ÁLGEBRA LINEAL II — Algunas soluciones a la práctica 14

Geometría afín. (Curso 2010–2011)

1.– *En un espacio afín real de dimensión 3, se consideran dos sistemas de referencia* $R = \{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ *y* $R' = \{P, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$*, donde*

$$\begin{array}{rcl} \overline{OP} & = & \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 - 2\bar{e}_3 \\ \bar{u}_1 & = & -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_2 & = & \bar{e}_1 - \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{u}_3 & = & -\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + 2\bar{e}_3 \end{array}$$

Se pide:

(d) *Resolver el mismo problema en el espacio afín ampliado.*

Si (x, y, z, t) y (x', y', z', t') son coordenadas homogéneas en las referencias R y R' respectivamente, las ecuaciones de cambio de coordenadas son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix}$$

y,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1/3 & 1/3 & -1 \\ -1 & -2/3 & 1/3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Calculemos los puntos **propios** que tienen la mismas coordenadas en ambas referencias. Es decir:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}$$

Equivale a calcular los autovalores asociados al 1, es decir, a resolver el sistema:

$$\left(\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando obtenemos:

$$\begin{pmatrix} x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5t & 3t & -6t & t \end{pmatrix}$$

2.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y referido a un sistema ortonormal, se definen los puntos* $A(2, -1, 1)$, $B(-1, 0, 3)$*, las rectas*

$$r : \frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}, \qquad s : \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-3}$$

y los planos $P : 3x - 2y + 4z + 8 = 0$, $Q : x + 5y - 6z - 4 = 0$.

Las rectas se darán en forma continua y los planos por sus ecuaciones cartesianas. Se pide:

(a) *Recta paralela a r que pasa por A.*

El vector director es el de r, es decir, $(3,1,1)$ y pasa por $A(2,-1,1)$. Por tanto su ecuación continua es:

$$\frac{x-2}{3} = y+1 = z-1$$

(d) *Plano que pasa por B y es paralelo a r y s.*

La dirección del plano está generada por los vectores directores de r y s, es decir, $(3,1,1)$ y $(1,2,-3)$. Por tanto el vector normal (perpendicular) del plano será el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

El plano será de la forma

$$-5x + 10y + 5z + \lambda = 0$$

Imponiendo que pase por $B(-1,0,3)$ queda $\lambda = -20$, y el plano es

$$-x + 2y + z - 4 = 0$$

Otra forma de calcularlo directamente es tomar los puntos (x,y,z) de manera que el vector que los une con B sea linealmente dependiente de los vectores directores:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$$

(e) *Recta perpendicular a Q y que pasa por A.*

Por ser perpendicular a Q el vector director de la recta es el normal al plano Q, es decir, $(1,5,-6)$. Por tanto la recta pedida tiene por ecuación:

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-1}{-6}$$

(f) *Plano perpendicular a s y que pasa por B.*

El vector normal al plano que buscamos será el vector director de s, es decir, $(1,2,-3)$. La ecuación del plano es de la forma:

$$x + 2y - 3z + \lambda = 0$$

e imponiendo que $B(-1,0,3)$ esté en el plano, queda $\lambda = 10$:

$$x + 2y - 3z + 10 = 0$$

(g) *Recta que pasa por A y es perpendicular a r y a s.*

Si la recta es perpendicular a r y s su vector director será el producto vectorial de los vectores directores de r y s. Lo hemos calculado en (d): $(-5,10,5)$. La ecuación de la recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{10} = \frac{z-1}{5}$$

(j) *Recta que pasa por A, es perpendicular a s y paralela a Q.*

El vector director de la recta pedida es paralelo a la dirección de Q y por tanto perpendicular a su vector normal $(1, 5, -6)$. También es perpendicular al vector director de s, $(1, 2, -3)$. Por tanto podemos tomar como dirección de la recta buscada el producto vectorial de ambos:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 5 & -6 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 - 3\bar{e}_3$$

La recta buscada es:

$$\frac{x-2}{-3} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-1}{-3} \iff x - 2 = y + 1 = z - 1$$

(n) *Recta que pasa por A, corta a s y es perpendicular a r.*

Las rectas que pasan por A y son perpendiculares a r, están en el plano que pasa por A y es perpendicular a r. Dicho plano tiene por vector normal el director de r, $(3, 1, 1)$. Así su ecuación será:

$$3x + y + z + \lambda = 0$$

Imponiendo que $A(2, -1, 1)$ verifique la ecuación, obtenemos $\lambda = -6$.

