ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la Práctica 1.1

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas — (Curso 2012–2013)

1.– *Comprobar si las siguientes aplicaciones son o no bilineales y en las que resulten serlo, dar la matriz que las representa en las bases canónicas correspondientes. Decidir también si las formas bilineales son simétricas o antisimétricas.*

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = 2x^1y^2 - 3x^1y^1$

Dados $(x^1, x^2), (x'^1, x'^2), (y^1, y^2), (y'^1, y'^2) \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Basta comprobar que:

$$f(\lambda(x^1, x^2) + \mu(x'^1, x'^2), (y^1, y^2)) = \lambda f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) + \mu f((x'^1, x'^2), (y^1, y^2))$$
$$f((x^1, x^2), \lambda(y^1, y^2) + \mu(y'^1, y'^2)) = \lambda f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) + \mu f((x^1, x^2), (y'^1, y^2))$$

Haciendo "cuentas" vemos que SI es BILINEAL. Otra manera es tratar de calcular la matriz A en la base canónica como si ya supiésemos que es bilineal y luego ver que se expresa de la forma:

$$f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

La matriz A es:

$$A = \begin{pmatrix} f((1,0),(1,0)) & f((1,0),(0,1)) \\ f((0,1),(1,0)) & f((0,1),(0,1)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y efectivamente f se escribe como:

$$f((x^1, x^2), (y^1, y^2)) = \begin{pmatrix} x^1 & x^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \end{pmatrix}$$

Vemos que la matriz no es simétrica ni antisimétrica por tanto la forma bilineal NO es SIMETRICA y NO es ANTISIMETRICA.

(c) $h : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h((x^1, x^2, x^3), (y^1, y^2, y^3)) = 5x^1y^1 + 4x^1y^2 + 1 - x^2y^1 + 5x^3y^1$

NO es BILINEAL porque el cero no va al cero, es decir:

$$h((0,0,0),(0,0,0)) = 1$$

3.– *En un espacio vectorial real V y referido a la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se tiene la forma cuadrática $\omega : V \to \mathbb{R}$ dada por:*

$$\omega(x, y, z) = 3y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz$$

Se pide:

(a) *Una base del núcleo de la forma cuadrática.*

La matriz asociada a la forma cuádratica en la base dada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

El núcleo de ω son los vectores (x, y, z) que verifican:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 3y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \\ -x - 2y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3y - z = 0 \\ 3x + 3y - 2z = 0 \end{cases}$$

Por tanto una base del núcleo es $\{(1,1,3)\}$.

(b) *Todos los vectores autoconjugados.*

Los vectores autoconjugados son aquellos (x,y,z) que verifican:

$$\omega(x,y,z) = 0 \iff 3y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz = 0$$

Método I: Operando vemos que:

$$\begin{aligned} 3y^2 + z^2 + 6xy - 2xz - 4yz &= (3y^2 + z^2 - 4yz) + 2x(3y - z) = \\ &= (3y - z)(y - z) + 2x(3y - z) = (3y - z)(2x + y - z) \end{aligned}$$

Es decir los vectores autoconjugados están en la unión de los subespacios:

$$\begin{array}{l} U_1 = \{(x,y,z) \,/\, 3y - z = 0\} = \{(1,0,0),(1,1,3)\}; \\ U_2 = \{(x,y,z) \,/\, 2x + y - z = 0\} = \{(0,1,1),(1,1,3)\}; \end{array}$$

Método II: Si no somos capaces de expresar la ecuación anterior como producto de dos formas lineales, podemos diagonalizar la forma cuadrática para simplificar las operaciones. Realizamos operaciones elementales sobre filas y las análogas en las columnas de A. También sobre la matriz identidad para saber la base en la que la forma cuadrática tendrá la forma diagonal:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Es decir en la base $\{(0,0,1),(0,1,2),(1,1,3)\}$ la expresión de ω es:

$$\omega(x',y',z') = x'^2 - y'^2 = (x' + y')(x' - y')$$

Los vectores autoconjugados son los que verifican:

$$x' + y' = 0; \quad \text{ó} \quad x' - y' = 0;$$

Es decir los vectores autoconjugados están en la unión de los subespacios:

$$\begin{array}{l} V_1 = \{(x',y',z') \,/\, x' + y' = 0\} = \{(1,-1,0),(0,0,1)\}; \\ V_2 = \{(x',y',z') \,/\, x' - y' = 0\} = \{(1,1,0),(0,0,1)\}; \end{array}$$

Hacemos el cambio de base teniendo en cuenta que:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

Por tanto las ecuaciones anteriores quedan:

$$\begin{array}{l} V_1 = \{(x',y',z') \,/\, x' + y' = 0\} = \{(0,-1,-1),(1,1,3)\}; \\ V_2 = \{(x',y',z') \,/\, x' - y' = 0\} = \{(0,1,3),(1,1,3)\}; \end{array}$$

(Segundo examen parcial, junio 2003)

5.– *Sea V un espacio vectorial real de dimensión 3. Se conoce la matriz A de una forma cuadrática ω en función de un parámetro $a \in \mathbb{R}$.*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & -a & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular el rango y la signatura de ω en función de a.*

