ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la Práctica 4.1

Cónicas — (Curso 2010–2011)

NOTA: Todos los problemas se suponen planteados en el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular.

2.– *Dada la cónica la ecuación de $x^2 + y^2 + 2xy - 4y = 0$ respecto a una referencia rectangular, calcular centro, direcciones asintóticas, asíntotas, diámetros, ejes, vértices.*

Escribimos la matriz A asociada a la cónica y T de términos cuadráticos son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

i) Centro:

$$(a, b, 1)A = (0, 0, h) \iff a + b = 0, \quad a + b - 2 = 0.$$

El sistema no es compatible y por tanto no tiene centro (de hecho es una parábola).

ii) Direcciones asintóticas.

Son los puntos del infinito de la cónica. Basta tomar $t = 0$ en la ecuación homogénea de la misma:

$$(x, y, 0)A(x, y, 0)^t = 0 \iff x^2 + 2xy + y^2 = 0 \iff (x + y)^2 = 0 \iff x = -y.$$

Hay una única dirección asíntotica dada por el vector $(1, -1)$.

iii) Asíntotas.

Son las rectas tangentes en los puntos del infinito. En nuestro caso en $(1, -1, 0)$:

$$(1, -1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff 2 = 0.$$

Por tanto NO tien asíntotas (se trata de una parábola).

iv) Diámetros.

Los diámetros son las rectas polares de puntos del infinito:

$$(a, b, 0)A(x, y, 1)^y = 0 \iff (a + b)x + (a + b)y - 2b = 0.$$

Es decir son todas las rectas paralelas a la recta $x + y = 0$.

v) Ejes y vértices.

Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos.

Los autvalores de T verifican:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \lambda(\lambda - 2) = 0.$$

Por tanto el único autovalor no nulo es $\lambda = 2$. Calculemos los autovectores de T asociados a 2:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0 \quad \Rightarrow \quad S_2 = \mathcal{L}(1, 1).$$

La recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo es y por tanto el eje es:

$$(1, 1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff 2x + 2y - 2 = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

Intersecamos el eje con la cónica y obtenemos el vértice:

$$\begin{array}{l} 0 = x^2 + y^2 + 2xy - 4y \\ 0 = x + y - 1 \end{array} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (\frac{3}{4}, \frac{1}{4}).$$

5-6.– *Para las siguientes cónicas*

(1) $5x^2 + 5y^2 - 4 = 0$

(2) $2x^2 + 3y^2 - 4x + 6y + 6 = 0$

(3) $6y^2 + 8xy - 8x + 4y - 8 = 0$

(4) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 4 = 0$

(5) $x^2 - 2y^2 + xy + x - y = 0$

(6) $x^2 + y^2 + 4x + 4 = 0$

(7) $x^2 + y^2 + 2xy - x - y - 2 = 0$

(8) $x^2 + 4y^2 - 4xy + 6y = 0$

(9) $4x^2 + 4y^2 + 8xy + 4x + 4y + 1 = 0$,

se pide:

(a) *Clasificarlas sin hallar las ecuaciones reducidas.*

Estudiamos los determinantes de la de términos cuadráticos T y la matriz asociada A en cada caso.

(1) $det(T) = 25 > 0$ y $det(A) = -100 < 0$. Dado que el término en x^2 es positivo, entonces la signatura es $+, +, -$ y se trata de una elipse real.

(b) *Dar las ecuaciones reducidas de las no degeneradas y las rectas que forman las degeneradas.*

(1) Se trata de una elipse real. En este caso ya nos dan la ecuacin reducida:

$$5x^2 + 5y^2 - 4 = 0.$$

Podemos escribirla como:

$$\frac{x^2}{4/5} + \frac{y^2}{4/5} = 1.$$

(c) *En los casos en que existan, determinar: centros, puntos singulares, direcciones asintóticas, asíntotas, ejes, vértices, focos, directrices y excentricidad.*

Los puntos singulares sólo aparecen cuando la cónica está formada por dos rectas que se cortan (el punto singular es la intersección) o por dos rectas coincidentes (el lugar singular es la propia recta). En esos casos ya hemos hallado dichos puntos y los centros.

(1) Se trata de una elipse real que ya est en forma reducida. Por tanto:

- El centro es el origen.

- No tiene puntos singulares, ni direcciones asíntoticas ni asíntotas.

- Los diámetros son todas las rectas pasando por el centro.

- Los ejes (OJO!) son las rectas polares de los autovectores de T asociados a autovalores no nulos. En este caso:

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Hay un único autovalor 5 con multiplicidad geométrica dos. Por tanto todos los vectores son autovectores y los ejes son las rectas polares de cualquier dirección, es decir, coinciden con los diámetros. Por tanto los ejes son todas las rectas pasando por el centro. Geométricamente corresponde al hecho de que la elipse es una circunferencia ($a = b = \sqrt{4/5}$) y por tanto todos los diámetros son ejes de simetría.

- Los focos están en los puntos $(c, 0)$ y $(-c, 0)$, con $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 0$. Es decir hay un único foco en el origen. Esto corresponde de nuevo al hecho de ser una circunferencia. La excentricidad es cero. La directriz sería la recta polar del foco:

$$(0, 0, 1)A(x, y, 1)^t = 0 \iff -4 = 0.$$

Es decir no hay directriz; si permitimos usar puntos del infinito veremos que la directriz es la recta de puntos del infinito.

7.– *Dada la cónica de ecuación:*

$$5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$$

Clasificarla, hallar su ecuación reducida y sus vértices.

La matriz asociada A y de términos cuadtiscos T son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Vemos que $det(A) = -32 < 0$ y $det(T) = 16$. Se trata por tanto de una elipse.

Hallamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (5-\lambda)^2 - 3^2 = 0 \iff \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 8.$$

La ecuación reducida es:

$$2x'^2 + 8y'^2 + c = 0$$

con

$$2 \cdot 8 \cdot c = det(A) \quad \Rightarrow \quad c = \frac{-32}{16} = -2.$$

Queda:

$$2x'^2 + 8y'^2 - 2 = 0 \iff x'^2 + 4y'^2 = 1.$$

Los vértices son intersección de los ejes con la cónica. Los ejes son las rectas polares de los autovectores de T. Calculamos tales autovectores:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y)\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \iff x + y = 0.$$

$$(T - 8Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y)\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

Tomamos respectivamente $(1,-1)$ e $(1,1)$. Las correspondientes rectas polares (los ejes) son:

$$(1,-1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff x - y = 0 \qquad (1,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff x + y = 0$$

Las interesecamos con la cónica:

$$\left.\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 16x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{8}}$$

Obtenemos los vértices $(\frac{1}{\sqrt{8}}, \frac{1}{\sqrt{8}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{8}}, -\frac{1}{\sqrt{8}})$.

Y con el otro eje:

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 0 \\ 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad 4x^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Obtenemos los vértices $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ y $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

10.– *Hallar las ecuaciones de*

(a) *la cónica que pasa por* $A(2,0)$, $B(0,-1)$, $C(1,1)$, $D(-1,0)$ *y* $E(1,-1)$.

Tomamos el haz de cónicas formado a partir de las cónicas degeneradas que forman las rectas $AB \cup CD$ y $AD \cup BC$. Todas las cónicas de dicho haz pasan por estos cuatro puntos. Después basta imponer al haz que pase también por el punto E:

$$\begin{aligned}
AB &\cong \frac{x-0}{2-0} = \frac{y+1}{0+1} \iff x - 2y - 2 = 0 \\
CD &\cong \frac{x+1}{1+1} = \frac{y}{1} \iff x - 2y + 1 = 0 \\
AD &\cong y = 0 \\
BC &\cong \frac{x-1}{0-1} = \frac{y-1}{-1-1} \iff 2x - y - 1 = 0
\end{aligned}$$

El haz de cónicas es:

$$\alpha(x-2y-2)(x-2y+1) + \beta y(2x-y-1) = 0$$

Imponemos que pase el punto E, y queda:

$$4\alpha - 2\beta = 0$$

podemos tomar $\beta = 2$ y $\alpha = 1$. La cónica buscada es:

$$(x-2y-2)(x-2y+1) + 2y(2x-y-1) = 0 \iff x^2 + 2y^2 - x - 2 = 0$$

(b) *la cónica cuyo centro es* $C(1,1)$ *y tal que* $y = 1$ *es un eje y la polar del punto* $(2,2)$ *es la recta* $x + y - 3 = 0$.

Dado que un eje es $y = 1$, sabemos que un autovector de la matriz T asociada tiene la dirección $(1,0)$ y el otro (perpendicular) la $(0,1)$. Por tanto la matriz de la cónica es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & d \\ 0 & b & e \\ d & e & c \end{pmatrix}$$

Por ser el centro el $(1,1)$ se verifica:

$$(1,1,0)A = (0,0,t) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a + d = 0 & \Rightarrow \quad d = -a \\ b + e = 0 & \Rightarrow \quad e = -b \end{cases}$$

Ahora imponemos la condición de polaridad:

$$(2,2,1)A = (1,1,-3) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} 2a + d = 1 \\ 2b + e = 1 \\ 2d + 2e - c = -3 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones queda:

$$a = 1; \quad b = 1; \quad c = 1; \quad d = -1; \quad e = -1$$

Es decir la cónica es:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$$

(la circunferencia de centro $(1,1)$ y radio 1).