Ahora como la recta que buscamos ha de cortar a s, calculamos la intersección de s con este plano. Un punto de s es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación del plano:

$$3a + 2a - 3a - 6 = 0$$

vemos que $a = 3$. Por tanto la recta que buscamos es la que une los puntos $A(2, -1, 1)$ y $(3, 6, -9)$:

$$\frac{x-2}{3-2} = \frac{y+1}{6+1} = \frac{z-1}{-9-1} \iff x - 2 = \frac{y+1}{7} = \frac{z-1}{-10}$$

(o) *Plano perpendicular a P, paralelo a r y que pasa por A.*

Los vectores directores del plano que buscamos son el normal a P, $(3, -2, 4)$ y el director de r, $(3, 1, 1)$. Además ha de pasar por $A(2, -1, 1)$. Por tanto la ecuación pedida viene dada por la anulación del determinante:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 3 & -2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -6x + 9y + 9z + 12 = 0 \iff 2x - 3y - 3z - 4 = 0$$

(p) *Perpendicular común a r y s.*

La recta que buscamos esta contenida en los planos π_1 y π_2 definidos por r y s y la dirección perpendicular a ambos respectivamente. Por tanto es la intersección de estos dos planos. Lo que haremos es caclular el plano π_1 e intersecarlo con s para conocer un punto de la recta que buscamos. Calcularemos también la direción ortogonal a ambas rectas.

La dirección perpendicular a r y s, la obtenemos haciendo el producto vectorial de los vectores directores de las dos rectas:

$$\begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\bar{e}_1 + 10\bar{e}_2 + 5\bar{e}_3$$

Podemos tomar para simplificar la dirección $(-1, 2, 1)$. Ahora la ecuación del plano π_1 es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff -x - 4y + 7z + 7 = 0$$

Intersecamos con s. Un punto de esta recta es de la forma $(a, 2a, -3a)$. Susituyendo en la ecuación de π:

$$-a - 8a - 21a + 7 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 7/30$$

Por tanto el puntos de intersección de la recta buscada con s es $(7/30, 7/15, -7/10)$. La ecuación de la recta pedida es:

$$\frac{x - 7/30}{-1} = \frac{y - 7/15}{2} = \frac{z + 7/10}{1}$$

5.– *Consideramos el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica viene dada por:*

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dado el tetraedro de vértices:

$$A = (0,0,0),\ B = (1,0,0),\ C = (2,0,1),\ D = (1,1,1),$$

calcular las coordenadas de la proyección ortogonal del vértice A sobre la base opuesta BCD.

Las ecuación vectorial del plano BCD es:

$$X = B + \alpha\vec{BC} + \beta\vec{BD},$$

es decir:

$$(x,y,z) = (1,0,0) + \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,1) = (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta).$$

La proyección buscada A' pertence a ese plano y debe de cumplir que el vector AA' sea perpendicular al mismo; equivalente que sea perpendicular a sus vectores directores. Imponemos estas condiciones:

$$\vec{AA'}\perp\vec{BC} \qquad \Rightarrow \qquad (1+\alpha,\beta,\alpha+\beta)G(1,0,1)^t = 0$$

$$\vec{AA'}\perp\vec{BD} \qquad \Rightarrow \qquad (1+\alpha,\beta,\alpha+\beta)G(0,1,1)^t = 0$$

Operando obtenemos las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 4\alpha + 3\beta &= -2 \\ 3\alpha + 5\beta &= 0 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema:

$$\alpha = -\frac{10}{11}, \quad \beta = \frac{6}{11}.$$

La proyección pedida es:

$$A' = (1+\alpha, \beta, \alpha+\beta) = (\frac{1}{11}, \frac{6}{11}, -\frac{4}{11}).$$

6.– *En un espacio afín sobre $\mathbb{R}^3$ en el que se ha fijado una referencia, discutir las posiciones relativas, en función de los parámetros a, $b \in \mathbb{R}$, de:*

(a) *los tres planos siguientes:*

$$\Pi_1 : x + y + bz = 1, \qquad \Pi_2 : ax + y = 0, \qquad \Pi_3 : x + ay = a$$

Hay que discutir el sistema formado por las tres ecuaciones. La matriz del sistema y la ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}; \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & b & 1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & a \end{pmatrix}$$

Vemos que $|A| = b(a^2-1)$. Por tanto:

- Si $a \neq 1$, $a \neq -1$ y $b \neq 0$, A es no singular y el sistema tiene solución única. Los tres planos se cortan en un único punto.

- Si $a = 1$ y $b \neq 0$, el rango de A es 2 y el rango de $\overline{A}$ es 3. Por tanto el sistema no tiene solución. Los tres planos no se cortan. En particular vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos y cada uno de ellos corta a π_3 en una recta.

- Si $a = 1$ y $b = 0$, entonces el rango de A es 1 y el rango de $\overline{A}$ es 2. De nuevo el sistema no tiene solución. En particular vemos que los planos π_1 y π_3 coinciden y son paralelos al plano π_2.

