática no es máximo y así el determinante de cualquier matriz asociada es nulo (y NO menor que cero).

I.– *Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.*

(a) *Demostrar que ϕ es bilineal.*

Sean $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in E$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}')g(\bar{y})$$

Por la linealidad de f queda:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}', \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y})$$

Análogamente utilizando la linealidad de g se ve que:

$$\phi(\bar{x}, \lambda\bar{y} + \mu\bar{y}') = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y}')$$

y por tanto la aplicación es bilineal.

(b) *Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.*

Supongamos que las matrices de f y g son respectivamente A y B, con:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $a_i = f(\bar{e}_i)$ y $b_i = g(\bar{e}_i)$.

La matriz asociada a ϕ en la base canónica es:

$$C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_i)g(\bar{e}_j) = a_i b_j$$

y matricialmente puede escribirse como:

$$C = A \cdot B^t$$

(c) *¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?*

No tiene porque ser simétrica ni antisimétrica. Por ejemplo tomando f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas por la matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matriz de ϕ queda:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica ni antisimétrica.

II.– *En el espacio vectorial real* $\mathbb{R}^3$*, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:*

- *el vector* $(1,1,0)$ *es autoconjugado,*
- *el vector* $(2,0,1)$ *pertenece al núcleo,*
- *la forma cuadrática aplicada en* $(0,1,0)$ *da* 2 *y*
- *la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores* $(0,1,0)$ *y* $(1,1,0)$ *da* -1.

Consideramos la base $B = \{(1,1,0),(2,0,1),(0,1,0)\}$. Primero hallamos la matriz de la forma cuadrática (o equivalentemente de la polar asociada) con respecto a esta base. Si llamamos f a la forma polar asociada, tenemos:

- Por la primera condición, $f((1,1,0),(1,1,0)) = 0$.

- Por la segunda condición, $f((2,0,1),\bar{u}) = 0$, para cualquier $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. En particular, $f((2,0,1),(1,1,0)) = f((2,0,1),(2,0,1)) = f((2,0,1),(0,1,0)) = 0$.

- Por la tercera condición $f((0,1,0),(0,1,0)) = 2$.

- Finalmente por la cuarta condición $f((0,1,0),(1,1,0)) = -1$.

Obtenemos así la matriz de la forma cuadrática en la base B (teniendo en cuenta que es simétrica):

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0),(1,1,0)) & f((1,1,0),(2,0,1)) & f((1,1,0),(0,1,0)) \\ f((2,0,1),(1,1,0)) & f((2,0,1),(2,0,1)) & f((2,0,1),(0,1,0)) \\ f((0,1,0),(1,1,0)) & f((0,1,0),(2,0,1)) & f((0,1,0),(0,1,0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora teniendo en cuanta que la matriz para pasar de coordenadas de la base canónica a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Hallamos la matriz que nos piden haciendo el cambio de base de la anterior:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 6 \\ -8 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– *De una forma cuadrática* ω *en* $\mathbb{R}^3$ *se sabe:*

- *es semidefinida positiva.*
- *el vector* $(1,0,1)$ *pertenece al núcleo.*
- *el vector* $(0,1,1)$ *es autoconjugado.*
- *la forma cuadrática aplicada sobre el vector* $(1,1,1)$ *vale* 1.

Hallar la matriz asociada a ω *respecto de la base canónica.*

Como nos dan los datos en función de los vectores:

$$B = \{u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1), u_3 = (1,1,1)\}$$

hallaremos primeo la matriz respecto de la base que forman. Recordemos que dicha matriz es simétrica y:

$$(F_B)_{ij} = f(u_i, u_j)$$

siendo f la forma bilineal asociada a la forma cuadrática. Entonces:

- el vector $(1,0,1)$ pertenece al núcleo. Quiere decir que $f(u_1,v)=0$ para cualquier vector v. Por tanto la matriz es de la forma:

$$F_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&*&*\\0&*&*\end{pmatrix}.$$

- el vector $(0,1,1)$ pertenece al núcleo. Quiere decir que $f(u_2,u_2)=0$. La matriz es de la forma:

$$F_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&*\\0&*&*\end{pmatrix}.$$

- la forma cuadrática aplicada sobre el vector $(1,1,1)$ vale 1. quiere decir que $f(u_3,u_3)=1$. La matriz es de la forma:

$$F_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&b\\0&b&1\end{pmatrix}.$$

Finalmente usamos que es semidefinida positiva. Para ello la diagonalizamos por congruencia y comprobamos que no aparezcan términos negativos en la diagonal:

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&b\\0&b&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}0&0&0\\0&-b^2&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Necesariamente $-b^2\geq 0$ y consecuentemente $b=0$.