(c) *la elipse cuyos focos están en los puntos* $(0,0)$ *y* $(4,2)$ *y sabiendo además que al menos uno de los vértices del eje menor se encuentra en la parábola de ecuación* $5x^2+10y-34=0$.

Conocidos los focos y teniendo en cuenta la caracterización de la elipse como lugar geométrico, sabemos que la ecuación pedida es:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=2a,$$

donde a es la longitud del semidiámetro mayor de la elipse.

Para hallar a tenemos en cuenta que:

$$a^2=b^2+c^2.$$

Siendo b la longitud del semidiámetro menor de la elipse y c la mitad de la distancia focal. En concreto:

$$c=\sqrt{4^2+2^2}/2=\sqrt{5},$$

y b es la distancia de uno de los vértices del eje menor al centro de la elipse.

El centro de la elipse es el punto medio de los focos:

$$C=\frac{(0,0)+(4,2)}{2}=(2,1).$$

El eje menor es perpendicular a la recta que une los focos y pasa por el centro. Su vector normal es por tanto $(4,2)-(0,0)=(4,2)$. Su ecuación es de la forma:

$$4x+2y+d=0.$$

Imponemos que pase por $(2,1)$:

$$8+2+d=0 \quad\Rightarrow\quad d=-10.$$

El eje menor queda:

$$2x+y-5=0.$$

Intersecamos con la parábola dada:

$$5x^2+50-20x-34=0 \iff 5x^2-20x+16=0 \quad\Rightarrow\quad x=\frac{10\pm\sqrt{100-80}}{5}=2\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Y entonces:

$$y=5-2x=1\mp\frac{4\sqrt{5}}{5}.$$

Uno de los vértices tiene coordenadas:

$$(2+2\sqrt{5}/5,1-4\sqrt{5}/5).$$

Por tanto:

$$b=dist(2+2\sqrt{5}/5,1-4\sqrt{5}/5),(2,1))=2.$$

Entonces:

$$a=\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{4+5}=3.$$

La ecuación buscada es:

$$\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}=6 \iff (\sqrt{(x)^2+(y)^2})^2=(6-\sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2})^2.$$

Operando queda:

$$3\sqrt{x^2+y^2}=2x+y+4,$$

y elevando nuevamente al cuadrado y simplificando:

$$5x^2 + 8y^2 - 4xy - 16x - 8y - 16 = 0.$$

(d) *Hallar la ecuación de una hipérbola que pasa por el origen, tiene por asíntota la recta $x - 2y - 1 = 0$ y uno de sus ejes es la recta $x - y - 1 = 0$.*

El eje es un eje de simetría de la cónica. Por tanto podemos calcular la otra asíntota como simétrica de la dada. Una vez que tengamos las dos asíntotas formaremos el haz de cónicas y obtendremos la cónica buscada imponiendo que pase por el origen.

Para hallar la simétrica de la asíntota tenemos en cuenta que uno de sus puntos es la intersección de la misma y el eje de simetría:

$$\left.\begin{array}{r} x - 2y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1, 0).$$

Para hallar otro punto de la recta buscada, hallamos el simétrico de un punto cualquiera de la asíntota dada. Tomamos por ejemplo el punto $A = (-1, -1)$ que verifica la ecuación $x - 2y - 1 = 0$. Su simétrico $A' = (a, b)$ cumple:

- El punto medio de A, A' pertenece al eje de simetría:

$$\frac{A + A'}{2} = (\frac{a-1}{2}, \frac{b-1}{2}) \text{ pertenece a la recta } x - y - 1 = 0,$$

de donde,

$$a - b = 2.$$

- El vector AA' es perpendicular al eje de simetría, de donde:

$$(a + 1, b + 1)(1, 1) = 0 \iff a + b = -2.$$

Obtenemos $A' = (a, b) = (0, -2)$. La asíntota buscada es la recta que une los puntos $(1, 0)$ y $(0, -2)$:

$$\frac{x}{1} - \frac{y}{2} = 1 \iff 2x - y - 2 = 0.$$

El haz de cónicas conocidas las dos asíntotas es:

$$(x - 2y - 1)(2x - y - 2) + c = 0.$$

Imponiendo que pase por el origen hallamos el valor de c:

$$(-1)(-2) + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -2.$$

La cónica pedida queda:

$$(x - 2y - 1)(2x - y - 2) - 2 = 0,$$

operando:

$$2x^2 - 5xy + 2y^2 - 4x + 5y = 0.$$

(e) *una parábola que pasa por los puntos $P = (0, 2)$, $Q = (1, 0)$ y tal que la recta que une P y Q es la recta polar del punto $(0, 0)$.*

Método I: Recordemos que la recta polar de un punto O respecto de una cónica une los puntos de tangencica de las tangentes exteriores a la cónica pasando por O. En nuestro caso esto quiere decir que las rectas uniendo $O = (0, 0)$ con P y Q respectivamente, son tangentes a la parábola.

Utilizaremos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

La recta OP tiene por ecuación $x = 0$; la recta OQ tiene por ecuación $y = 0$; la recta PQ es:

$$\frac{x-0}{1-0} = \frac{y-2}{0-2} \iff 2x + y - 2 = 0.$$

El haz queda:

$$\lambda xy + (2x + y - 2)^2 = 0 \iff 4x^2 + y^2 + (4 + \lambda)xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que la cónica sea de tipo parabólico, es decir, que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo.

$$\begin{vmatrix} 4 & (4+\lambda)/2 \\ (4+\lambda)/2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff \frac{\lambda^2}{4} + 2\lambda = 0.$$

Obtenemos:

- $\lambda = 0$, pero entonces sustituyendo en el haz nos quedaría sólo la recta doble $(2x + y - 2)^2 = 0$ que no es una parábola.

- $\lambda = -8$. Entonces nos queda la ecuación:

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

La matriz asociada es:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Su determinante es no nulo, por tanto es una cónica no degenerada y en definitiva la parábola buscada.

Método II: La matriz asociada a la cónica buscada es:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones del enunciado.

Como los puntos P y Q pertenencen a la cónica tenemos las ecuaciones:

$$\begin{array}{l} (0,2,1)A(0,2,1)^t = 0 \iff 4d + 4e + f = 0. \\ (1,0,1)A(1,0,1)^t = 0 \iff a + 2c + f = 0. \end{array} \qquad (I)$$

Además la recta polar del punto $(0,0)$ es la recta PQ, $2x + y - 2 = 0$:

$$(0,0,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad 2x + y - 2 = 0 \iff cx + ey + f \quad \equiv 2x + y - 2 = 0.$$

Deducimos que:

$$\frac{c}{2} = \frac{e}{1} = \frac{f}{-2} \iff c = 2e, \quad f = -2e.$$

Susituyendo en (I) nos queda:

$$d = -e/2, \qquad a = -2e.$$

Y la matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -2e & b & 2e \\ b & -e/2 & e \\ 2e & e & -2e \end{pmatrix}.$$

Imponemos que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo para que la cónica sea de tipo parabólico:

$$\begin{vmatrix} -2e & b \\ b & -e/2 \end{vmatrix} = 0 \iff e^2 = b^2.$$

Tenemos dos soluciones:

$$e = b \text{ ó } e = -b.$$

Si suponemos $e = b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) \neq 0$. Es la parábola buscada:

$$-4x^2 - y^2 + 4xy + 8x + 4y - 4 = 0 \iff 4x^2 + y^2 - 4xy - 8x - 4y + 4 = 0.$$

Si suponemos $e = -b = 2$, la matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

con $det(A) = 0$. Es degenerada y no es una parábola.

(f) *una parábola que tiene por eje la recta $x - y + 1 = 0$ y es tangente en el origen a la recta $x - 2y = 0$.*

Sabemos que el eje de una parábola es un eje de simetría de la curva. Eso nos permite "duplicar" la información dada; es decir, tomando la simétrica de la tangente por el origen tendremos otra tangente. Formaremos entonces el haz de cónicas conocidas dos tangentes e impondremos que la cónica sea una parábola.

El simétrico del origen respecto al eje es un punto (a, b) verificando:

- El punto medio del segmento que lo une con el origen está en el eje:

$$\frac{a+0}{2} - \frac{b+0}{2} + 1 = 0 \iff a - b + 2 = 0.$$

- El segemento que lo une con el origen es perpendicular a éste:

$$(a - 0, b - 0) \cdot (1, 1) = 0 \iff a + b = 0.$$

De ambas ecuaciones deducimos que el simétrico es el punto $(-1, 1)$.