- Si $a = -1$, entonces el rango de A es 2 y el rango de $\overline{A}$ es 3. El sistema no tiene solución. En concreto vemos que los planos π_2 y π_3 son paralelos y son cortados cada uno de ellos en una recta por el planto π_1.

- Si $b = 0$, $a \neq 1$ y $a \neq -1$, entonces el rango de A es 2 y el rango de $\overline{A}$ es 3. El sistema no tiene solución. Además ningún par de planos son paralelos, y por tanto se cortan dos a dos en rectas paralelas.

(b) *las dos rectas siguientes:*

$$r \equiv \frac{x-a}{-3a} = y - 1 = z + 1, \qquad s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{b} = z$$

Escribimos las ecuaciones cartesianas:

$$\left.\begin{aligned} x + 3ay &= 4a \\ y - z &= 2 \end{aligned}\right\} \equiv r \qquad \left.\begin{aligned} x - 3z &= 2 \\ y - bz &= 1 \end{aligned}\right\} \equiv s$$

Consideramos el sistema formado por las cuatro ecuaciones. La matriz del sistema y su ampliada son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -b \end{pmatrix}; \qquad \overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3a & 0 & 4a \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -b & 1 \end{pmatrix}$$

El determinante es $|\overline{A}| = (a+1)(1+2b)$. Por tanto:

- Si $a \neq -1$ y $b \neq -0.5$ entonces $\overline{A}$ tiene rango 4 y comprobamos que A tiene rango 3, por tanto las rectas se cruzan en el espacio (no se cortan y no son paralelas).

- Si $a = -1$, estudiamos el rango de A. Vemos que si $b \neq 1$, entonces el rango de A y de $\overline{A}$ es 3. Por tanto el sistema es determinado con solución única. Las rectas se cortan en un punto. Por el contrario si $b = 1$, el rango de A es 2, pero el de $\overline{A}$ es 3. El sistema no tiene solución. Ahora, como el rango de A es 2 las rectas tiene la misma dirección, es decir, son paralelas.

- Si $b = 0.5$ y $a \neq -1$ entonces el rango de A y de $\overline{A}$ es 3. Por tanto el sistema es determinado con solución única. Las rectas se cortan en un punto.

9.– *En el espacio afín E_3 y con respecto a una referencia rectangular se considera un tetraedro regular de vértices A, B, C, D. Se sabe que los vértices tienen todas sus coordenadas no negativas, $A = (0,0,0)$, $B = (1,0,0)$ y el vértice C está en el plano $z = 0$.*

a) *Calcular las coordenadas de los vértices C y D.*

Las caras de un tetraedro regular son triángulos equiláteros. Como $d(A,B) = 1$, en particular el lado de estos triángulos es 1. El vértice C equidista de los demás vértices y por tanto está en la mediatriz de los puntos A y B en el plano $z = 0$, que es la recta $x = 1/2$, $z = 0$. Sus coordenadas serán $(1/2, y, 0)$.

Además:

$$d(A,C) = 1 \iff \sqrt{(1/2)^2 + y^2} = 1 \iff y^2 = 3/4$$

Como se nos indica que todas las coordenadas de los vértices son no negativas, nos queda:

$$C = (1/2, \sqrt{3}/2, 0).$$

Ahora el vértice D equidista de los demás (en particular de A y B), luego sus coordenadas son de la forma $D = (1/2, a, b)$. Además:

$$d(A,D) = 1 \iff \sqrt{1/4 + a^2 + b^2} = 1 \iff a^2 + b^2 = 3/4$$
$$d(C,D) = 1 \iff \sqrt{(a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2} = 1 \iff (a - \sqrt{3}/2)^2 + b^2 = 1$$

Resolviendo el sistema y quedándonos con las soluciones no negativas, obtenemos $a = \sqrt{3}/6$, $b = \sqrt{6}/3$ y:

$$D = (1/2, \sqrt{3}/6, \sqrt{6}/3).$$

Observación: En realidad teniendo en cuenta la equidistancia de D con los demás vértices, ya sabemos que su proyección sobre el plano $z = 0$ debe de ser el centro del triángulo equilétro ABC:

$$\frac{A + B + C}{3} = (1/2, \sqrt{3}/6, 0)$$

De donde directamente obtendríamos que el punto D tiene coordenadas $(1/2, \sqrt{3}/6, b)$.

b) *Calcular el ángulo que forman dos caras del tetraedro.*

El ángulo que forman dos caras del tetraedro es el que forman los vectores normales a los planos que las contienen.

La cara ABC está contenida en el plano $z = 0$ y su vector normal es el $(0, 0, 1)$.