Deducimos que:

$$F_B=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Para conlcuir hacemos un cambio de base:

$$F_C=M_{BC}^tF_BM_{BC}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&1&-1\\-1&-1&1\end{pmatrix}.$$

donde

$$M_{BC}=M_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}.$$

IV.– *Fijados $a,b\in\mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:*

$$w:\mathbb{R}^4\longrightarrow\mathbb{R},\quad w(x,y,z,t)=x^2+ay^2+2bxy+2byt+2bzt$$

(i) *Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F=\begin{pmatrix}1&b&0&0\\b&a&0&b\\0&0&0&b\\0&b&b&0\end{pmatrix}$$

Para hallar su signatura y clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F \xrightarrow[H_{21}(-b)]{\mu_{21}(-b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora distinguimos dos casos:

i) Si $a \neq b^2$, continuamos:

$$\xrightarrow[H_{32}(-b/(a-b^2))]{\mu_{32}(-b/(a-b^2))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & \dfrac{-b^2}{a-b^2} \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{34}]{\mu_{34}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Dos subcasos:

i.a) Si $b \neq 0$:

$$\xrightarrow[H_{43}((a-b^2)/b)]{\mu_{43}((a-b^2)/b)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{-b^2}{a-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b^2 \end{pmatrix}$$

i.b) Si $b = 0$, directamente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si $a = b^2$, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{24}(1)]{\mu_{24}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & b & b \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{42}(-1/2)]{\substack{\mu_{32}(-1/2) \\ H_{32}(-1/2) \\ \mu_{42}(-1/2)}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & b/2 \\ 0 & 0 & b/2 & -b/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{43}(1)]{\mu_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los casos que hemos ido distinguiendo dependen de las condiciones $a = b^2$ y $b = 0$. Por tanto hacemos la siguiente tabla:

	$b<0$		$b=0$		$b>0$	
$a>b^2$	$sig(3,1)$	$rg=4$	$sig(2,0)$	$rg=2$	$sig(3,1)$	$rg(4)$
$a=b^2$	$sig(2,1)$	$rg=3$	$sig(1,0)$	$rg=1$	$sig(2,1)$	$rg(3)$
$a<b^2$	$sig(2,2)$	$rg=4$	$sig(1,1)$	$rg=2$	$sig(2,2)$	$rg(4)$

y la consiguiente clasificación:

	$b<0$	$b=0$	$b>0$
$a>b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	no degenerada, indefinida
$a=b^2$	degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	degenerada, indefinida
$a<b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, indefinida	no degenerada, indefinida

(ii) *Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.*

Hay tes casos:

i) $b \neq 0$ y $a = b^2$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x + by = 0, \quad bx + b^2y + bt = 0, \quad bt = 0, \quad by + bz = 0.$$

Como $b \neq 0$ resulta:

$$ker(w) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | z = -y, \quad x = -by, \quad t = 0\} = \mathcal{L}\{(-b,1,-1,0)\}$$

ii) $b = 0$ y $a \neq 0$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x = 0, \quad ay = 0$$

Como $a \neq 0$ resulta:

$$ker(w) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = 0\} = \mathcal{L}\{(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

iii) $b = a = 0$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$ker(w) = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0\} = \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\}$$

(iii) *Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1,1,0,0),(1,0,1,1))$.*

Simplemente:

$$f((1,1,0,0),(1,0,1,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

V.– *En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y) = x^2 + 2xy - y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v) = 2uv + v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.*

La matriz de la forma cuádratica en la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \omega((1,0)) & \frac{1}{2}(\omega((1,1) - \omega(1,0) - \omega(0,1)) \\ \frac{1}{2}(\omega((1,1) - \omega(1,0) - \omega(0,1)) & \omega(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: En general si la expresión de una forma cuadrática esta dada a partir de las coordenadas $(x_1, \ldots, x_n)$ de un vector con respecto a una base, la expresión matricial se obtiene tomando en la diagonal los coefientes de los términos $(x_i)^2$ y en la posición ij, con $i \neq j$, los coeficientes de los términos $x_i x_j$ divididos por dos.