El simétrico de la tangente pasa por el punto hallado anteriormente y por la intersección del eje y de la tangente:

$$\left\{ \begin{array}{r} x - y + 1 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right. \iff (x, y) = (-2, -1).$$

Por tanto es la recta:

$$\frac{x+2}{-1+2} = \frac{y+1}{1+1} \iff 2x - y + 3 = 0.$$

Finalmente para formar el haz necesitamos la recta que une los puntos de tangencia, $(0, 0)$, $(-1, 1)$:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{1-0} \iff x + y = 0.$$

El haz queda:

$$(x-2y)(2x-y+3)+c(x+y)^2=0.$$

Operando:

$$(2+c)x^2+(2c-5)xy+(2+c)y^2+3x-6y=0.$$

Para que sea una parábola la matriz de términos cuadráticos tiene que tener determinante nulo:

$$det\begin{pmatrix} 2+c & c-5/2 \\ c-5/2 & 2+c \end{pmatrix}=0 \iff (2+c)^2-(c-5/2)^2=0.$$

De donde:

$$c=1/4.$$

La parábola queda:

$$3x^2-6xy+3y^2+4x-8y=0.$$

(g) *una elipse cuyo centro es el* $(1,2)$, *una directriz tiene de ecuación* $y=6$ *y uno de los vértices está sobre el eje* OX. **(Segundo parcial, mayo 2001)**

Dado que la directriz es $y=6$ sabemos que los ejes de la elipse son paralelos a los ejes de coordenadas y por tanto la ecuación de elipse es de la forma:

$$\frac{(x-1)^2}{a^2}+\frac{(y-2)^2}{b^2}=1$$

Además si un vértice está sobre el eje OX, corresponderá a la intersección del eje pasando por el centro y paralelo a OY, con la recta OX, es decir, al punto $(1,0)$. Por tanto deducimos que $b=2$. Finalmente sabemos que la ecuación de la directriz $y=6$ debe de ser:

$$(y-2)=\frac{b^2}{c}=\frac{4}{c} \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{c}=4 \quad \Rightarrow \quad c=1$$

y por último, teniendo en cuenta que b es el radio mayor de la elipse, $a^2=b^2-c^2=4-1=3$. La ecuación pedida es:

$$\frac{(x-1)^2}{3}+\frac{(y-2)^2}{4}=1 \iff 4x^2+3y^2-8x-12y+4=0$$

(h) *una hipérbola que pasa por el origen, uno de cuyos ejes es la recta* $y=x+1$ *y una de cuyas asíntotas es la recta* $y=2x+1$. **(Examen extraordinario, septiembre 2001)**

El centro de la hipérbola es la intersección de la asíntota y el eje:

$$\left.\begin{array}{l} x-y+1=0 \\ 2x-y+1=0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad (x,y)=(0,1)$$

Podemos hallar la otra asíntota teniendo en cuenta que ambas son simétricas respecto al eje $y=x+1$. Resulta la recta: $x-2y+2=0$.

Ahora la ecuación de la hipérbola será de la forma:

$$(x-2y+2)(2x-y+1)+\alpha=0$$

(corresponde al haz de cónicas que son tangentes a las asíntotas en los puntos del infinito)

Imponiendo que contenga al origen obtenemos $\alpha=-2$ y la ecuación es:

$$2x^2+2y^2-5xy+5x-4y=0$$

(i) *la parábola C tal que: la recta de ecuación $x+y-2=0$ es la tangente a C en el vértice; C pasa por el origen de coordenadas; y la recta polar del punto $(2,1)$ con respecto a C es paralela al eje OX.*

El autovector asociado al autovalor no nulo de la matriz T (parte cuadrática) de la parábola, tiene la misma dirección que la tangente en el vértice, es decir, $(1,-1)$. Teniendo en cuenta que $det(T)=0$, salvo producto por escalar, deducimos que T es de la forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

y la matriz A asociada:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & d \\ -1 & 1 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Dado que el origen pertenece a la cónica, deducimos que $f=0$.

Aplicamos ahora que la recta polar en el punto $(2,1)$ es paralela al eje OX. Significa que:

$$(2,1,1)A(x,y,1)^t \text{ es paralela a } y=0 \quad \Rightarrow \quad 2-1+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=-1$$

Tenemos que, la ecuación de la cónica es:

$$x^2+y^2-2xy-2x-2ey=0 \iff (x-y)^2-2x+2ey=0$$

Para calcular el coeficiente e, aplicamos que $x+y-2$ es tangente a la parábola. Su intersección con la cónica debe de ser un único punto. El punto genérico de esta recta es $(\lambda, 2-\lambda)$. Sustituimos en la cónica:

$$(2\lambda-2)^2-2\lambda+2e(2-\lambda)=0 \iff 4\lambda^2+(-2e-10)\lambda+(4+4e)=0$$

Para que haya solamente una solución el discriminante ha de ser cero:

$$(-2e-10)^2-16(4+4e)=0 \quad \Rightarrow \quad e=3$$

La ecuación pedida es:

$$x^2+y^2-2xy-2x+6y=0$$

11.– *Calcular la ecuación de una parábola que tiene el foco sobre la recta $x+2=0$, el vértice sobre la recta $y-1=0$ y por directriz la recta $x-y=0$.*

El foco, por estar sobre la recta $x+2=0$ es de la forma $F=(-2,a)$.

El vértice, por estar sobre la recta $y-1=0$ es de la forma $V=(b,1)$.

Además la recta que une el vértice y el foco es perpendicular a la directriz, cuyo vector director es el $(1,1)$:

$$\vec{VF}\perp directriz \quad \Rightarrow \quad (b+2,1-a)\cdot(1,1)=0 \quad \Rightarrow \quad 3+b-a=0.$$

Dicha recta corta a la directriz en un punto P de la forma $P=(c,c)$ y además V es el punto medio de F y P. De manera que:

$$V=\frac{F+P}{2} \quad \Rightarrow \quad 2b=c-2, \quad 2=a+c.$$

Resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones obtenemos:

$$a=2, \quad b=-1, \quad c=0.$$

Conocido el foco $F(-2,2)$ la parábola es el lugar geométrico de puntos que equidistan de foco y directriz:

$$d(F,(x,y))=d(directriz,(x,y)) \iff (x+2)^2+(y-2)^2=\frac{(x-y)^2}{2} \iff x^2+y^2+2xy+8x-8y+16=0.$$

12.– *En un haz de cónicas generado por dos cónicas que no son de tipo parábolico, cuál es el máximo número de parábolas que puede haber?.*

Un haz de cónicas se forma tomando combinaciones lineales de las ecuaciones de las cónicas generadoras:

$$((x,y,1)A_1(x,y,1)^t) + \lambda((x,y,1)A_2(x,y,1)^t) = 0.$$

(al usar un sólo parámetro omitimos una de las cónicas generadoras; pero ya sabemos que étas no son una parábola).

La condición para que sean parábolas es que el determinante de la matriz de términos cuadráticos sea nulo. Pero ese determinante al ser de orden dos y no anularse siempre (porque al menos hay una cónica que no es parábola), nos da una ecuación de grado uno o dos en la variable λ. Por tanto a lo sumo hay una o dos soluciones. El máximo número de parábolas que puede haber son dos.

13.– *Calcular la ecuación de una elipse tangente a los ejes de coordenadas en los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$ y tangente a la recta $x+y-2=0$.*

Método I: Utilizamos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y puntos de tangencia. Las dos cónicas generadoras son:

- Las dos tangentes: xy.

- La recta doble que une los puntos de tangencia $(1,0)$ y $(0,1)$: $(x+y-1)^2$.

El haz queda:

$$axy + (x+y-1)^2 = 0.$$

Para hallar el parámetro a imponemos que la recta $x+y-2=0$ sea tangente. Al intersecarla con la cónica ha de quedar una raíz doble. Despejamos $y = 2-x$ y sustituimos en la cónica:

$$ax(2-x)+1=0 \iff ax^2-2ax-1=0.$$

Para que la ecuación de segundo grado tenga una única raíz doble el discriminate ha de ser 0:

$$4a^2+4a=0 \iff a=-1 \text{ ó } a=0.$$

Si $a=0$ la cónica es la recta doble y no se trata de una elipse.

Si $a=1$ queda:

$$x^2+y^2+xy-2x-2y+1=0.$$

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si llamamos T a la matriz de términos cuadráticos vemos que $|T|>0$ y $|A|<0$ y por tanto se trata de una elipse.

Método II: La matriz de la cónica que buscamos es una matriz simétrica 3×3:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Imponemos las condiciones que ha de cumplir, para obtener información sobre sus coeficientes.

- La recta $x=0$ es tangente en el punto $(0,1)$:

$$(0,1,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad x=0 \iff (b+d)x+(c+e)y+(e+f)=0 \quad \equiv \quad x=0.$$

Obtenemos:

$$c+e=0, \quad e+f=0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad c=f, \quad e=-f.$$

- La recta $y=0$ es tangente en el punto $(1,0)$:

$$(1,0,1)A(x,y,1)^t = 0 \quad \equiv \quad y=0 \iff (a+d)x+(b+e)y+(d+f)=0 \quad \equiv \quad y=0.$$

Obtenemos:

$$a+d=0, \quad d+f=0; \quad \text{ó equivalentemente} \quad a=f, \quad d=-f.$$

La matriz ahora sabemos que es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} f & b & -f \\ b & f & -f \\ -f & -f & f \end{pmatrix},$$

y la correspondiente cónica:

$$fx^2+2bxy+fy^2-2fx-2fy+f=0.$$

- Finalmente utilizamos que la recta $x+y-2=0$ es tangente. Por tanto al intersecar con la cónica slo ha de haber un punto de corte. Tomamos $y=2-x$ y sustituimos en la ecuación de la cónica. Operando queda:

$$2(f-b)x^2-4(f-b)+f=0.$$

Para que tenga una única solución el discriminante ha de ser 0:

$$16(f-b)^2-8f(f-b)=0.$$

Hay dos opciones $f=b$ ó $b=f/2$. Tomando $f=1$ las correspondientes matrices serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{ó} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -1 \\ 1/2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pero la primera es degenerada, mientras que la segunda es la elipse que buscábamos.