El vector normal de la cara ABD es el producto vectorial de los vectores AB y AD:

$$AB \times AD = \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/6 & \sqrt{6}/3 \end{vmatrix} = -\frac{\sqrt{6}}{3}\bar{e}_2 + \frac{\sqrt{3}}{6}\bar{e}_3.$$

Por tanto si llamamos α al ángulo pedido tenemos:

$$cos(\alpha) = \frac{(0,0,1)(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})}{\|(0,0,1)\|\|(0, -\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6})\|} = \frac{1}{3}$$

c) *Responde razonadamente a las siguientes cuestiones:*

Aunque no es imprescindible, hacemos primero esta observación previa.

Dados dos cuartetos de puntos del espacio afín no coplanarios P_1, P_2, P_3, P_4 y Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, existe una **única** trasnformación afín que nos lleva cada P_i en Q_i, $i = 1, 2, 3, 4$. Basta tener en cuenta que una aplicación lineal queda unívocamente determinada si sabemos como actúa sobre una base. En nuestro caso tenemos que llevar la base $\{\overline{P_2P_1}, \overline{P_3P_1}, \overline{P_4P_1}\}$ en $\{\overline{Q_2Q_1}, \overline{Q_3Q_1}, \overline{Q_4Q_1}\}$. Eso nos determina la parte vectorial de la transformación afín. Por otro lado la componemos con una traslación que nos lleve el punto P_1 en el Q_1.

c.i) *¿Existe una isometría que deje fijos dos vértices cualesquiera e intercambie los otros dos?. ¿Puede ser un giro?.*

Una simetría respecto al plano perpendicular al lado que une dos vértices y pasando por su punto medio, intercambia estos dos y deja fijos el resto. Es una transformación inversa, luego por la unicidad observada antes, nunca puede ser un giro.

Ahora podemos usar varias de estas isometrías para mover los vértices como queramos.

c.ii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en B, C, D y A respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

Usando las isometráas vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow BACD \longrightarrow BCAD \longrightarrow BCDA.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de tres trasnformaciones inversas, vuelve a ser inversa y no puede ser un giro.

c.iii) *¿Existe una isometría que lleve los vértices A, B, C y D en C, D, A y B respectivamente?. ¿Puede ser un giro?.*

De nuevo, usando las isometrías vistas en i). Hacemos:

$$ABCD \longrightarrow ACBD \longrightarrow CABD \longrightarrow CADB \longrightarrow CDAB.$$

y conseguimos la isometría pedida. Como es composición de cuatro trasnformaciones inversas, es una transformación directa y por tanto un giro.

10.– *En el espacio afín euclídeo E_3 con el producto escalar usual, consideramos la recta r de ecuación:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

c) *Si hacemos girar la recta:*

$$s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

sobre el eje r, indicar razonadamente que tipo de superficie se obtiene (no es necesario calcular su ecuación).

(1.2 puntos)

Observamos que las rectas r y s no se cortan, ya que el sistema:

$$\begin{cases} 0 = x \\ 1 = y + z \\ 1 = x \\ 0 = z \end{cases}$$

es claramente incompatible. Además el vector director de s es $(0, 1, -1)$ y por tanto las rectas no son paralelas.

Si tomamos un punto de s y lo hacemos girar entorno a la recta r obtenemos una circunferencia. Deducimos que la superficie cortada por planos perpendiculares a r nos proporciona circunferencias (cónicas). Se trata por tanto de una cuádrica.

Además tiene una familia de rectas (es reglada) y es de revolución: las únicas superficies cuádricas de revolución y regladas son el cono, el cilindro y el hiperboloide de una hoja (excluimos los planos o pares de planos).

Pero en el cono, las rectas y el eje de revolución se cortan; en el cilindro las rectas y el eje de revolución son paralelos. Hemos descartado ambas cosas. Se trata por tanto de un hiperboloide de una hoja.

12.– *En el espacio E_3 se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ del que se sabe que la base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$ es ortonormal. Con respecto a $\mathcal{R}$ se tienen las ecuaciones de las rectas r y s:*

$$r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$$

Determina la ecuación implícita del lugar geométrico de las rectas que cortan a r y s y son perpendiculares a s.