Análogmante la matriz de ω con respecto a la nueva base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de ver si ambas matrices son congruentes. Para ello diagonalizamos ambas por congruencia, calculando además las matrices de paso. Hacemos operaciones por filas y las simétricas por columnas. Para tener además la matriz de paso hacemos también las operaciones fila sobre la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y para la segunda matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se deduce que:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de una matriz a otra es por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en función de la primera se escribe:

$$\bar{v}_1 = (1 - 1/\sqrt{2})\bar{e}_1 + (1/\sqrt{2})\bar{e}_2$$
$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1$$

VI.– *Para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ como,*

$w(x, y, z) = x^2 + 2axy + 4axz + az^2$.

(i) *Calcular la matriz asociada a w en la base canónica y en la base $B = \{(1, 0, 1), (0, 0, 1), (-1, 0, 1)\}$.*

La matriz asociada en la base canónica, trasladando adecuadamente los coeficientes de la expresión dada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a & 2a \\ a & 0 & 0 \\ 2a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Para hallar la matriz en una base B aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_B = (M_{CB})^t F_C M_{CB}$$

Ahora bien, los vectores dados no forman base ya que su matriz de coordenadas (en columna) tiene rango 2, por tener una fila de ceros:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

así que con esos datos no tendría sentido el cálculo.

(ii) *Clasificar la forma cuadrática en función de los valores de a, indicando su rango y signatura.*

Para clasificarla diagonalizamos la matriz asociada por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-a)}{\longrightarrow} \overset{H_{31}(-2a)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-2a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & -2a^2 \\ 0 & -2a^2 & a-4a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Los valores de a que delimitan las reginoes con posiblemente distinta signatura son aquellos donde se anula algún término de la forma diagonal, es decir, en este caso para $a = 0$.

Por tanto distinguimos lo siguiente casos:

a	signatura	rango	clasificación
< 0	$(1, 2)$	3	no degenerada e indefinida
$= 0$	$(1, 0)$	3	degenerada y semidefinida positiva
> 0	$(2, 1)$	3	no degenerada e indefinida

(iii) *Para $a = 1$ calcular una base de vectores conjugados.*

Que la base B' sea de vectores conjugados equivale a que la matriz asociada en esa base B' sea diagonal. Por tanto $M_{CB'}$ es la matriz de paso por columnas de la congruencia realizada en el apartado anterior. Realizamos para hallarla las mismas operaciones columna que hicimos en ese proceso pero ahora sobre la indentidad:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la base pedida es:

$$B' = \{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (0, -2, 1)\}$$

(iv) *Para $a = 0$ calcular el núcleo de w y los vectores autoconjugados.*

Vimos que para $a = 0$ la forma cuadrática es semidefinida positiva. En ese caso núcelo y vectores autoconjugados coinciden.

$$\begin{aligned} autoconj(w) = ker(w) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | F_c(x, y, z)^t = (0, 0, 0)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

VII.– *Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) *Probar que f es una forma bilineal simétrica.*

Primero veamos que es simétrica, es decir que cumple que:

$$f(p(x), q(x)) = f(q(x), p(x)).$$

Pero:

$$f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1) = q'(1)p'(1) + q(-1)p(-1) = f(q(x), p(x)).$$

Ahora por ser simétrica para la bilinealidad basta con comprobar la linealidad en la primera componente:

$$f(ap(x) + br(x), q(x)) = af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)).$$