(Segundo parcial, junio 2007)

15.– *Calcular la ecuación de una parábola de eje $2x-y=0$, vértice $(0,0)$ y que pasa por el punto $(5,0)$.*

Método I: Sabemos que el foco es un punto sobre el eje. Por tanto:

$$F=(a,2a).$$

Por otra parte la intersección Q de la directriz y del eje es el simétrico del foco respecto al vértice:

$$\frac{Q+F}{2}=(0,0) \quad \Rightarrow \quad Q=(-a,-2a).$$

La directriz es perpendicular al eje y pasa por Q:

$$x+2y+d=0; \quad -a-4a+d=0 \quad \Rightarrow \quad d=5a.$$

Queda:

$$x+2y+5a=0.$$

La parábola está formada por los puntos que equidistan de la directriz y del foco:

$$\frac{(x+2y+5a)^2}{1^2+2^2}=(x-a)^2+(y-2a)^2.$$

Como el punto $(5,0)$ pertenece a la parábola:

$$\frac{(5+5a)^2}{5} = (5-a)^2 + (-2a)^2.$$

Resolviendo la ecuación obtenemos $a=1$. Finalmente la ecuación queda:

$$\frac{(x+2y+5)^2}{1^2+2^2} = (x-1)^2 + (y-2)^2 \iff 4x^2 + y^2 - 4xy - 20x - 40y = 0.$$

Método II: En un sistema de referencia adecuado la ecuación reducida de la cónica es:

$$x'^2 = 2py'.$$

La fórmula de cambio de referencia es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (vertice) + M_{CB} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

donde M_{BC} es una matriz de cambio de base ortogonal. Los vectores de la base B son el vector normal al eje y su vector director (**por este orden**):

$$\{\frac{(2,-1)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}, \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2+2^2}}\}.$$

Por tanto la ecuación de cambio de referencia queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Cambiamos de base la ecuación anterior:

$$\frac{1}{5}(2x-y)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} 2p(x+2y).$$

Imponemos que la curva pase por el punto $(5,0)$:

$$\frac{1}{5}(10)^2 = \frac{\sqrt{5}}{5} 10p \qquad \Rightarrow \qquad p = 2\sqrt{5}.$$

Por tanto la ecuación de la parábola queda:

$$(2x-y)^2 = 20(x+2y) \qquad \Leftrightarrow \qquad 4x^2 + y^2 - 4xy - 20x - 40y = 0.$$

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

17.– *Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:*

(a) *Una ecuación reducida de la cónica* $(x+2y)^2 + 2y = 0$ *es*

Podemos ver que la ecuación es un parábola. Si desarrollamos la expresión que nos dan queda:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy + 2y = 0$$

El determinante de la matriz T de términos cuadráticos es 0. Pero el determinante de la matriz A asociada es no nulo. Se trata por tanto de una parábola.

Otra forma de verlo es hacer directamente el cambio de variable (OJO la nueva referencia no sería rectangular):

$$\begin{aligned} x' &= x + 2y \\ y' &= y \end{aligned}$$

La nueva ecuación (OJO, no la reducida) es $x'^2 + 2y' = 0$.

○ $(x'')^2 + 4(y'')^2 - 1 = 0$

FALSO.

○ $(x'')^2 + 2(y'')^2 = 0$

FALSO.

○ *la ecuación dada ya es reducida*

FALSO.

○ *ninguna de las restantes respuestas es correcta*

VERDADERO.

(Segundo parcial, junio 2002)

(b) *Si tenemos un haz de cónicas $\alpha C_1 + \beta C_2 = 0$ donde C_1 es una cónica formada por dos rectas paralelas y C_2 otra cónica formada por otras dos rectas paralelas, pero no paralelas a las de C_1,*

○ *todas las cónicas del haz son degeneradas.*

FALSO. Ejemplo. Consideramos las rectas $x = 0$, $x - 2 = 0$, $y = 0$, $y - 2 = 0$. El haz es:

$$\alpha x(x-2) + \beta y(y-2) = 0$$

Si $\alpha = \beta = 1$, la ecuación de la cónica es:

$$x^2 - 2x + y^2 - 2y = 0 \iff (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$$

y vemos que se trata de una elipse (no denegerada).

○ *todas las cónicas del haz son de tipo parabólico.*

FALSO. Lo ilustra el ejmplo anterior.

○ *las únicas cónicas degeneradas del haz son C_1 y C_2.*

FALSO. En el haz del ejemplo anterior, tomamos $\alpha = 1$ y $\beta = -1$:

$$x(x-2) - y(y-2) = 0 \iff x^2 - y^2 - 2x - 2y = 0 \iff (x-y)(x+y-2) = 0$$

Se trata de una cónica degenerada formada por dos rectas que se cortan.

De hecho el haz que nos dan corresponde al haz de cónicas que pasan por cuatro puntos situados en un paralelogramo. Hay tres posibles pares de rectas que pasan por ellos y por tanto hay tres cónicas degeneradas en el haz.

○ *las únicas cónicas de tipo parabólico del haz son C_1 y C_2.*

VERDADERO. Es claro que C_1 y C_2 son de tipo parabólico, por corresponder a pares de rectas paraleas.

De hecho salvo cambio de referencia (no necesariamente rectangular) el haz siempre puede escribirse como:

$$\alpha x(x-2) + \beta y(y-2) = 0$$

La matriz T de una cónica de este haz es:

$$T = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

Vemos que su determinante sólo se anula si $\alpha = 0$ o $\beta = 0$, es decir, para las cónicas iniciales C_1 y C_2.

(Segundo parcial, junio 1999)

(c) *La familia de cónicas $3x^2 + 2kxy + 4x + 2ly + 1 = 0$ con $k, l \in \mathbb{R}$*

Las matrices de términos cuadráticos y asociada a la cónica son respectivamente:

$$T = \begin{pmatrix} 3 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}; \qquad A = \begin{pmatrix} 3 & k & 2 \\ k & 0 & l \\ 2 & l & 1 \end{pmatrix}$$

donde $det(T) = -k^2$ y $det(A) = 4kl - 3l^2 - k^2 = (k-l)(3l-k)$.

◯ *para $k = 0$ contiene sólo parábolas.*

FALSO. Si $k = 0$ entonces $det(T) = 0$ y $det(A) = -3l^2$. Luego si $l = 0$ las cónicas son degeneradas y no parábolas.

◯ *contiene alguna circunferencia.*

FALSO. En general $det(T) = -k^2 \leq 0$, por lo que las cónicas nunca son de tipo elíptico.

◯ *contiene algún par de rectas secantes reales.*

VERDADERO. Por ejemplo si $det(T) < 0$ y $det(A) = 0$. Basta tomar $l = k$ ó $l = k/3$ y $k \neq 0$.

◯ *contiene alguna cónica sin direcciones asintóticas reales.*

FALSO. Basta tener en cuenta que $det(T) \leq 0$ por lo que todas las cónicas son de tipo parabólico o hiperbólico y tienen direcciones asintóticas reales.

(Segundo parcial, junio 1997)

I.– *Para cada número $k \in R$ se define la cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2kxy + y^2 - 1 = 0.$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -k & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$$

Se tiene que:

$$det(A) = -(1-k^2), \quad det(T) = 1 - k^2.$$

Por tanto $det(T) = 0 \iff k = \pm 1$. Distinguimos los casos:

- Si $k < -1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

- Si $k = -1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginaria, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x+y)^2 - 1 = 0 \iff (x+y-1)(x+y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $-1 < k < 1$, $det(T) > 0$, $det(A) < 0$. Se trata de una elipse real.

- Si $k = 1$, $det(T) = 0$, $det(A) = 0$. Se trata de un par de rectas paralelas, reales o imaginarias, o una recta doble. En particular la ecuación queda:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 1 = 0 \iff (x-y)^2 - 1 = 0 \iff (x-y-1)(x-y+1) = 0.$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

- Si $k > 1$, $det(T) < 0$, $det(A) > 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) *Cuando tenga sentido, calcular al excentricidad de la cónica en función de k.*

Tiene sentido cuando la cónica es una elipse o una hipérbola. Calculamos los autovalores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - k^2 = 0 \iff \lambda = 1 - k \quad \text{ó} \quad \lambda = 1 + k.$$

La ecuación reducida quedará por tanto:

$$(1-k)x^2 + (1+k)y^2 = 1 - k^2 \iff \frac{x^2}{1+k} + \frac{y^2}{1-k} = 1.$$

Distinguimos ahora los casos:

- Si $k < -1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1-k}$, $b = \sqrt{-k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1-k) + (-1-k)} = \sqrt{-2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{-2k}}{\sqrt{1-k}}.$$

- Si $-1 < k < 1$ es una elpise. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ y a, b respectivamente los semiejes mayor y menor. Vemos que:

– Si $-1 < k \leq 0$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1-k}$ y el menor $b = \sqrt{1+k}$.

– Si $0 \leq k < 1$ entonces el semieje mayor es $a = \sqrt{1+k}$ y el menor $b = \sqrt{1-k}$.