En primer lugar hallamos la matriz de Gram respecto de la referencia dada. Sabemos que con respecto a la base:

$$B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_1 + \bar{e}_2, \bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3\}$$

la matriz de Gram es la identidad. Tenemos:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{CB} = M_{BC}^{-1}.$$

Entonces:

$$G_C = M_{CB}^t G_B M_{CB} = M_{CB}^t M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Los puntos de la recta r son de la forma:

$$(0, 0, a)$$

Los puntos de la recta s son de la forma:

$$(b, 1, -b)$$

El vector que une ambos es el vector director de las rectas pedidas:

$$(b, 1, -b-a)$$

y ha de ser perpendicular a s, luego:

$$(1, 0, -1)G_C(b, 1, -b-a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad (1, 0, -2)(b, 1, -b-a)^t = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3b/2.$$

La ecuación paramétrica de los puntos que unen:

$$(0, 0, -3b/2), (b, 1, b/2)$$

es:

$$\begin{aligned} x &= \lambda b \\ y &= \lambda \\ z &= -3b/2 + 2b\lambda \end{aligned}$$

Eliminando parámetros queda:

$$\lambda = y; \quad b = x/y;$$

y sustituyendo en la última ecuación:

$$z = -3x/(2y) + 2x \quad \Rightarrow \quad 2yz + 3x - 4xy = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

15.– *Encontrar la única respuesta correcta, en las siguientes cuestiones:*

(a) *Sea E el espacio afín y euclídeo ordinario, $\mathcal{A}$ una transformación afín en E con automorfismo asociado t; X, Y dos puntos arbitrarios de E.*

○ $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y) + t(\overline{XY})$.

FALSO. En realidad $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Y) + t(\overline{YX})$.

○ $d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)) = d(X, Y)$.

FALSO. Por ejemplo, en una referencia rectangular, si $A(x, y) = (2x, 2y)$ entonces:

$$d(\mathcal{A}(0, 0), \mathcal{A}(1, 0)) = d((0, 0), (2, 0)) = 2 \neq 1 = d((0, 0), (1, 0))$$

○ *Si $\mathcal{A}$ es una homotecia de razón $k \in (-1, 1)$, entonces $d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)) < d(X, Y)$.*

VERDADERO. Si $\mathcal{A}$ es una homotecia se tiene $A(X) = P + k(\overline{PX})$. Por tanto:

$$\begin{aligned} &d(X, Y) = \|Y - X\| = \|\overline{XY}\| \\ &d(\mathcal{A}(X), \mathcal{A}(Y)) = d(P + k(\overline{PX}), P + k(\overline{PY})) = |k|\|\overline{XY}\| = |k|d(X, Y) < d(X, Y) \end{aligned}$$

○ *El vector con origen en X y extremo en Y es paralelo al de origen $\mathcal{A}(X)$ y extremo $\mathcal{A}(Y)$.*

FALSO. Por ejemplo si $\mathcal{A}$ es un giro, la imagen de un vector no es paralela al vector inicial.

(Segundo parcial, junio 1999)

(b) *En el espacio afín y euclídeo ordinario*

◯ *La composición de dos homotecias siempre es una homotecia.*

FALSO. Por ejemplo, dada una referencia rectangular tomamos las homotecias $\mathcal{A}_1(x,y,z) = (1,0,0) + 2(x-1,y,z)$ y $\mathcal{A}_2(x,y,z) = (1/2)(x,y,z)$. Entonces:

$$\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2(x,y,z) = (1,0,0) + 2(x/2-1,y/2,z/2) = (-1,0,0) + (x,y,z)$$

la composición es una traslación, pero no una homotecia.

◯ *La composición de dos simetrías nunca es una simetría.*

FALSO. Por ejemplo, dada una referencia rectangular, tomamos la simetría con respecto al plano $x = 0$, $\mathcal{A}_1(x,y,z) = (-x,y,z)$ y al plano $y = 0$, $\mathcal{A}_2(x,y,z) = (x,-y,z)$. La composición queda:

$$\mathcal{A}_2 \circ \mathcal{A}_1(x,y,z) = (-x,-y,z)$$

Vemos que es una simetría respecto al eje Z.

◯ *La composición de una simetría y de un giro nunca es una transformación ortogonal directa.*

FALSO. Por ejemplo podemos considerar un giro de 90^o respecto al eje OX y la simetría respecto al eje OZ. Ambas son transformaciones directas, por lo que su composición es también directa.

◯ *Cualquier giro es la composición de dos transformaciones ortogonales inversas.*

VERDADERO. Dado un giro $\mathcal{A}_1$ tomamos una simetría $\mathcal{A}_2$ que sea una transformación inversa, por ejemplo la simetría respecto a un plano. Se verifica:

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2) \circ \mathcal{A}_2^{-1}$$

donde $(\mathcal{A}_1 \circ \mathcal{A}_2)$ y $\mathcal{A}_2^{-1}$ son transformaciones ortogonales inversas.

(Segundo parcial, junio 2002)

(c) *En el espacio afín ampliado*

◯ *Dos rectas diferentes siempre se cortan en un punto.*

FALSO. Pueden cruzarse. Por ejemplo las si las coordenadas homogéneas son (x,y,z,t), las rectas de ecuaciones $y = 0$, $z = 0$ y $z = t$, $x = 0$ no se cortan en ningún punto (recordemos que el las coordenadas homogéneas $(0,0,0,0)$ no corresponden a ningún punto).