Diagonalizamos la matriz por congruencia:

$$A \overset{h_{31}(-a)v_{31}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 1 \\ 0 & 1 & -a^2 \end{pmatrix} \overset{h_{32}(1/a)v_{32}(1/a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -a & 0 \\ 0 & 0 & -a^2+1/a \end{pmatrix},$$

donde el último paso sólo puede darse si $a \neq 0$. El tercer término de la diagonal se anula si:

$$-a^2 + 1/a = 0 \iff a^3 = 1 \iff a = 1.$$

Si $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{h_{23}(1)v_{23}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \overset{h_{32}(-1/2)v_{23}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Distinguimos por tanto los siguientes casos:

- $a < 0$, obtenemos signatura $(2,1)$ y rango 3.
- $a = 0$, queda signatura $(2,1)$ y rango 3.
- $0 < a < 1$, queda signatura $(2,1)$ y rango 3.
- $a = 1$, obtenemos signatura $(1,1)$ y rango 2.
- $a > 1$, obtenemos signatura $(1,2)$ y rango 3.

(b) *Para aquellos valores de a para los cuales ω es degenerada, ¿hay algún vector autoconjugado que no esté en el núcleo?. Razona la respuesta.*

La forma cuadrática es degenerada cuando su rango no es máximo, es decir, cuando $a = 1$. En ese caso la forma diagonal obtenida es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Para saber en que base se obtiene esta forma diagonal, aplicamos las mismas operaciones fila sobre la identidad:

$$Id \overset{h_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{h_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

En esta base la forma cuadrática es:

$$\omega(x', y', z') = x'^2 - y'^2.$$

El núcleo son los vectores que multiplicados por A' dan $\bar{0}$. Queda:

$$Ker(\omega) = \{(x', y', z')_{B'} \,|\, x' = 0, \quad y' = 0\}.$$

Los vectores autoconjugados cumplen:

$$x'^2 - y'^2 = 0 \iff (x' - y')(x' + y') = 0.$$

Basta tomar entonces el vector autoconjugado $(1,1,1)_{B'}$ y que no está en el núcleo. En la base de partida queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6.– *Para cada número $a \in \mathbb{R}$, definimos la forma cuadrática $w_a : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$w_a(x, y, z, t) = ax^2 + (1-a)y^2 + az^2 + 2(1-a)xz + 2xt + 2zt + t^2.$$

(i) *Clasificar la forma cuadrátrica en función de a, indicando además su rango y signatura.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} a & 0 & 1-a & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1-a & 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla, teniendo en cuenta que las formas cuadráticas cambian de base por congruencia, la diagonalizamos haciendo exactamente las mismas operaciones elementales fila y columna:

$$F_C \xrightarrow{H_{14}} \xrightarrow{\nu_{14}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a & 1-a \\ 1 & 0 & 1-a & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{\nu_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\nu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & -a \\ 0 & 0 & -a & a-1 \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 1$ continuamos:

$$\xrightarrow{H_{43}(a/(a-1))} \xrightarrow{\nu_{43}(a/(a-1))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-1-\dfrac{a^2}{a-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dfrac{1-2a}{a-1} \end{pmatrix}$$

Si $a = 1$,

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{34}(1/2)} \xrightarrow{\nu_{34}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \xrightarrow{\nu_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para $a \neq 1$, los puntos críticos donde se anulan los términos de la diagonal y por tanto son puntos intermedios de cambio de signo son $a = 1$ y $a = 1/2$. Teniendo esto distinguimos los siguientes casos:

Parámetro	Signatura	Rango	Tipo	Degenerada
$a \in (-\infty, 1/2)$	$(2, 2)$	4	indefinida	no
$a = 1/2$	$(2, 1)$	3	indefinida	si
$a \in (1/2, 1)$	$(3, 1)$	4	indefinida	no
$a = 1$	$(2, 1)$	3	indefinida	si
$a \in (1, \infty)$	$(2, 2)$	4	indefinida	no

(ii) *Para $a = 1$ dar una base de vectores conjugados respecto de la forma cuadrátrica.*

Una base es de vectores conjugados si la matriz asociada a la forma cuadrática respecto a ella es diagonal. En nuestro caso ya hemos diagonalizado en el apartado anterior la matriz de la forma cuadrática. Las coordenadas de los vectores de la base en la cual la matriz diagonaliza se obtienen como filas de la matriz que resulta de hacer las mismas operaciones fila que hemos hecho anteriormente sobre la matriz identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{14}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{31}(-1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{H_{34}(1/2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 & -3/2 \\ 1/2 & 0 & -1 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Por tanto una base de vectores conjugados es:

$$B = \{(0,0,0,1), (0,1,0,0), (\frac{1}{2}, 0, 1, -\frac{3}{2}), (\frac{1}{2}, 0, -1, \frac{1}{2})\}.$$

(iii) *Para $a = 0$ sea f la forma bilineal simétrica asociada a w_0. Calcular $f((1,4,0,7),(2,0,1,1))$.*

La forma bilineal simétrica asociada a una forma cuadrátrica tiene su misma matriz asociada. Por tanto:

$$f(u,v) = (u)_C^t F_C (v)_C.$$

En nuestro caso:

$$f((1,4,0,7),(2,0,1,1)) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 30.$$

7.– *Fijados $a, b \in \mathbb{R}$ se definie la forma cuadrática:*

$$w : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad w(x,y,z,t) = x^2 + ay^2 + 2bxy + 2byt + 2bzt$$