Pero:

$$\begin{aligned} f(ap(x) + br(x), q(x)) &= (ap(x) + br(x))'(1)q'(1) + (ap(-1) + br(-1))q(-1) = \\ &= (ap'(1) + br'(1))q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= ap'(1)q'(1) + br'(1)q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= a(p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)) + b(r'(1)q'(1) + r(-1)q(-1)) = \\ &= af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)). \end{aligned}$$

ii) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

La base canónica es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada respecto de tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\ f(1,x) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1 \\ f(1,x^2) &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)^2 = 1 \\ f(x,x) &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2 \\ f(x,x^2) &= 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)^2 = 1 \\ f(x^2,x^2) &= 2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot (-1)^2 = 5 \end{aligned}$$

y el resto se completa por simetría. Obtenemos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

iii) *Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.*

Cambiar de base la matriz asociada equivale a diagonalizarla por congruencia (haciendo mismas operaciones fila y columna); la matriz de paso nos devuelve las coordenadas de la nueva base en función de la inicial:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{H_{21}(1)}\xrightarrow{H_{31}(-1)}\xrightarrow{\nu_{21}(1)}\xrightarrow{\nu_{31}(-1)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-2)}\xrightarrow{\nu_{32}(-2)} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto deducimos que en la base $B' = \{1, 1+x, -3-2x+x^2\}$ la matriz asociada es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv) *Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.*

El rango de la forma cuádratica asociada coincide con el rango de la matriz asociada en cualquier base. Vemos que:

$$rango(F_{B'}) = 2.$$

La signatura indica el número de términos positivos y negativos de la diagonal en la forma diagonalizada:

$$signatura = (2, 0).$$

VIII.– *En $\mathbb{R}^3$ hallar la matriz con respecto a la base canónica $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ de una aplicación bilineal f verificando:*

- f es simétrica.

- $f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_3, \bar{e}_3)$.

- Los vectores $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ son conjugados.

- $f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, \bar{e}_3) = y$.

- La forma cuadrática asociada a f y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ tiene rango 1 y restringida al subespacio $\mathcal{L}\{\bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es semidefinida negativa.

Sea F la matriz que buscamos. Vamos imponiendo las condiciones que nos dan. Recordemos que el término en la posición i, j de F es $F_{ij} = f(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$:

- Por ser f simétrica, la matriz F es simétrica:

$$F = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$$

- Como $f(\bar{e}_2, \bar{e}_2) = f(\bar{e}_3, \bar{e}_3)$ entonces $d = f$.

- Que $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ sean conjugados significa que $f(\bar{e}_1, \bar{e}_2) = 0$, luego, $b = 0$.

- Como $f(x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2, \bar{e}_3) = y$, para $x = 1$, $y = 0$ vemos que $f(\bar{e}_1, \bar{e}_3) = 0$ y para $x = 0$, $y = 1$ vemos que $f(\bar{e}_2, \bar{e}_3) = 1$; por tanto $c = 0$ y $e = 1$.

Tenemos ahora una matriz:

$$F = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & d & 1 \\ 0 & 1 & d \end{pmatrix}$$

- La matriz de la restricción de f a $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

Para que tenga rango 1, ha de cumplirse $a = 0$ y $d \neq 0$ ó $a \neq 0$ y $d = 0$.

- La restricción a $\mathcal{L}\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} d & 1 \\ 1 & d \end{pmatrix}$$

Para que sea semidefinida su determinante debe de ser 0. Luego $d^2 - 1 = 0$ y $d = \pm 1$. Pero si $d = 1$ queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y es semidefinida positiva.

Si $d = -1$ queda:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y es semidefinida negativa.

Deducimos que $d = -1$ y $a = 0$ y la matriz F en definitiva es:

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

IX.– *Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es*

$$\omega(\bar{x}) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_4)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_2x_4 - 4x_3x_4.$$

(a) *Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.*

La matriz asociada a la forma cuadrática que nos dan es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

la diagonalizamos por congruencia:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{21}(-1)\nu_{21}(-1) \\ H_{41}(1) \quad \nu_{41}(1) \\ \longrightarrow \ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{23}(-1/2) \\ \nu_{23}(-1/2) \\ \longrightarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} H_{32}(1) \quad \nu_{32}(1) \\ H_{42}(-1)\nu_{42}(-1) \\ \longrightarrow \ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} H_{43}(-1)\nu_{43}(-1) \\ \longrightarrow \ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos autovalores positivos, uno negativo y otro nulo. Por tanto su rango es 3 y su signatura $(2,1)$. Es por tanto indefinida degenerada. La forma en suma de cuadradados en coordenadas en la base $\{(1,0,0,0),(-1,1,-1/2,0),(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$ es:

$$\omega(y_1,y_2,y_3,y_4) = 2(y_1)^2 + (y_2)^2 - (y_3)^2$$

(b) *Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.*

Como la signatura es $(2,1)$ y la dimensión del espacio es 4, la máxima dimensión posible para un subespacio en el cual la restricción de ω es semidefinida negativa es 2. Tomamos el subespacio generado por los correspondientes vectores relativos al valor negativo y nulo de la diagonal $\{(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$.