◯ *Una recta y un plano no pueden tener más de un punto en común.*

FALSO. La recta puede estar contenida en el plano. Por ejemplo el plano de ecuación $x = 0$ y la recta de ecuaciónes $x = 0$, $y = 0$.

◯ $(2,1,-1,0)$ *y* $(1,-2,3,3)$ *son las coordenadas homogéneas de un punto en dos sistemas de referencia diferentes.*

FALSO. Por que uno de ellos tiene la cuarta coordenada nula y corresponde a un punto impropio, mientras que el otro no.

◯ $(1,-1,0,1)$ *y* $(-2,3,1,2)$ *son las coordenadas homogéneas de un punto en dos sistemas de referencia diferentes.*

VERDADERO. Ambos son puntos propios. El segundo corresponde al punto $(-1,3/2,1/2,1)$. Basta encontrar una matriz de cambio de base

$$A = \begin{pmatrix} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que verifique

$$(1,-1,0,1)A\,(\,1 \quad -1 \quad 0 \quad 1\,) = (\,-1 \quad 3/2 \quad 1/2 \quad 1\,)$$

Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Segundo parcial, junio 2002)

I.– *En el plano afín E_2 y con respecto a una referencia rectangular se tiene el triángulo ABC de vértices $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (c,d)$. Probar que sus tres alturas se cortan en un punto.*

Calculemos la ecuación de las tres alturas. Utilizaremos siempre el mismo método. Si conocemos el vector normal (p,q) de una recta su ecuación es:

$$px + qy + r = 0.$$

Para hallar r utilizamos que la recta que buscamos pasa por un punto adicional.

En nuestro caso los vectores normales (perpendiculares) a las alturas son los lados del trángulo, y el punto adicional el vértice opuesto:

- Recta perpendicular a AB y pasando por C. Vector normal $\bar{AB} = (1,0)$, como pasa por $C = (c,d)$ queda:

$$x - c = 0.$$

- Recta perpendicular a AC y pasando por B. Vector normal $\bar{AC} = (c,d)$, como pasa por $B = (1,0)$ queda:

$$cx + dy - c = 0.$$

- Recta perpendicular a BC y pasando por A. Vector normal $\bar{BC} = (c-1,d)$, como pasa por $A = (0,0)$ queda:

$$(c-1)x + dy = 0$$

Ahora podemos concluir de dos formas:

I) Si a la segunda ecuación le restamos la primera, obtenemos la tercera. Por tanto esta está en el haz de rectas formada por las dos primeras y las tres rectas se cortan en el mismo punto.

II) Directamente calculamos la intersección de las dos primeras resolviendo el sistema. Queda:

$$x = c; \quad y = (c - c^2)/d.$$

Y comprobamos que también es un punto de la tercera:

$$(c-1)c + d(c - c^2)/d = c^2 - c + c - c^2 = 0.$$

(Segundo parcial, junio 2007)

II.– *En el espacio E_3 ampliado y con respecto a un sistema de referencia $\{O, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se consideran los puntos $A(2,0,2,2)$, $B(-6,-3,0,-3)$, $C(-1,1,2)$, $D(1,0,0)$, $E(0,1,1)$ y $F(1,1,1,0)$ y el vector $\bar{v} = (-1,2,0)$. Se pide:*

(a) *Ecuaciones paramétricas y cartesianas del plano Π, que pasa por A, B y C.*

Trabajamos con coordenadas homogéneas (x,y,z,t). Observamos que las coordenadas homogéneas del punto C son $(-1,1,2,1)$.

Los puntos del plano que pasa por A,B,C se expresa en coordenadas paramétricas mediante tres parámetros:

$$(x,y,z,t) = a(2,0,2,2) + b(-6,-3,0,-3) + c(-1,1,2,1)$$

luego las ecuaciones paramétricas son:

$$\begin{aligned} x =& 2a - 6b - c \\ y =& -3b + c \\ z =& 2a + 2c \\ t =& 2a - 3b + c \end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones cartesianas (o implícitas) basta hacer la eliminación de los parámetros a, b, c. Otra forma de caclularla es tener en cuenta que los puntos del plano π son combinaciones linales de las coordenadas homogéneas de A, B, C es decir aquellos linealmente dependiente con ellas. Por tanto podemos obtenerlas como:

$$\begin{vmatrix} x & y & z & t \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & -3 & 0 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -12x - 6y - 18z + 30t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y + 3z - 5t = 0$$

(b) *Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta r, que pasa por D y es paralela a $\bar{v}$.*