(i) *Hallar el rango, signatura y clasificar w en función de los valores a y b.*

La matriz asociada a la forma cuadrática respecto de la base canónica es:

$$F = \begin{pmatrix} 1 & b & 0 & 0 \\ b & a & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar su signatura y clasificarla la diagonalizamos por congruencia:

$$F \overset{\substack{\mu_{21}(-b) \\ H_{21}(-b)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix}$$

Ahora distinguimos dos casos:

i) Si $a \neq b^2$, continuamos:

$$\overset{\substack{\mu_{32}(-b/(a-b^2)) \\ H_{32}(-b/(a-b^2))}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & b & \frac{-b^2}{a-b^2} \end{pmatrix} \overset{\substack{\mu_{34} \\ H_{34}}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b^2}{a-b^2} & b \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$$

Dos subcasos:

i.a) Si $b \neq 0$:

$$\overset{\substack{\mu_{43}((a-b^2)/b) \\ H_{43}((a-b^2)/b)}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-b^2}{a-b^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b^2 \end{pmatrix}$$

i.b) Si $b=0$, directamente queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si $a=b^2$, queda:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{24}(1)]{\mu_{24}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & b & b \\ 0 & b & 0 & b \\ 0 & b & b & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{H_{32}(-1/2)\\ \mu_{42}(-1/2)\\ H_{42}(-1/2)}]{\mu_{32}(-1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & b/2 \\ 0 & 0 & b/2 & -b/2 \end{pmatrix} \xrightarrow[H_{43}(1)]{\mu_{43}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -b/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Observamos que los casos que hemos ido distinguiendo dependen de las condiciones $a=b^2$ y $b=0$. Por tanto hacemos la siguiente tabla:

	$b<0$		$b=0$		$b>0$	
$a>b^2$	$sig(3,1)$	$rg=4$	$sig(2,0)$	$rg=2$	$sig(3,1)$	$rg(4)$
$a=b^2$	$sig(2,1)$	$rg=3$	$sig(1,0)$	$rg=1$	$sig(2,1)$	$rg(3)$
$a<b^2$	$sig(2,2)$	$rg=4$	$sig(1,1)$	$rg=2$	$sig(2,2)$	$rg(4)$

y la consiguiente clasificación:

	$b<0$	$b=0$	$b>0$
$a>b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	no degenerada, indefinida
$a=b^2$	degenerada, indefinida	degenerada, semidef. positiva	degenerada, indefinida
$a<b^2$	no degenerada, indefinida	degenerada, indefinida	no degenerada, indefinida

(ii) *Para aquellos valores para los cuáles la forma cuadrática es degenerada calcular una base del núcleo.*

Hay tes casos:

i) $b\neq 0$ y $a=b^2$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x+by=0, \quad bx+b^2y+bt=0, \quad bt=0, \quad by+bz=0.$$

Como $b\neq 0$ resulta:

$$ker(w)=\{(x,y,z,t)\in \mathbb{R}^4 | z=-y, \quad x=-by, \quad t=0\} = \mathcal{L}\{(-b,1,-1,0)\}$$

ii) $b=0$ y $a\neq 0$. El núcleo está formado por los vectores (x,y,z,t) tales que:

$$F_C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$x=0, \quad ay=0$$

Como $a \neq 0$ resulta:

$$ker(w) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = y = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

iii) $b = a = 0$. El núcleo está formado por los vectores (x, y, z, t) tales que:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$ker(w) = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$$

(iii) *Si $f : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal simétrica asociada a w, para $a = b = 1$ calcular $f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1))$.*

Simplemente:

$$f((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3.$$

8.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales. Consideramos la forma bilineal:*

$$\phi : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \phi(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx$$

(i) *Probar que ϕ es simétrica.*

Hay que comprobar que para dos polinomios cualesquiera $p(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ se cumple que:

$$\phi(p(x), q(x)) = \phi(q(x), p(x)).$$

Pero:

$$\begin{aligned} \phi(p(x), q(x)) &= \int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 q'(x)p(x)dx + \int_0^1 q(x)p'(x)dx = \\ &= \int_0^1 q(x)p'(x)dx + \int_0^1 q'(x)p(x)dx = \phi(q(x), p(x) \end{aligned}$$

(ii) *Hallar la matriz asociada a ϕ respecto de la base canónica.*

La base canónica de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada en tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} \phi(1,1) & \phi(1,x) & \phi(1,x^2) \\ \phi(x,1) & \phi(x,x) & \phi(x,x^2) \\ \phi(x^2,1) & \phi(x^2,x) & \phi(x^2,x^2) \end{pmatrix}.$$

Para hacer las "cuentas" de manera más rápida podemos hacer dos observaciones:

- Por ser ϕ simétrica:

$$\phi(x, 1) = \phi(1, x), \quad \phi(x^2, 1) = \phi(1, x^2), \quad \phi(x^2, x) = \phi(x, x^2).$$

- Por las propiedades del cálculo diferencial e integral:

$$\int_0^1 p(x)q'(x)dx + \int_0^1 p'(x)q(x)dx = \int_0^1 (p(x)q(x))'dx = p(1)q(1) - p(0)q(0).$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\phi(1,1) &= 1\cdot 1 - 1\cdot 1 = 0.\\ \phi(1,x) &= 1\cdot 1 - 1\cdot 0 = 1.\\ \phi(1,x^2) &= 1\cdot 1^2 - 1\cdot 0^2 = 1.\\ \phi(x,x) &= 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1.\\ \phi(x,x^2) &= 1\cdot 1^2 - 0\cdot 0^2 = 1.\\ \phi(x^2,x^2) &= 1^2\cdot 1^2 - 0^2\cdot 0^2 = 1.\end{aligned}$$

y así:

$$F_C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(iii) *Calcular el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a ϕ.*

Para calcular el rango y signatura diagonalizamos la matriz asociada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}}\xrightarrow{\nu_{13}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{\nu_{21}(-1)}\xrightarrow{H_{31}(-1)}\xrightarrow{\nu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Por tanto $rango(\phi) = 2$ y $sign(\phi) = (1,1)$.