X.– *Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular el rango y la signatura de ω.*

Diagonalizamos la matriz mediante operaciones elementales en fila y sus simétrica en columna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es 4 y la signatura $(2,2)$.

(b) *Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.*

Teniendo en cuenta que en la matriz que nos dan aparecen ceros en la diagonal, basta tomar, por ejemplo, $\bar{v} = (1,0,0,0)$.

(c) *Considérese el subespacio vectorial*

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / \ x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

Una base de V está formada por los vectores $\{(1,1,0,0),(0,2,1,-1)\}$. La matriz de Ω en dicha base es:

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0,0),(1,1,0,0)) & f((1,1,0,0),(0,2,1,-1)) \\ f((1,1,0,0),(0,2,1,-1) & f((0,2,1,-1),(0,2,1,-1) \end{pmatrix}$$

donde f es la forma bilineal asociada a ω, es decir, $f(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u})A\{\bar{v}\}$. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2001)

XI.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) *Probar que es una forma bilineal simétrica.*

Veamos primero que es lineal en la primera componente. Sean $c, d \in R$, $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(cp_1(x) + dp_2(x), q(x)) &= (cp_1(a) + dp_2(a))q(-a) + (cp_1(-a) + dp_2(-a))q(a) = \\ &= cp_1(a)q(-a) + dp_2(a)q(-a) + cp_1(-a)q(a) + dp_2(-a)q(a) = \\ &= c(p_1(a)q(-a) + p_1(-a)q(a)) + d(p_2(a)q(-a) + p_2(-a)q(a)) = \\ &= cf(p_1(x), q(x)) + df(p_2(x), q(x)) \end{aligned}$$

Además es simétrica:

$$f(p(x), q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a) = q(a)p(-a) + q(-a)p(a) = f(q(x), p(x)).$$

Por tanto de ambas cosas deducimos que también es lineal en la segunda componente y así es bilineal simétrica.

ii) *Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

El espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3. Para que tres vectores formen base basta que sean independientes; equivalentemente basta que la matriz de coordenadas respecto de la base canónica tenga determinante no nulo. La base canónica es:

$$C = \{1, x, x^2\}$$

y

$$(x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2 \equiv (a^2, -2a, 1), \quad x^2 \equiv (0,0,1), \quad (x+a)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \equiv (a^2, 2a, 1).$$

Entonces:

$$det M_{CB_a} = det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4a^3.$$

Deducimos que B_a es base si y sólo si $a \neq 0$.

iii) *Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a.*

Tiene sentido cuando B_a es base, es decir, $a \neq 0$. Con respecto a la base canónica la matriz asociada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base B_a:

$$F_{B_a} = M_{CB_a}^t F_C M_{CB_a} = \begin{pmatrix} 0 & 4a^4 & 16a^4 \\ 4a^4 & 2a^4 & 4a^4 \\ 16a^4 & 4a^4 & 0 \end{pmatrix},$$

donde:

$$M_{CB_a} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.*

Diagonalizamos la matriz asoicada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-a^2)\mu_{31}(-a^2)}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

- Si $a = 0$ el rango es 1 y la signatura $(1, 0)$.

- Si $a \neq 0$ el rango es 2 y la signatura $(1, 1)$.

XII.– *Sean $w_1, w_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dos forma cuadráticas semidefinidas positivas. Razonar la falsedad o veracidad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *$w_1 + w_2$ es semidefinida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ambas tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto son semidefinidas positivas; sin embargo su suma es la identidad, que es definida positiva.