Ambas cosas se resumen diciendo que $a = \sqrt{1+|k|}, \quad b = \sqrt{1-|k|}$. Entonces:

$$c = \sqrt{(1+|k|) - (1-|k|)} = \sqrt{2|k|},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

- Si $k > 1$ es una hipérbola. La excentricidad es $e = \frac{c}{a}$, siendo $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ y a, b respectivamente la raíz cuadrada de los denominadores que acompañan a los coeficientes de x, y con signos positivo y negativo. En este caso $a = \sqrt{1+k}$, $b = \sqrt{k-1}$. Por tanto:

$$c = \sqrt{(1+k) + (k-1)} = \sqrt{2k},$$

y

$$e = \frac{\sqrt{2k}}{\sqrt{1+k}}.$$

En resumen y en todo caso:

$$e = \frac{\sqrt{2|k|}}{\sqrt{1+|k|}}.$$

(1 punto)

II.– *Se dice que una hipérbola es equilátera cuando sus asíntotas son perpendiculares.*

(a) *Demostrar que una cónica no degenerada es una hipérbola equilátera si y sólo si es nula la traza de su matriz T de coeficientes cuadráticos, con respecto a una referencia rectangular.*

Sea T la matriz de términos cuadrático de una matriz no degenerada.

Supongamos que la traza es nula. Entonces la suma de los autovalores de T es 0, y estos son λ y $-\lambda$, donde $\lambda \neq 0$, por ser la cónica no degenerada. Se trata de una hiṕerbola y en una referencia rectangular adecuada sabemos que su ecuación se escribe como:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

Las asíntotas son por tanto $\lambda x - \lambda y = 0$ y $\lambda x + \lambda y = 0$. Vemos que son perpendiculares.

Recíprocamente dada una hipérbola equilátera, sabemos que su ecuación en un sistema de referencia rectangular adecuado puede escribirse como:

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + c = 0$$

donde λ_1 y λ_2 son los autovalores de T, de signos positivo y negativo respectivamente. Las asíntotas son $\sqrt{\lambda_1}x + \sqrt{-\lambda_2}y = 0$ y $\sqrt{\lambda_1}x - \sqrt{-\lambda_2}y = 0$. Si son perpendiculares, entonces $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Deducimos que la traza de T es cero.

(b) *Encontrar todas las hipérbolas equiláteras que tengan la recta $y = 2x$ por eje focal.*

Recordemos primero lo siguiente. Si la ecuación reducida de una hipérbola equilátera es:

$$\lambda x^2 - \lambda y^2 + c = 0$$

con $\lambda > 0$ y $c < 0$, el eje focal es el eje OX ($y = 0$) y es paralelo al autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo.

Por tanto en las hipérbolas que buscamos el autovector de la matriz T asociado al autovalor positivo será el $(1, 2)$, siempre que $det(A) > 0$ (condición análoga a $c > 0$).

Así por el apartado anterior, la matriz T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

Imponemos que $(1, 2)$ sea un autovector asociado al autovector λ:

$$(1, 2)T = \lambda(1, 2) \quad \Rightarrow \quad a = -3\lambda/5; \quad b = 4\lambda/5$$

Podemos tomar $\lambda = 5$, y T es de la forma:

$$T = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto la matriz asociada A será:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & e \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

Ahora imponemos que el eje focal sea $y = 2x$, es decir: $(2, -1, 0)A(x, y, 1)$ paralelo a $2x - y = 0$. Operando obtenemos:

$$2d - e = 0 \quad \Rightarrow \quad e = 2d$$

La matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & d \\ 4 & 3 & 2d \\ d & 2d & f \end{pmatrix}$$

Recordemos que además hemos impuesto la condición $det(A) > 0$:

$$det(A) > 0 \iff d^2 > f$$

III.– *En el plano afín euclídeo dotado de un sistema de referencia rectangular, se pide hallar todas las elipses cuyas directrices sean $x = -2$ y $x = 6$ y que tengan un vértice en cada uno de los ejes coordenados.*

El eje focal es perpendicular a a las directrices. Por tanto los ejes de la elipse, son paralelos a los ejes coordenados y la ecuación será de la forma:

$$\frac{(x - \alpha)^2}{a^2} + \frac{(y - \beta)^2}{b^2} = 1$$

donde (α, β) es el centro de la elipse. Como el centro es equidistante de las directrices, sabemos además que:

$$\alpha = \frac{-2 + 6}{2} = 2$$

El hecho de que en cada eje coordenado haya un vértice significa que los puntos $(\alpha,0)$ y $(0,\beta)$ pertenecen a la cónica. Sustituyendo en la ecuación queda:

$$a^2 = \alpha^2 = 4$$
$$b^2 = \beta^2$$

Por último sabemos que las directrices son $(x-\alpha) = a^2/c$ y $(x-\alpha) = -a^2/c$. Deducimos que $a^2/c = 4$ y por tanto $c = 1$. Además $b^2 = a^2 - c^2$, luego $b^2 = 3$. Finalmente $\beta = \pm\sqrt{3}$. Hay así dos posibles elipses verificando las condiciones del enunciado:

$$\frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y-\sqrt{3})^2}{3} = 1; \quad \text{ó} \quad \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{(y+\sqrt{3})^2}{3} = 1$$

(Examen final, julio 2002)

1.– *Se consideran las cónicas C_1 y C_2 de ecuaciones:*

$$C_1 \equiv \quad x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 = 0$$
$$C_2 \equiv \quad xy + y^2 - 2x + y - 8 = 0.$$

Hallar la ecuación de la cónica no degenerada que pasa por los puntos de intersección de C_1 y C_2 y tiene el centro sobre la recta $x - y - 2 = 0$.

Consideramos el haz de cónicas que pasan por los puntos $C_1 \cap C_2$. Está generado por dos cónicas cualesquiera pasando por tales puntos; en concreto por las propias C_1 y C_2. El haz es por tanto:

$$x^2 + xy + y^2 + 2x + y - 5 + a(xy + y^2 - 2x + y - 8) = 0$$

y agrupando términos:

$$x^2 + (1+a)xy + (1+a)y^2 + 2(1-a)x + (1+a)y - 5 - 8a = 0,$$

para cualquier $a \in \mathbb{R}$. Vamos a imponer la condición de que el centro de la cónica esté en la recta dada. Para hallar el centro consideramos la matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & (1+a)/2 & 1-a \\ (1+a)/2 & (1+a) & (1+a) \\ 1-a & (1+a)/2 & -5-8a \end{pmatrix}.$$

El centro es un punto (x,y) verificando:

$$(x,y,1)A = (0,0,h).$$

Además tiene que cumplirse que pertenezca a la recta dada: $x - y - 2$. Operando, tenemos el sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas:

$$x + \left(\frac{1+a}{2}\right)y + 1 - a = 0$$
$$\left(\frac{1+a}{2}\right)x + (1+a)y + \left(\frac{1+a}{2}\right) = 0$$
$$x - y - 2 = 0$$

Podemos suponer $a \neq -1$ (en otro caso la segunda fila de A sería nula y la cónica sería degenerada). De manera que simplificando queda:

$$x + \left(\frac{1+a}{2}\right)y + 1 - a = 0$$
$$x + 2y + 1 = 0$$
$$x - y - 2 = 0$$

De las dos últimas ecuaciones obtenemos $(x,y) = (1,-1)$ y sustituyendo en la primera $a = 1$. La cónica pedida es:

$$x^2 + 2xy + 2y^2 + 2y - 13 = 0.$$

V.– *En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la ecuación de una elipse para la que los dos vértices que pertenecen a un eje son los puntos* $(2,1)$ *y* $(0,-1)$ *y que la distancia entre sus dos focos es 4.*

(Examen final, junio 2003)

Sabemos que el centro de la elipse es el punto medio entre los vértices que pertenecen a un mismo eje. En este caso:

$$C = \frac{(2,1)+(0,-1)}{2} = (1,0)$$

Por otra parte

$$2c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

Además la distancia entre los vértices es:

$$\sqrt{(2-0)^2+(1+1)^2} = 2\sqrt{2}$$

Por tanto:

$$2a = 2\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{2}$$

Dado que $a < c$ deducimos que $b^2 = a^2 + c^2 = 6$. La ecuación reducida queda:

$$\frac{x'^2}{2} + \frac{y'^2}{6} = 1$$

Para calcular la ecuación en la base inicial escribimos las ecuaciones de cambio de base. Teniendo en cuenta que los ejes tienen las direcciones $(2,2)$ y su perpendicular y que conocemos el centro, queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Despejando (x', y') queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{t} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

es decir

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y-1) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y+1) \end{cases}$$

Si substituimos en la ecuación reducida anterior obtenemos la ecuación que buscábamos:

$$x^2 + y^2 + xy - 2x - y - 2 = 0$$

VI.– *En el plano afín euclídeo dotado de un sistema cartesiano rectangular, consideramos la cónica* C *dada por la ecuación:*

$$x^2 + 4y^2 - 4x = 0$$

(a) *Encontrar la ecuación de otra cónica* C' *pasando por el punto* $(2,1)$*, cuyas asíntotas son paralelas los ejes de* C *y cuyo centro es el* $(1, \frac{1}{2})$.