(iv) *Encontrar una base de polinomios de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, respecto de la cual la matriz asociada a ϕ sea diagonal.*

Basta realizar sobre la matriz identidad la mismas operaciones fila que hemos hecho para diagonalziar la matriz asociada; las filas de la matriz que obtengamos son las coordenadas de los vectores de la base buscada respecto de la base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{13}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)}\xrightarrow{H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

La base buscada está formada por tanto por los polinomios:

$$\{0\cdot 1 + 0\cdot x + 1\cdot x^2, 0\cdot 1 + 1\cdot x - 1\cdot x^2, 1\cdot 1 + 0\cdot x - 1\cdot x^2\} = \{x^2, x - x^2, 1 - x^2\}.$$

Notación: $p'(x), q'(x)$ denotan respectivamente las derivadas de $p(x), q(x)$.

11.– *Sea $w : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma cuadrática y $u, v \in \mathbb{R}^n$ verificando $w(u) = 1, w(v) = -1$. Probar que $\{u, v\}$ son linealmente independientes. ¿Es necesariamente w una forma cuadrática indefinida?.*

Si fuesen dependientes, serían uno múltiplo de otro, es decir tendríamos, para algún $\lambda \in R$:

$$u = \lambda v \quad\Rightarrow\quad 1 = w(u) = w(\lambda v) = \lambda^2 w(v) = -1 \quad\Rightarrow\quad \lambda^2 = -1$$

Imposible. Por tanto necesariamente son dependientes.

Por otra parte es siempre indefinida porque existen vectores para los cuales la forma cuadrática toma valores positivos (por tano no es definida ni semidefinida negativa) y valores negativos (por tanto no es definida ni semidefinida positiva).

12.– *Sea $f : \mathbb{R}^{11} \times \mathbb{R}^{11} \longrightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal antisimétrica. ¿Puede tener la matriz asociada a f rango 11?.Razona la respuesta.*

Si f es bilineal aintisimétrica su matriz A asociada en cualquier base cumple:

$$A^t = -A.$$

Pero entonces:

$$det(A) = det(A^t) = det(-A) = (-1)^{11} det(A) = -det(A) \quad \Rightarrow \quad det(A) = 0.$$

Por tanto A tiene rango menor o igual que 10 y no puede tener rango 11.

14.– *Consideramos el espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ y la base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$. Supongamos que*

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

donde $a \in \mathbb{R}$. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) *Se verifica que $f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = a + 1$.*

Verdadero. Basta tener en cuenta que:

$$f(\vec{u}_1, \vec{u}_1 + \vec{u}_2) = f((1,0)_B, (1,1)_B) = (1,0) F_B (1,1)^t = a + 1.$$

Por tanto la afirmación es cierta.

(ii) *Si $a = -2$, entonces f es antisimétrica.*

Falso. Si $a = -2$ la matriz asociada es:

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

No es una matriz antisimétrica porque no tiene ceros en la diagonal y por tanto $F^t \neq -F$. Deducimos entonces que la correspondiente forma bilineal no es antisimétrica.

(iii) *Si $\vec{v} \neq \vec{0}$, entonces $f(\vec{v}, \vec{v}) \neq 0$.*

Falso. Si $det(F_B) = 0$ entonces existen vectores no nulos tales que $\vec{v} F_V = \vec{0}$. Y por tanto $f(\vec{v}, \vec{v}) = 0$. En nuestro caso:

$$det(F_B) = 1 - 2a.$$

Entonces si $a = -1/2$ y tomamos $\vec{v} = (-2, 1)$ se tiene:

$$f(\vec{v}, \vec{v}) = (-2, 1) F_B (-2, 1)^t = 0.$$

I.– *Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.*

(a) *Demostrar que ϕ es bilineal.*

Sean $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in E$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}')g(\bar{y})$$

Por la linealidad de f queda:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}', \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y})$$

Análogamente utilizando la linealidad de g se ve que:

$$\phi(\bar{x}, \lambda\bar{y} + \mu\bar{y}') = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y}')$$

y por tanto la aplicación es bilineal.

(b) *Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.*

Supongamos que las matrices de f y g son respectivamente A y B, con:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $a_i = f(\bar{e}_i)$ y $b_i = g(\bar{e}_i)$.

La matriz asociada a ϕ en la base canónica es:

$$C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_i)g(\bar{e}_j) = a_i b_j$$

y matricialmente puede escribirse como:

$$C = A \cdot B^t$$

(c) *¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?*

No tiene porque ser simétrica ni antisimétrica. Por ejemplo tomando f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas por la matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matriz de ϕ queda:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica ni antisimétrica.