(ii) *$-w_1 - w_2$ no es indefinida.*

VERDADERO. Por ser w_1, w_2 semedefinidas positivas, se tiene:

$$w_1(u), w_2(u) \geq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n.$$

Entonces:

$$-w_1(u) - w_2(u) \leq 0, \qquad \forall u \in \mathbb{R}^n$$

y por tanto $-w_1 - w_2$ siempre es definida negativa o semidefinida negativa.

(iii) *$w_1 + w_2$ es definida positiva.*

FALSO. Como contraejemplo basta tomar dos formas cuadrátricas en $\mathbb{R}^2$ con matrices asociadas respecto de la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ambas y su suma tienen signatura $(1, 0)$ y por tanto todas son semidefinidas positivas.

XIII.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:*

$$\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

Escribimos la matriz asociada a ω con respecto a la base canónica. Para clasificarla la diagonalizaremos por congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$ podemos hacer:

$$A \overset{H_{31}(1/a)\nu_{31}(1/a)}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a - 1/a \end{pmatrix}$$

Por el contrario si $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

En ambos casos b es uno de los elementos de la diagonal. Los otros dos dependen de a. Además $a - 1/a$ se anula cuando $a = 1$ o $a = -1$. Teniendo en cuenta todo esto, distinguimos las siguientes posibilidades:

- Si $b > 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (3, 0)$ y es definida positiva (no degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (2, 1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 3$, signatura $(1, 2)$ y es indefinida (no degenerada).

- Si $b = 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 1$, $signatura = (1, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 1$, signatura $(0, 1)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0, 2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

- Si $b < 0$ y:

  $a > 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (2, 1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (1, 2)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0, 2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

  $a < -1$, entonces $rango = 3$, signatura $(0, 3)$ y es definida negativa (no degenerada).

XIV.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:*

$$\omega_a(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

Escribimos las matrices asociadas a las formas cuadráticas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_a = \begin{pmatrix} 5 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla las diagonalizamos por congruencia:

$$Q_a \overset{H_{12}}{\underset{\nu_{12}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-a)H_{31}(1)}{\underset{\nu_{21}(-a)\nu_{31}(1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 - a^2 & 1 + a \\ 0 & 1 + a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{23}}{\underset{\nu_{23}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 + a \\ 0 & 1 + a & 5 - a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1-a)}{\underset{\nu_{32}(-1-a)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2 - 2a + 4 \end{pmatrix}.$$

Para saber que intervalos hemos de estudiar vemos cuando se anulan los valores de la diagonal:

$$-2a^2 - 2a + 4 = 0 \iff a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -2 \quad \text{ó } a = 1.$$

Distinguimos por tanto los siguientes casos:

VALOR DE a	SIGNATURA	RANGO	TIPO
$a \in (-\infty, -2)$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada
$a = -2$	$(2, 0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (-2, 1)$	$(3, 0)$	3	definida positiva, no degenerada
$a = 1$	$(2, 0)$	1	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (1, \infty)$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada

XV.– *Consideramos el espacio vectorial* $\mathbb{R}^2$*, la forma bilineal* $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *y la base* $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$*. Supongamos que*

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$*. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:*

(i) *Se verifica que* $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.

Verdadero. Basta tener en cuenta que:

$$f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f((1, 0)_B, (1, 1)_B) = (1, 0)F_B(1, 1)^t = a + 1.$$

Por tanto la afirmación es cierta.

(ii) *Si* $a = -2$*, entonces* f *es antisimétrica.*

Falso. Si $a = -2$ la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es una matriz antisimétrica porque no tiene ceros en la diagonal y por tanto $F^t \neq -F$. Deducimos entonces que la correspondiente forma bilineal no es antisimétrica.

(iii) *Si* $\vec{v} \neq \vec{0}$*, entonces* $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.

Falso. Si $det(F_B) = 0$ entonces existen vectores no nulos tales que $\vec{v}F_V = \vec{0}$. Y por tanto $f(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. En nuestro caso:

$$det(F_B) = 1 - 2a.$$

Entonces si $a = -1/2$ y tomamos $\vec{v} = (-2, 1)$ se tiene:

$$f(\vec{v}, \vec{v}) = (-2, 1)F_B(-2, 1)^t = 0.$$