La cónica que nos dan puede escribirse como:

$$(x-2)^2 + 4y^2 - 4 = 0$$

Luego es claro que los ejes son:

$$x = 2; \qquad y = 0;$$

En cualquier caso los podemos hallar de manera general como los conjugados de los autovectores asociados a autovalores no nulos de la matriz T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Los autovalores de T son 1 y 4 y los autovectores asociados respectivamente $(1,0)$ y $(0,1)$. Por tanto los ejes quedan:

$$(1,0,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff x - 2 = 0; \qquad (0,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff y = 0;$$

Ahora, como las asíntotas de C' son paralelas a estos ejes y pasan por el centro $(1, \dfrac{1}{2})$, sus ecuaciones son:

$$x - 1 = 0; \qquad y - \frac{1}{2} = 0$$

Escribimos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas:

$$(x-1)(y-\frac{1}{2}) + \beta = 0$$

Imponemos que la cónica ha de pasar por el punto $(2,1)$:

$$(2-1)(1-\frac{1}{2}) + \beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta = -\frac{1}{2}$$

La ecuación de la cónica pedida es:

$$(x-1)(y-\frac{1}{2}) + \beta - \frac{1}{2} = 0 \iff xy - \frac{1}{2}x - y = 0$$

(b) *Determinar la ecuación de una parábola que pase por los puntos de corte de C y C'.*

Escribimos el haz de cónicas formado por C y C' ya que todas las cónicas de dicho haz tienen en comun sus puntos de corte. Podemos excluir del haz la ecuación de C' (o la de C) porque no son parábolas:

$$x^2 + 4y^2 - 4x + \alpha(xy - \frac{1}{2}x - y) = 0 \iff 2x^2 + 8y^2 + 2\alpha xy - (8+\alpha)x - 2\alpha y = 0$$

La matriz de esta cuádrica y la de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & -(4+\alpha/2) \\ \alpha & 8 & -\alpha \\ -(4+\alpha/2) & -\alpha & 0 \end{pmatrix}; \qquad T = \begin{pmatrix} 2 & \alpha \\ \alpha & 8 \end{pmatrix}$$

Para que sea una parábola ha de cumplirse $det(T) = 0$ y $det(A) \neq 0$:

$$det(T) = 0 \iff 16 - \alpha^2 = 0 \iff \alpha = \pm 4$$

Pero si $\alpha = 4$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 4 & 8 & -4 \\ -6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 3 y por tanto es una parábola.

Si $\alpha = -4$ la matriz A queda:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & 4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Tiene rango 2 y por tanto no es una parábola.

En definitiva la parábola aparece cuando $\alpha = 4$ y su ecuación es:

$$x^2 + 4y^2 + 4xy - 6x - 4y = 0$$

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VII.– *Hallar la ecuación de una hipérbola una de cuyas asíntotas es la recta $x+2y-2=0$, la otra asíntota es paralela al eje OY y sabiendo que la polar del punto $(1,0)$ es la recta $x+y-3=0$.*

Método I: Sabemos que las asíntotas son

$$\begin{aligned} x+2y-2&=0\\ x-b&=0 \end{aligned}$$

para algún $b\in\mathbb{R}$.

Formamos el haz de cónicas conocidas dos asíntotas. Como la cónica pedida es no degenerada podemos escribir el haz como:

$$(x+2y-2)(x-b)+\lambda=0$$

Desarrollando queda:

$$x^2+2xy-(2+b)x-2by+2b+\lambda=0$$

Ahora imponemos que la recta polar de $(1,0)$ es la recta $x+y-3=0$.

Escribimos la matriz de la cónica:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -(2+b)/2\\ 1 & 0 & -b\\ -(2+b)/2 & -b & 2b+\lambda \end{pmatrix}$$

La recta polar del punto $(1,0)$ es:

$$(1,0,1)A(x,y,1)^t=0 \iff (1-\frac{2+b}{2})x+(1-b)y-\frac{2+b}{2}+2b+\lambda=0$$

Imponemos que sus coeficientes sean proporcionales a los de $x+y-3=0$ y obtenemos dos ecuaciones:

$$1-\frac{2+b}{2}=1-b;\qquad \text{y}\qquad -3(1-b)=-\frac{2+b}{2}+2b+\lambda$$

Resolviendo el sistema queda $b=2$ y $\lambda=1$, y la hipérbola pedida es:

$$x^2+2xy-4x-4y+5=0$$

Método II: Supongamos que la matriz de la cónica pedida es:

$$A=\begin{pmatrix} a & b & c\\ b & d & e\\ c & e & f \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta que las recta $x+2y-2=0$ es una asíntota, sabemos que es tangente a la cónica en su punto del infinito, es decir:

$$(2,-1,0)A(x,y,1)=0 \iff (2a-b)x+(2b-d)y+2c-e=0\equiv x+2y-2=0$$

Como ambas ecuaciones corresponden a la misma recta sus coeficientes son proporcionales y obtenemos dos relaciones:

$$\begin{aligned} 2b-d&=4a-2b\\ 2b-d&=-(2c-e) \end{aligned}$$

Por otra parte una recta paralela a OY también es asíntota, luego su punto del infinito pertenece a la cónica:

$$(0,1,0)A(0,1,0)^t=0 \quad\Rightarrow\quad d=0$$

Finalmente imponemos que la recta polar en $(1,0)$ es $x+y-3=0$:

$$(1,0,1)A(x,y,1)=0 \iff (a+c)x+(b+e)y+(c+f)=0\equiv x+y-3=0$$

De nuevo teniendo en cuenta que los coeficientes son proporcionales obtenemos:

$$a + c = b + e$$
$$-3(a + c) = c + f$$

Resolviendo el sistema formado por las 5 ecuaciones resulta:

$$b = a; \quad c = -2a; \quad d = 0; \quad e = -2a; \quad f = 5a.$$

La matriz de la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} a & a & -2a \\ a & 0 & -2a \\ -2a & -2a & 5a \end{pmatrix}$$

y tomando $a = 1$ corresponde a la cónica obtenida con el método anterior.

(Segundo parcial, mayo 2005)

VIII.– *Calcular la ecuación de una cónica de centro el punto* $(0,1)$*, tangente a la recta* $x + y = 0$ *en el punto* $(1,-1)$ *y que tiene por asíntota la recta* $y = 1$*.*

Método I: Consideramos el haz de cónicas conocidas una tangente, el punto de tangencia y una asíntota.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por la asíntota y la tangente:

$$(x + y)(y - 1) = 0$$

2) La recta doble que pasa por el punto de tangencia y es paralela a la asíntota (une los puntos de tangencia de ambas si interpetamos la asíntota como tangente en un punto del infinto). Una recta paralela a la asíntota es de la forma:

$$y = c.$$

Imponemos que pase por el punto $(1,-1)$ y deducimos que $c = -1$.

Formamos el haz:

$$(x + y)(y - 1) + \lambda(y + 1)^2 = 0 \iff (\lambda + 1)y^2 + xy - x + (2\lambda - 1)y + \lambda = 0$$

Imponemos que el centro sea el punto $(0,1)$. La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & \lambda + 1 & \lambda - 1/2 \\ -1/2 & \lambda - 1/2 & \lambda \end{pmatrix}.$$

El centro cumple:

$$(0,1,1)A = (0,0,h) \quad \Rightarrow \quad 1/2 - 1/2 = 0, \quad \lambda + 1 + \lambda - 1/2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1/4.$$

La cónica queda:

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

Método II: Sabemos que la cónica buscada es simétrica respecto del centro. Por tanto la recta simétrica a $x + y = 0$ por el punto $(0,1)$ es tangente a la cónica buscada en el simétrico de $(1,-1)$. Si llamamos A' a ese simétrico cumple:

$$\frac{A' + (-1,1)}{2} = (0,1) \quad \Rightarrow \quad A' = (0,2) - (1,-1) = (-1,3)$$

La recta simétrica es paralela a la inical:

$$x + y + c = 0$$

Como pasa por A':

$$-1 + 3 + c = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -2$$

Ahora consideramos el haz de cónicas conocidas dos tangentes y los puntos de tangencia.

Las cónicas que lo generan son:

1) La formada por las tangentes:

$$(x + y)(x + y - 2) = 0$$

2) La recta doble que pasa une los puntos de tangencia de ambas.

$$\frac{x-1}{-1-1} = \frac{y+1}{3+1} \iff 2x + y - 1 = 0.$$

Formamos el haz:

$$(x + y)(x + y - 2) + \lambda(2x + y - 1)^2 = 0$$

Imponemos que la recta $y = 1$ sea asíntota. Equivalentemente que su punto del infinito, el $(1, 0, 0)$ pertencezca a la cónica. La ecuación dela cónica en coordenadas homogéneas es:

$$(x + y)(x + y - 2t) + \lambda(2x + y - 1t)^2 = 0$$

Como el punto $(1, 0, 0)$ pertence a la misma obtenemos:

$$1 + 4\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1/4$$

Susyituyendo en la ecuacin y operando llegamos a:

$$3y^2 + 4xy - 4x - 6y - 1 = 0.$$

VII.– *En el plano afín euclídeo y referido a un sistema rectangular, se considera el conjunto de rectas:*

$$(2\alpha + 3)x + (\alpha + 4)y - \alpha^2 - 2 = 0 \quad , \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

(a) *Comprobar que por un punto del plano pasan dos rectas (reales, imaginarias o coincidentes).*

Basta tener en cuento que si fijamos un punto (x_0, y_0) del plano, las rectas que pasan por él son aquellas cuyo parámetro α satisface la ecuación:

$$-\alpha^2 + (2x_0 + y_0)\alpha + (3x_0 + 4y_0 - 2) = 0$$

Dado que el coeficiente de α^2 siempre es no nulo, esto es siempre una ecuación de segundo grado y por tanto puede haber dos soluciones reales, una solución real doble o dos imaginarias.