II.– *En el espacio vectorial real $\mathbb{R}^3$, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:*

- *el vector $(1,1,0)$ es autoconjugado,*
- *el vector $(2,0,1)$ pertenece al núcleo,*
- *la forma cuadrática aplicada en $(0,1,0)$ da 2 y*
- *la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores $(0,1,0)$ y $(1,1,0)$ da -1.*

Consideramos la base $B = \{(1,1,0),(2,0,1),(0,1,0)\}$. Primero hallamos la matriz de la forma cuadrática (o equivalentemente de la polar asociada) con respecto a esta base. Si llamamos f a la forma polar asociada, tenemos:

- Por la primera condición, $f((1,1,0),(1,1,0)) = 0$.

- Por la segunda condición, $f((2,0,1),\bar{u}) = 0$, para cualquier $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. En particular, $f((2,0,1),(1,1,0)) = f((2,0,1),(2,0,1)) = f((2,0,1),(0,1,0)) = 0$.

- Por la tercera condición $f((0,1,0),(0,1,0)) = 2$.

- Finalmente por la cuarta condición $f((0,1,0),(1,1,0)) = -1$.

Obtenemos así la matriz de la forma cuadrática en la base B (teniendo en cuenta que es simétrica):

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0),(1,1,0)) & f((1,1,0),(2,0,1)) & f((1,1,0),(0,1,0)) \\ f((2,0,1),(1,1,0)) & f((2,0,1),(2,0,1)) & f((2,0,1),(0,1,0)) \\ f((0,1,0),(1,1,0)) & f((0,1,0),(2,0,1)) & f((0,1,0),(0,1,0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora teniendo en cuanta que la matriz para pasar de coordenadas de la base canónica a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Hallamos la matriz que nos piden haciendo el cambio de base de la anterior:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 6 \\ -8 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– *Clasificar en función de $a \in \mathbb{R}$ la forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ cuya expresión con respecto a determinada base es*

$$\omega(x,y,z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz = 0$$

La matriz asociada a la forma cuádratica es:

$$F = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular su signatura en función de a, la diagonalizamos por congruencia: hacemos operaciones filas y las análogas en columnas buscando la forma diagonal. Comenzamos intercambiando la primera y tercera filas (y columnas):

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $1, a-1$ y $-(a^2+a-2)$. Estas expresiones se anulan cuando $a=1$ ó $a=-2$. Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $a<-2$ la signatura es $(+,-,-)$, es decir, $(1,2)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

- Si $a=-2$ la signatura es $(+,-,0)$, es decir, $(1,1)$. Se trata de una forma degenerada indefinida.

- Si $-2<a<1$ la signatura es $(+,+,-)$, es decir, $(2,1)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

- Si $a=1$ la signatura es $(+,0,0)$, es decir, $(1,0)$. Se trata de una forma degenerada semidefinida positiva.

- Si $a>1$ la signatura es $(+,+,-)$, es decir, $(2,1)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

(Examen final, junio 2003)

IV.– *En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y)=x^2+2xy-y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v)=2uv+v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.*

La matriz de la forma cuádratica en la base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \omega((1,0)) & \frac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) \\ \frac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) & \omega(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: En general si la expresión de una forma cuadrática esta dada a partir de las coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ de un vector con respecto a una base, la expresión matricial se obtiene tomando en la diagonal los coefientes de los términos $(x^i)^2$ y en la posición ij, con $i\neq j$, los coeficientes de los términos x^ix^j divididos por dos.

Análogmante la matriz de ω con respecto a la nueva base $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de ver si ambas matrices son congruentes. Para ello diagonalizamos ambas por congruencia, calculando además las matrices de paso. Hacemos operaciones por filas y las simétricas por columnas. Para tener además la matriz de paso hacemos también las operaciones fila sobre la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y para la segunda matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se deduce que:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de una matriz a otra es por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en función de la primera se escribe:

$$\bar{v}_1 = (1-1/\sqrt{2})\bar{e}_1 + (1/\sqrt{2})\bar{e}_2$$
$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1$$

V.– *Consideramos la forma cuadrática de* $\mathbb{R}^3$ *dada por la expresión:*

$$\omega(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2yz$$

Determinar para que valores de α *existe una base de* $\mathbb{R}^3$ *en la que la expresión matricial de la forma cuadrática es la matriz identidad.*

La matriz asociada a la forma cuadrática en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista una base en la que dicha forma sea la identidad, ω ha de ser definida positiva:

Método I: Para que sea definida positiva tien que cumplirse:

$$|1| > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

Operando esto es equivalente a que:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 3-\alpha^2 > 0;$$

Por tanto para que se cumplan ambas desigualdades α tiene que estar en el intervalo abierto $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Método II: Diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-\alpha)\nu_{21}(-\alpha)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(\frac{-1}{4-\alpha^2})\nu_{32}(\frac{-1}{4-\alpha^2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{4-\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Para que sea definida positiva los términos de la diagonal han de ser positivos. Obtenemos las condiciones:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 1-\frac{1}{4-\alpha^2} > 0;$$

o equivalentemente:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 3-\alpha^2 > 0;$$

como en en método anterior.

Observamos que en esta diagonalización hemos divido por $4-\alpha^2$, luego hemos implicitamente supuesto que $\alpha^2 \neq 4$. Si $4-\alpha^2 = 0$ quedaría:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)\nu_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que no es definida positiva.