Dado que dos puntos definen inequivocamente una recta, basta tomar las coordenadas homogéneas de dos puntos de r. Por ejemplo podemos tomar D y $D + \bar{v}$. Las coordenadas homogéneas de tales puntos son respectivamente $(1, 0, 0, 1)$ y $(0, 2, 0, 1)$. La recta que une ambos tiene por ecuación:

$$(x, y, z, t) = a(1, 0, 0, 1) + b(0, 2, 0, 1)$$

Así las ecuaciones paramétricas de la recta r son:

$$\begin{aligned} x =& a \\ y =& 2b \\ z =& 0 \\ t =& a + b \end{aligned}$$

Para hallar las ecuaciones cartesianas (o implícitas) hacemos la eliminaciónde parámetros. Queda:

$$\begin{aligned} z =& 0 \\ 2x + y - 2t =& 0 \end{aligned}$$

También podemos hallar las ecuaciones cartesianas tomando los puntos de coordenadas homogéneas linealmente dependientes con dos puntos de la recta:

$$rango \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las dos ecuaciones vendrán dadas por la anulación dos menores 3×3:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \iff 2z = 0 \iff z = 0$$

$$\begin{vmatrix} x & y & t \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 2z = 0 \iff -2x - y + 2t = 0 \iff 2x + y - 2t = 0$$

(c) *Ecuaciones paramétricas y cartesianas de la recta s, que pasa por E y F.*

Como en el ejercicio anterior calculamos la recta que pasa por dos puntos de coordenadas homogéneas $(0,1,1,1)$ y $(1,1,1,0)$:

$$(x,y,z,t) = a(0,1,1,1) + b(1,1,1,0)$$

Las ecuaciones paramétricas de la recta s son:

$$\begin{aligned} x &= b \\ y &= a+b \\ z &= a+b \\ t &= a \end{aligned}$$

y las cartesianas (eliminando parámetros):

$$\begin{aligned} x-y+t &= 0 \\ x-z+t &= 0 \end{aligned}$$

(d) $\Pi \cap r$.

Para calcular la intersección de recta y plano, resolvemos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas (implícitas) de ambos:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z-5t &= 0 \\ z &= 0 \\ 2x+y-2t &= 0 \end{aligned}$$

Es un sistema homogéneo donde la matriz asociada tiene rango 3 y por tanto la solución es un subespacio vectorial de dimensión 1. OJO: Como estamos trabajando con coordenadas homogéneas, esto significa que la recta y el plano se cortan en exactamente un punto (recordemos que las coordenadas homogéneas siguen designando el mismo puntos si se multiplican por un escalar).

Para calcular el punto resolvemos el sistema. Queda

$$z = 0; \qquad t = 0; \qquad y = -2x$$

y el punto tiene por coordenadas homogéneas $(x,-2x,0,0)$, o simplemente, $(1,-2,0,0)$. Nos fijamos en que la última coordenada es 0. Se trata por tanto de un punto impropio (puntos "del infinito"). Es decir, en el espacio ampliado E_3 el plano π y la recta r se cortan en un punto (impropio). Esto significa que en el espacio afín la recta r y el plano π son paralelos. En particular la dirección común viene dada por el vector $(1,-2,0)$.

(e) $\Pi \cap s$.

Como antes resolvemos el sistema formado por las ecuaciones cartesianas de ambos:

$$\begin{aligned} 2x+y+3z-5t &= 0 \\ x-y+t &= 0 \\ x-z+t &= 0 \end{aligned}$$

De nuevo vemos que la solución es un subespacio vectorial de dimensión 1 y por tanto se cortan en un punto. Resolviendo el sistema vemos que sus coordenadas homogéneas son $(x,7x,7x,6x)$ o equivalentemente $(1,7,7,6)$. Ahora la última coordenada es no nula y por tanto se trata de un punto propio. Sus coordenadas cartesianas son $(\frac{1}{6},\frac{7}{6},\frac{7}{6})$.

III.– *En el espacio E_2 dotado de un sistema de referencia rectangular, se tienen las rectas $r : x = 1$ y $s : y = x$. Hallar una recta que pase por $M(2,1)$ y que corta a r y a s en dos puntos distintos (respectivamente A y B), tales que M equidiste de A y B.*

Dado que M equidista de A y B y los tres puntos son colineales, M es precisamente el punto medio entre A y B. El punto A es de la forma $(1,a)$ y el B, (b,b). Por tanto:

$$(2,1) = \frac{(1,a)+(b,b)}{2} = (b-2, b-1) \quad \Rightarrow \quad a=-1; \quad b=3$$

La recta que buscamos es la que une los puntos $M(2,1)$ y $A(1,-1)$. Resulta por tanto

$$\frac{x-2}{1-2} = \frac{y-1}{-1-1} \quad \Leftrightarrow \quad 2x-y-3=0$$

(Examen extraordinario, setiembre 2001)