(b) *Hallar el ángulo que forman las rectas que pasan por el punto $A(\frac{-3}{5}, \frac{6}{5})$.*

Calculamos las rectas que pasan por dicho punto:

$$-\alpha^2 + (2\frac{-3}{5} + \frac{6}{5})\alpha + (3\frac{-3}{5} + 4\frac{6}{5} - 2) = 0 \iff -\alpha^2 + 1 = 0 \iff \alpha = \pm 1$$

Por tanto nos quedan las rectas de ecuaciones:

$$5x + 5y - 3 = 0; \qquad x + 3y - 3 = 0;$$

El coseno del ángulo que forman la rectas coincide con el coseno del ángulo que forman sus vectores normales. Utilizando el producto escalar obtenemos:

$$Cos(\beta) = \frac{(1,1),(1,3)}{\|(1,1)\|\|(1,3)\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{10}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

(c) *Hallar y clasificar el lugar geométrico de los puntos en los que las dos rectas coinciden.*

Corresponde a aquellos puntos para los la ecuación de segundo grado:

$$-\alpha^2 + (2x+y)\alpha + (3x+4y-2) = 0$$

tiene una solución real doble. Eso ocurre cuando el discrimante es 0:

$$(2x+y)^2 + 4(3x+4y-2) = 0$$

Operando queda:

$$4x^2 + y^2 + 4xy + 12x + 16y - 8 = 0$$

Vemos que es una cónica. Su matriz asociada y la de términs cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 8 \\ 6 & 8 & -8 \end{pmatrix}; \qquad T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Se verifica que $|T| = 0$ y $|A| = -100 \neq 0$. Por tanto es una parábola.

(d) *Hallar el eje del lugar geométrico obtenido en el apartado anterior.*

El eje corresponde a la recta conjugada de la dirección que marca el autovectora asociado al autovalor no nulo.

Los autovalores y autovectores de T son:

$$\begin{array}{ll} \lambda_1 = 5; & S_0 = \mathcal{L}\{(2,1)\} \\ \lambda_2 = 0; & S_0 = \mathcal{L}\{(-1,2)\} \end{array}$$

Por tanto el eje será:

$$(2,1,0)A(x,y,1)^t = 0 \iff 10x + 5y + 20 = 0 \iff 2x + y + 4 = 0$$

(Examen final, junio 2004)

VIII.– *En el plano afín euclídeo y en un sistema cartesiano rectangular, hallar la hipérbola cuyos vértices son el $(1,1)$ y $(-1,3)$ y que pasa por el $(0,-2)$.*

Sabemos que las rectas perpendiculares al eje focal y pasando por los vértices son las tangentes en dichos puntos. Conocidas dichas tangentes y los puntos de tangencia, podremos formar el haz de cónicas; el hecho de que la hipérbola buscada pase por $(0,-2)$ nos permitirá distinguirla dentro del haz.

Sabemos que el eje foca une los dos vértices:

$$\text{EJE FOCAL} \equiv \frac{x-1}{-1-1} = \frac{y-1}{3-1} \iff x + y - 2 = 0$$

Por tanto las rectas tangentes en los vértices (perpendiculares a este eje) son de la forma:

$$x - y + k = 0$$

En concreto imponiendo que pasen por los vértices quedan:

$$x - y - 0 = 0; \qquad \text{y} \qquad x - y + 4 = 0$$

Por tanto el haz de cónicas que tiene estas dos tangentes en los vértices es:

$$\alpha(x-y)(x-y+4) + \beta(x+y-2)^2 = 0$$

Ahora imponemos que el punto $(0,-2)$ está en la cónica:

$$\alpha(2)(6) + \beta(-4)^2 = 0 \iff \alpha = -\frac{4\beta}{3}$$

Tomando $\beta = -3$ y $\alpha = 4$ queda:

$$\alpha(x-y)(x-y+4) + \beta(x+y-2)^2 = 0 \iff x^2 + y^2 - 14xy + 28x - 4y - 12 = 0$$

(Segundo parcial, mayo 2004)

IX.– *En el plano afín euclídeo y con respecto a una referencia rectangular, se pide hallar la parábola cuyo vértice es el punto $(-2,3)$ y su directriz la recta $r \equiv x - 2y + 3 = 0$.*

El eje de la cónica es perpendicular a la directriz. Su ecuación es por tanto:

$$2x + y + \lambda = 0$$

Además pasa por el vértice, luego:

$$2 \cdot (-2) + 3 + \lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1$$

y la ecuación del eje queda:

$$2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del eje con la directriz:

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + y + 1 = 0 \\ x - 2y + 3 = 0 \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-1,1)$$

El vértice es el punto medio del foco y de este punto. Por tanto el foco verifica:

$$(-2,3) = \frac{(x,y) + (-1,1)}{2} \quad \Rightarrow \quad (x,y) = (-3,5)$$

Por tanto la ecuación de la parábola es:

$$d((x,y), FOCO) = d((x,y,), directriz) \iff \sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = \frac{x - 2y + 3}{\sqrt{5}}$$

Elevando al cuadrado y operando queda:

$$4x^2 + y^2 + 4xy - 24x - 38y - 161 = 0$$

(Examen final, septiembre 2003)

IX.– *En el plano afín euclídeo y referido a un sistema de referencia rectangular, determinar las cónicas que pasan por $P(0,2)$ y $Q(0,4)$, tienen una asíntota paralela a la recta $y-4x=0$ y cortan al eje OX en puntos A y B tales que $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=2$.*

(Examen extraordinario, septiembre 1998)

Supongamos que los puntos A y B son respectivamente el $(\alpha,0)$ y $(\beta,0)$. La condición $\overline{OA}\cdot\overline{OB}=2$. significa que $\alpha\beta=2$.

Consideramos el haz de cónicas pasando por P,Q,A,B:

$$\lambda PQ\cdot AB+\mu PA\cdot QB=0,$$

es decir,

$$\lambda xy+\mu(2x+\alpha y-2\alpha)(4x+\beta y-4\beta)=0$$

El hecho de tener una asíntota paralela a la recta $y-4x=0$ significa que pasa por el punto del infinito $(1,4,0)$. Sustituyendo (OJO: por ser punto impropio se eliminan los términos NO cuadráticos):

$$\lambda 1\cdot 4+\mu(2\cdot 1+\alpha\cdot 4)(4\cdot 1+\beta\cdot 4)=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\mu(-10-4\alpha-2\beta)$$

Tomando $\mu=1$ y teniendo en cuenta que $\beta=2/\alpha$ la ecuación queda:

$$8x^2+2y^2-10xy-(8a+\frac{16}{a})x-12y+16=0$$

X.– *En el plano afín euclídeo y en un sistema de referencia rectangular, hallar las ecuaciones generales y matriciales de todas las cónicas no degeneradas, que tengan por focos $F(0,0)$ y $F'(2,4)$ y cuya distancia del centro a uno de los vértices es 2.*

El centro de la cónica es el punto medio de los focos:

$$\frac{(0,0)+(2,4)}{2}=(1,2)$$

La distancia de los focos al centro es $\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

Distinguiremos dos casos:

(a) Supongamos que la cónica es una elipse.

Entonces con la notación habitual, $c=\sqrt{5}$. Dado que $c>2$ la distancia del vértice al centro que nos dan corresponde al eje menor de la cónica, y por tanto $b=2$. Deducimos entonces que $a=\sqrt{b^2+c^2}=3$.

Para escribir la ecuación utilizaremos la caracterización de la elipse como lugar geométrico: los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante. En particular dicha suma es igual a $2a=6$:

$$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=6 \iff \sqrt{(x-2)^2+(y-4)^2}=6-\sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y operando queda:

$$x+2y+4=3\sqrt{x^2+y^2}$$

y elevando otra vez al cuadrado:

$$8x^2+5y^2-4xy-8x-16y-16=0$$

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 & -2 & -4\\ -2 & 5 & -8\\ -4 & -8 & -16\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ 1\end{pmatrix}=0$$

(b) Supongamos que la cónica es una hipérbola.

De nuevo con la notación habitual, $c = \sqrt{5}$. Ahora el vértice está sobre el eje focal y así $a = 2$.