(Examen final, junio 2004)

VI.– *Dado el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, definimos la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)$$

i) *Probar que f es una forma bilineal simétrica.*

Primero veamos que es simétrica, es decir que cumple que:

$$f(p(x), q(x)) = f(q(x), p(x)).$$

Pero:

$$f(p(x), q(x)) = p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1) = q'(1)p'(1) + q(-1)p(-1) = f(q(x), p(x)).$$

Ahora por ser simétrica para la bilinealidad basta con comprobar la linealidad en la primera componente:

$$f(ap(x) + br(x), q(x)) = af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)).$$

Pero:

$$\begin{aligned} f(ap(x) + br(x), q(x)) &= (ap(x) + br(x))'(1)q'(1) + (ap(-1) + br(-1))q(-1) = \\ &= (ap'(1) + br'(1))q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= ap'(1)q'(1) + br'(1)q'(1) + ap(-1)q(-1) + br(-1)q(-1) = \\ &= a(p'(1)q'(1) + p(-1)q(-1)) + b(r'(1)q'(1) + r(-1)q(-1)) = \\ &= af(p(x), q(x)) + bf(r(x), q(x)). \end{aligned}$$

ii) *Hallar la matriz asociada a f respecto de la base canónica.*

La base canónica es $C = \{1, x, x^2\}$. La matriz asociada respecto de tal base es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix},$$

donde:

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1 \\ f(1,x) &= 0 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = -1 \\ f(1,x^2) &= 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-1)^2 = 1 \\ f(x,x) &= 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) = 2 \\ f(x,x^2) &= 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-1)^2 = 1 \\ f(x^2,x^2) &= 2 \cdot 2 + (-1)^2 \cdot (-1)^2 = 5 \end{aligned}$$

y el resto se completa por simetría. Obtenemos:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

iii) *Escribir tres polinomios formando una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ respecto a la cual la matriz asociada a f sea diagonal.*

Cambiar de base la matriz asociada equivale a diagonalizarla por congruencia (haciendo mismas operaciones fila y columna); la matriz de paso nos devuelve las coordenadas de la nueva base en función de la inicial:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{21}(1)H_{31}(-1)\nu_{21}(1)\nu_{31}(-1)}{\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{H_{32}(-2)\nu_{32}(-2)}{\longrightarrow\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -2 & 1 \end{array}\right).$$

Por tanto deducimos que en la base $B' = \{1, 1+x, -3-2x+x^2\}$ la matriz asociada es:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

iv) *Indicar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f.*

El rango de la forma cuádratica asociada coincide con el rango de la matriz asociada en cualquier base. Vemos que:

$$rango(F_{B'}) = 2.$$

La signatura indica el número de términos positivos y negativos de la diagonal en la forma diagonalizada:

$$signatura = (2, 0).$$

VII.– *Se considera la forma cuadrática ω definida en $\mathbb{R}^4$ por la siguiente expresión*

$$\omega(x,y,z,t) = ax^2 + y^2 + (a+2)t^2 + 2xy - 2xz + 2xt - 2yz + 2yt - 2zt$$

donde a es un parámetro real. Se pide:

a) *Encontrar una base de $\mathbb{R}^4$ en la que la matriz de ω sea diagonal.*

Escribimos la matriz asociada a la forma cuadrática con respecto a la base canónica:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & a+2 \end{pmatrix}$$

Hacemos operaciones fila y las mismas en columnas para obtener una matriz congruente con A que sea diagonal. Esta corresponderá a la matriz asociada a ω con respecto a otra base. La nueva base se obtiene haciendo las operaciones fila sobre la matriz identidad.

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} a & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{12}\ \mu_{12}}{\longrightarrow\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & a+2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\overset{\substack{H_{21}(-1)\\ H_{31}(1)\\ H_{41}(-1)}}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto una base en la cual la matriz asociada a ω es diagonal es:

$$\{(0,1,0,0), (1,-1,0,0), (0,1,1,0), (0,-1,0,1)\}.$$

b) *Clasificar ω en función de $a \in \mathbb{R}$.*

Hemos diagonalizado en función de a la forma cuadrática. Los puntos donde puede cambiar el signo de los elementos de la diagonal son $a = -1$ ó $a = 1$.

- Si $a < -1$ entonces la signatura es $(1,3)$ y el rango 4. Se trata de una forma cuadrática indefinida y no degenerada.

- Si $a = -1$ entonces la signatura es $(1,2)$ y el rango 3. Se trata de una forma cuadrática indefinida y degenerada.

- Si $-1 < a < 1$ entonces la signatura es $(2,2)$ y el rango 4. Se trata de una forma cuadrática indefinida y no degenerada.

- Si $a = 1$ entonces la signatura es $(2,1)$ y el rango 4. Se trata de una forma cuadrática indefinida y degenerada. - Si $a > 1$ entonces la signatura es $(3,1)$ y el rango 4. Se trata de una forma cuadrática indefinida y no degenerada.

c) *Para todos los valores de a que hagan ω degenerada, encontrar ecuaciones de subespacios de dimensión máxima tales que la restricción de ω a ellos sea definida positiva.*

La forma cuadrática es degenerada para $a = -1$ y $a = 1$.

Cuando $a = -1$, la signatura es $(1,2)$. Por tanto la dimensión máxima de un subespacio donde la restricción sea definida positiva es 1. Basta tomar el subespacio generado por el vector de la base que hemos calculado asociado al valor 1 de la diagonal:

$$U = \mathcal{L}\{(0,1,0,0)\}.$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 0; \quad y = \lambda; \quad z = 0; \quad t = 0.$$

Y las cartesianas:

$$x = 0; \quad z = 0; \quad t = 0.$$

Cuando $a = 1$, la signatura es $(2,1)$. Ahora la dimensión máxima de un subespacio donde la restricción sea definida positiva es 2. Basta tomar el subespacio generado por los vectores de la base que hemos calculado asociado a valores positivos de la diagonal:

$$U = \mathcal{L}\{(0,1,0,0),(0,-1,0,1)\}.$$

Sus ecuaciones paramétricas son:

$$x = 0; \quad y = \lambda - \mu; \quad z = 0; \quad t = \mu.$$

Y las cartesianas:

$$x = 0; \quad z = 0.$$

(Examen final, septiembre 2007)

VIII.– *Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es*

$$\omega(\bar{x}) = 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^4)^2 + 4x^1x^2 - 4x^1x^4 - 2x^2x^3 - 4x^2x^4 - 4x^3x^4.$$

(a) *Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.*

La matriz asociada a la forma cuadrática que nos dan es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

la diagonalizamos por congruencia:

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{H_{41}(1)\ \ \nu_{41}(1)}{\overset{H_{21}(-1)\nu_{21}(-1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{\nu_{23}(-1/2)}{\overset{H_{23}(-1/2)}{\longrightarrow}}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{H_{42}(-1)\nu_{42}(-1)}{\overset{H_{32}(1)\ \ \nu_{32}(1)}{\longrightarrow}} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\overset{H_{43}(-1)\nu_{43}(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rrrr|rrrr} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0\\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos autovalores positivos, uno negativo y otro nulo. Por tanto su rango es 3 y su signatura $(2,1)$. Es por tanto indefinida degenerada. La forma en suma de cuadradados en coordenadas en la base $\{(1,0,0,0),(-1,1,-1/2,0),(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$ es:

$$\omega(y^1,y^2,y^3,y^4) = 2(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2$$

(b) *Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.*

Como la signatura es $(2,1)$ y la dimensión del espacio es 4, la máxima dimensión posible para un subespacio en el cual la restricción de ω es semidefinida negativa es 2. Tomamos el subespacio generado por los correspondientes vectores relativos al valor negativo y nulo de la diagonal $\{(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$.

IX.– *Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular el rango y la signatura de ω.*

Diagonalizamos la matriz mediante operaciones elementales en fila y sus simétrica en columna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2\\ 1 & 0 & 0 & -1\\ -1 & 0 & 0 & -1\\ -1/2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1/2\\ 0 & 1 & -1 & -3/2\\ 0 & -1/2 & -3/2 & -1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es 4 y la signatura $(2,2)$.

(b) *Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.*

Teniendo en cuenta que en la matriz que nos dan aparecen ceros en la diagonal, basta tomar, por ejemplo, $\bar{v} = (1,0,0,0)$.

(c) *Considérese el subespacio vectorial*

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

Una base de V está formada por los vectores $\{(1,1,0,0),(0,2,1,-1)\}$. La matriz de Ω en dicha base es:

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0,0),(1,1,0,0)) & f((1,1,0,0),(0,2,1,-1)) \\ f((1,1,0,0),(0,2,1,-1) & f((0,2,1,-1),(0,2,1,-1) \end{pmatrix}$$

donde f es la forma bilineal asociada a ω, es decir, $f(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u})A\{\bar{v}\}$. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2001)

X.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x),q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) *Probar que es una forma bilineal simétrica.*

Veamos primero que es lineal en la primera componente. Sean $c,d \in R$, $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(cp_1(x)+dp_2(x),q(x)) &= (cp_1(a)+dp_2(a))q(-a) + (cp_1(-a)+dp_2(-a))q(a) = \\ &= cp_1(a)q(-a) + dp_2(a)q(-a) + cp_1(-a)q(a) + dp_2(-a)q(a) = \\ &= c(p_1(a)q(-a) + p_1(-a)q(a)) + d(p_2(a)q(-a) + p_2(-a)q(a)) = \\ &= cf(p_1(x),q(x)) + df(p_2(x),q(x)) \end{aligned}$$

Además es simétrica:

$$f(p(x),q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a) = q(a)p(-a) + q(-a)p(a) = f(q(x),p(x)).$$

Por tanto de ambas cosas deducimos que también es lineal en la segunda componente y así es bilineal simétrica.

ii) *Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

El espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3. Para que tres vectores formen base basta que sean independientes; equivalentemente basta que la matriz de coordenadas respecto de la base canónica tenga determinante no nulo. La base canónica es:

$$C = \{1, x, x^2\}$$

y

$$(x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2 \equiv (a^2, -2a, 1), \quad x^2 \equiv (0,0,1), \quad (x+a)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \equiv (a^2, 2a, 1).$$

Entonces:

$$det M_{B_aC} = det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4a^3.$$

Deducimos que B_a es base si y sólo si $a \neq 0$.

iii) *Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a.*

Tiene sentido cuando B_a es base, es decir, $a \neq 0$. Con respecto a la base canónica la matriz asociada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base B_a:

$$F_{B_a} = M^t_{CB_a} F_C M_{CB_a} = \begin{pmatrix} 0 & 4a^4 & 16a^4 \\ 4a^4 & 2a^4 & 4a^4 \\ 16a^4 & 4a^4 & 0 \end{pmatrix},$$

donde:

$$M_{B_aC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.*

Diagonalizamos la matriz asoicada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-a^2)\mu_{31}(-a^2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

- Si $a = 0$ el rango es 1 y la signatura $(1, 0)$.