Utilizaremos también la caracterización de la hipérbola como lugar geométrico: los puntos cuya diferencia de distancias a los focos es constante. En particular dicha diferencia es en valor absoluto igual a $2a = 4$:

$$|\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2}| = 4 \iff \sqrt{(x-4)^2+(y-2)^2} = 4 + \sqrt{x^2+y^2}$$

Elevando al cuadrado y operando queda:

$$x + 2y - 1 = 2\sqrt{x^2+y^2}$$

y elevando otra vez al cuadrado:

$$3x^2 - 4xy + 2x + 4y - 1 = 0$$

Matricialmente:

$$(\,x \quad y \quad 1\,)\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

(Examen extraordinario, septiembre 1997)

2.– *Para cada número real a definimos la cónica de ecuación:*

$$9x^2 + ay^2 - 6axy + 3a - 12 = 0.$$

i) *Clasificar las cónicas dependiendo de los valores de a.*

La matriz asociada a la cónica y de términos cuadráticos son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3a & 0 \\ -3a & a & 0 \\ 0 & 0 & 3a-12 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 9 & -3a \\ -3a & a \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

$$|A| = (3a-12)(9a-9a^2) = 27a(a-4)(1-a), \qquad |T| = 9a - 9a^2 = 9a(1-a).$$

Los puntos donde se anulan son $a = 0, 1, 4$. Estudiamos los siguientes casos:

i) $a < 0$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| > 0$. Se trata de una hipérbola.

ii) $a = 0$. Se tiene que $|T| = 0$ y $|A| = 0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. En particular la ecuación queda:

$$9x^2 - 12 = 0 \iff (3x - \sqrt{12})(3x + \sqrt{12}) = 0.$$

Es decir se tratan de rectas paralelas reales.

iii) $0 < a < 1$. Se tiene que $|T| > 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una elipse real.

iv) $a = 1$. Se tiene que $|T| = 0$ y $|A| = 0$. Se trata de rectas paralelas rales o imaginarias o coincidentes. La matriz asociada queda:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}.$$

Haciendo congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

y vemos que de nuevo se tratan de rectas paralelas reales.

v) $1 < a < 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| > 0$. Se trata de una hipérbola.

vi) $a = 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| = 0$. Se tratan de rectas reales cortándose en un punto.

vii) $a > 4$. Se tiene que $|T| < 0$ y $|A| < 0$. Se trata de una hipérbola.

ii) *En aquellos casos en los que las cónicas sean degeneradas escribir las ecuaciones de las rectas que las forman.*

- Para $a = 0$. La ecuación es:

$$9x^2 - 12 = 0 \iff (3x - \sqrt{12})(3x + \sqrt{12}) = 0.$$

Luego el par de rectas paralelas son:

$$3x - \sqrt{12} = 0, \qquad 3x + \sqrt{12} = 0.$$

- Para $a = 1$. Sabemos que se trata de rectas paralelas a la recta de centros. Esta viene dada por la ecuación:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff 9x - 3y = 0 \iff 3x - y = 0.$$

Las rectas por tanto son de la forma $3x - y + c = 0$. Por otra parte si intersecamos la cónica con la recta $x = 0$ queda:

$$y^2 = 9 \iff y = \pm\sqrt{9}.$$

Por tanto el punto $(0, 3)$ pertenece a una paralela y $(0, -3)$ a la otra. Deducimos que tales rectas son:

$$3x - y + 3 = 0, \qquad 3x - y - 3 = 0.$$

- Para $a = 4$ el par de rectas cortándose pasa por el centro que cumple:

$$(x, y, 1)A = (0, 0, h) \iff \begin{array}{r} 9x - 12y = 0 \\ -12x + 9y = 0 \end{array}$$

Resolviendo el centro es $(x, y) = (0, 0)$. Cortamos ahora la cónica con la recta $x = 1$ y obtenemos:

$$9 + 4y^2 - 24y = 0$$

de donde:

$$y = 3 \pm 3\sqrt{3}/2$$

Las rectas buscadas pasan por el origen y respectivamente pos los puntos $(1, 3+3\sqrt{3}/2)$ y $(1, 3-3\sqrt{3}/2)$. Quedan:

$$(6 + 3\sqrt{3})x - 2y = 0, \qquad (6 - 3\sqrt{3})x - 2y = 0.$$

(1 puntos)

XII.– *Calcular la ecuación de una parábola cuyo foco es el punto* $(1,1)$ *y el vértice el punto* $(2,3)$. *Escribir además su ecuación reducida.*

El eje de la parábola es el punto que une el vértice con el foco. Además la directriz d es una recta perpendicular al eje. El vértice es el punto medio del foco y el punto de corte del eje y de la directriz. Teniendo en cuenta todo esto hallaremos la ecuación de d.

El punto de corte (a,b) de eje y directriz cumple:

$$\frac{(a,b)+(1,1)}{2}=(2,3) \quad \Rightarrow \quad (a,b)=(4,6)-(1,1)=(3,5).$$

Ahora el vector normal de d es: $(2,3)-(1,1)=(1,2)$. Por tanto la ecuación de la directriz es de la forma:

$$x+2y+c=0.$$

Como pasa por $(3,5)$ queda:

$$3+10+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-13.$$

La directriz es:

$$x+2y-13=0.$$

Finalmente utilizamos que la parábola es el lugar geométrico de puntos que equidistan de foco y directriz:

$$\frac{(x+2y-13)^2}{1^2+2^2}=(x-1)^2+(y-1)^2.$$

Operando:

$$x^2+4y^2+4xy-26x-52y+169=5x^2-10x+5+5y^2-10y+5$$

y en definitiva:

$$4x^2+y^2-4xy+16x+42y-159=0.$$

La ecuación reducida es de la forma:

$$x'^2=2py'$$

donde $p/2$ es la distancia del foco al vértice. Por tanto:

$$p=2\sqrt{(2-1)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}.$$

La ecuación reducida queda:

$$x'^2=4\sqrt{5}y'.$$

(Examen final, junio 2007)

XII.– *En el plano afín y con respecto a la referencia canónica, calcular la ecuación de una cónica no degenerada cuyo único eje es la recta* $y=2x$ *y es tangente a la recta* $y=0$ *en el punto* $(1,0)$.

Como es no degenerada y tiene un único eje ya sabemos que es una parábola. Calculemos el simétrico de la tangente con respecto al eje. Para ello hallamos la recta perendicular a este y pasando por $(1,0)$.

El eje tiene vector director $(1,2)$. Una recta perpendicular es de la forma:

$$x+2y+c=0.$$

Como pasa por $(1,0)$ obtenemos:

$$1+2\cdot 0+c=0 \quad \Rightarrow \quad c=-1.$$

Intersecamos esta recta con el eje:

$$\begin{aligned} x + 2y - 1 &= 0 \\ 2x - y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (x, y) = (1/5, 2/5).$$

Ahora el simétrico P' del punto $P = (1, 0)$ cumple:

$$\frac{P + P'}{2} = (1/5, 2/5) \quad \Rightarrow \quad P' = (2/5, 4/5) - (1, 0) = (-3/5, 4/5).$$

La recta simétrica de $y = 0$ es la que une el punto P' con el origen:

$$4x + 3y = 0.$$

Entonces conocemos dos rectas tangente y sus puntos de tangencia P y P'. Planteamos el haz:

$$\lambda(tg_1 \cdot tg_2) + PP'^2 = 0.$$

Queda:

$$\lambda(y(4x + 3y)) + (x + 2y - 1)^2 = 0 \iff x^2 + (4 + 4\lambda)xy + (4 + 3\lambda)y^2 - 2x - 4y + 1 = 0.$$

Para hallar el parámetro imponemos que sea una parábola, es decir, el determinante de la matriz de términos cuadráticos ha de ser nulo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 + 2\lambda \\ 2 + 2\lambda & 4 + 3\lambda \end{vmatrix} = 0 \iff 4\lambda^2 + 5\lambda = 0.$$

Aparecen dos soluciones $\lambda = 0$ y $\lambda = -5/4$. La primera queda descartada porque corresponde a una cónica degenerada (recta doble). En definitiva la ecuación pedida es:

$$4x^2 - 4xy + y^2 - 8x - 16y + 4 = 0.$$

(Examen extraordinario, septiembre 2007)

XV.– *El el plano afín E_2 y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se considera el pentágono irregular de vértices:*

$$A = (0, 0); \quad B = (1, 1); \quad C = (1, 3); \quad D = (0, 4); \quad E = (-1, 2).$$

(a) *Calcular la ecuación de una elipse circunscrita a este pentágono.*

Utilizamos el haz de cónicas pasando por cuatro puntos y buscamos la cónica del haz que pase por el quinto. El haz de cónicas por $ABCD$ está generado por las cónicas degeneradas:

$$AD \cdot BC = 0; \qquad AB \cdot DC = 0.$$

Donde:

$$AD \equiv x = 0; \qquad BC \equiv x - 1 = 0; \qquad AB \equiv x - y = 0; \qquad CD \equiv x + y - 4 = 0.$$

El haz queda:

$$\alpha x(x - 1) + (x - y)(x + y - 4) = 0,$$

e imponiendo que el punto E pertenezca a la cónica:

$$\alpha(-1)(-1 - 1) + (-1 - 2)(-1 + 2 - 4) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\frac{9}{2}$$

Si sustituimos la elipse pedida es:

$$7x^2 + 2y^2 - x - 8y = 0.$$

(b) *Hallar el centro y los ejes de la elipse.*

La matriz asociada a la cónica es:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & -4 \\ -1/2 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

El centro es el punto $C = (a, b)$ verificando:

$$(a \quad b \quad 1) A = (0 \quad 0 \quad h) \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{14}; \quad b = 2.$$

Por tanto $C = (\frac{1}{14}, 2)$.

Los ejes son las rectas polares de las direcciones correspondientes a los autovectores de la matriz de términos cuadráticos:

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Tenemos:

$$|T - \lambda I| = 0 \iff \lambda = 7 \text{ ó } \lambda = 2.$$

Los autovectores son:

$$(T - 7Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -5y = 0 \iff y = 0; \qquad (T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 5x = 0 \iff x = 0.$$

Y por tanto los ejes quedan:

$$(1, 0, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff 7x - \frac{1}{2} = 0.$$
$$(0, 1, 0)A(x, y, 1)^t = 0 \iff 2y - 4 = 0 \iff y - 2 = 0.$$

(Examen final, diciembre 2005)