- Si $a \neq 0$ el rango es 2 y la signatura $(1, 1)$.

XI.– *Sean a y b dos números reales. En el espacio $\mathcal{P}_1$ de los polinomios de grado menor o igual que 1 y coeficientes reales se definie la siguiente forma bilineal simétrica.*

$$f(p, q) = p(a)q(a) + p(b)q(b).$$

(a) *Encontrar la matriz de f en la base canónica de $\mathcal{P}_1$.*

La base canónica es $\{1, x\}$. La matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) \\ f(x,1) & f(x,x) \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 1 + 1 = 2. \\ f(1,x) &= a + b. \\ f(x,1) &= f(1,x). \\ f(x,x) &= a^2 + b^2. \end{aligned}$$

luego la matriz queda:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & a+b \\ a+b & a^2+b^2 \end{pmatrix}.$$

(b) *Encontrar una base de vectores conjugados para f.*

Basta diagonalizar por congruencia:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & a+b & 1 & 0 \\ a+b & a^2+b^2 & 0 & 1 \end{array}\right) \overset{H_{21}(-(a+b)/2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a^2+b^2-(a+b)^2/2 & -(a+b)/2 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto una base de vectores conjugados está formada por los polinomios de coordenadas:

$$(1, 0), (-(a+b)/2, 1).$$

Equivalentemente por los polinomios:

$$\{1, x-(a+b)/2\}.$$

(c) *Clasificar f.*

En el apartado anterior ya la hemos diagonalizado. La forma diagonal es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & (a-b)^2/2 \end{pmatrix}$$

donde

$$(a-b)^2 \geq 0$$

para cualesquiera a, b y se anula si $a = b$. Por tanto:

- Si $a = b$, entonces la forma cuadrática es degenerada, semidefinida positiva con rango 1 y signatura $(1, 0)$.

- Si $a \neq b$, entonces la forma cuadrática es no degenerada, definida positiva con rango 2 y signatura $(2, 0)$.

(Examen final, junio 2007)

XII.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:*

$$\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \omega(x,y,z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

Escribimos la matriz asociada a ω con respecto a la base canónica. Para clasificarla la diagonalizaremos por congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$ podemos hacer:

$$A \overset{H_{31}(1/a)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(1/a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a - 1/a \end{pmatrix}$$

Por el contrario si $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

En ambos casos b es uno de los elementos de la diagonal. Los otros dos dependen de a. Además $a - 1/a$ se anula cuando $a = 1$ o $a = -1$. Teniendo en cuenta todo esto, distinguimos las siguientes posibilidades:

- Si $b > 0$ y:

  $a > 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (3, 0)$ y es definida positiva (no degenerada).

  $a = 1$, entonces *rango* $= 2$, *signatura* $= (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (2, 1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces *rango* $= 2$, signatura $(1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a < -1$, entonces *rango* $= 3$, signatura $(1, 2)$ y es indefinida (no degenerada).

- Si $b = 0$ y:

$a > 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

$a = 1$, entonces $rango = 1$, $signatura = (1, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

$-1 < a < 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

$a = -1$, entonces $rango = 1$, signatura $(0, 1)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

$a < -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0, 2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

- Si $b < 0$ y:

$a > 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (2, 1)$ y es indefinida (no degenerada).

$a = 1$, entonces $rango = 2$, $signatura = (1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

$-1 < a < 1$, entonces $rango = 3$, $signatura = (1, 2)$ y es indefinida (no degenerada).

$a = -1$, entonces $rango = 2$, signatura $(0, 2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

$a < -1$, entonces $rango = 3$, signatura $(0, 3)$ y es definida negativa (no degenerada).

XIII.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ se considera la familia de formas cuadráticas $\omega_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ que en la base canónica tienen la siguiente expresión:*

$$\omega_a(x, y, z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

Escribimos las matrices asociadas a las formas cuadráticas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_a = \begin{pmatrix} 5 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla las diagonalizamos por congruencia:

$$Q_a \overset{H_{12}}{\underset{\nu_{12}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-a)H_{31}(1)}{\underset{\nu_{21}(-a)\nu_{31}(1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-a^2 & 1+a \\ 0 & 1+a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\overset{H_{23}}{\underset{\nu_{23}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 1+a & 5-a^2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1-a)}{\underset{\nu_{32}(-1-a)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2-2a+4 \end{pmatrix}.$$

Para saber que intervalos hemos de estudiar vemos cuando se anulan los valores de la diagonal:

$$-2a^2 - 2a + 4 = 0 \iff a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -2 \quad \text{ó } a = 1.$$

Distinguimos por tanto los siguientes casos:

VALOR DE a	SIGNATURA	RANGO	TIPO
$a \in (-\infty, -2)$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada
$a = -2$	$(2, 0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (-2, 1)$	$(3, 0)$	3	definida positiva, no degenerada
$a = 1$	$(2, 0)$	1	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (1, \infty)$	$(2, 1)$	3	indefinida, no degenerada