IV.– *En el plano afín y con respecto a una referencia rectangular, calcular la ecuación de un giro que lleva la recta $3x-4y-3=0$ a la recta $4x-3y-4=0$.*

En primer lugar calculamos el centro del giro, que, obviamente corresponde a la intersección de las dos rectas:

$$\left\{\begin{array}{l} 3x-4y-3=0 \\ 4x-3y-4=0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad x=1; \quad y=0;$$

Entonces las ecuaciones del giro que llevan un punto (x,y) en un punto (x',y') son:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Tenemos que saber cual es el ángulo de giro. Dado que las rectas no están orientadas, hay dos ángulos de giro que llevan una recta en la otra: el ángulo menor (α) o el ángulo mayor (180-α) (véase ilustración final). En cualquier caso, podemos proceder de dos formas:

Método I: Calculamos el ángulo formado por las dos rectas. Para ello primero hallamos sus vectores directores, que pueden ser, respectivamente:

$$\text{CASO A:} \qquad \bar{v}_1 = (4,3) \qquad \bar{v}_2 = (3,4)$$

Dado que las rectas no están orientadas, podemos tomar también:

$$\text{CASO B:} \qquad \bar{v}_1 = (4,3) \qquad \bar{v}_2 = (-3,-4)$$

El ángulo que forman puede ser calculado a través del producto escalar:

$$\text{CASO A:} \quad cos(\alpha) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = \frac{24}{25}; \qquad \text{CASO B:} \quad cos(\alpha) = \frac{v_1 \cdot v_2}{\|v_1\|\|v_2\|} = -\frac{24}{25};$$

Resta saber si el ángulo ha de ser tomado positivamente o negativamente. Para ello comprobamos la orientación de los dos vectores:

$$\text{CASO A:} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 7 > 0; \qquad \text{CASO B:} \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = -7 < 0$$

Luego en el caso A tenemos orientación positiva y en el B negativa. Por tanto:

$$\text{CASO A:} \quad sin(\alpha) = +\sqrt{1-cos^2(\alpha)} = +\frac{7}{25};$$

$$\text{CASO B:} \quad sin(\alpha) = -\sqrt{1-cos^2(\alpha)} = -\frac{7}{25};$$

La expresión del giro queda:

$$\text{CASO A:} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{24}{25} & -\frac{7}{25} \\ \frac{7}{25} & \frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix};$$
$$\text{CASO B:} \quad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{24}{25} & \frac{7}{25} \\ -\frac{7}{25} & -\frac{24}{25} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$$

Método II: Directamente sabemos que la matriz del giro tiene que llevar el vector director UNITARIO de una recta en el vector director UNITARIO de la otra.

Como antes calculamos los vectores directores y los normalizamos. También hay dos posibilidades:

$$\text{CASO A:} \quad \bar{u}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}); \quad \bar{u}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (\frac{3}{5}, \frac{4}{5});$$
$$\text{CASO B:} \quad \bar{u}_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = (\frac{4}{5}, \frac{3}{5}); \quad \bar{u}_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = (-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5})$$

Entonces tiene que cumplirse que:

$$\text{CASO A:} \quad \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
$$\text{CASO B:} \quad \begin{pmatrix} cos(\alpha) & -sin(\alpha) \\ sin(\alpha) & cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

Operando queda el sistema:

$$\text{CASO A:} \quad \begin{cases} 4cos(\alpha) - 3sin(\alpha) = 3 \\ 4sin(\alpha) + 3cos(\alpha) = 4 \end{cases}$$
$$\text{CASO B:} \quad \begin{cases} 4cos(\alpha) - 3sin(\alpha) = -3 \\ 4sin(\alpha) + 3cos(\alpha) = -4 \end{cases}$$

Resolviéndolo obtenemos de nuevo:

$$\text{CASO A:} \quad cos(\alpha) = \frac{24}{25}; \qquad sin(\alpha) = \frac{7}{25}$$
$$\text{CASO B:} \quad cos(\alpha) = -\frac{24}{25}; \qquad sin(\alpha) = -\frac{7}{25}$$

Observación: Todavía hay una forma alternativa de construir un giro en las condiciones pedidas. Basta tener en cuenta que dadas dos tangentes a una misma circunferencia siempre existe un giro con el mismo centro que ella que lleva una tangente en la otra. Entonces los pasos para construirlo serían:

- Calcuar una de las bisectrices de las dos rectas.

- Escoger un punto de la bisectriz (nuestro centro de giro).

- El ángulo de giro es precisamente el que forman las dos rectas.

(Segundo parcial, mayo 2004)

V.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario y con respecto a un sistema de referencia rectangular, se consideran las rectas*

$$r : \begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y = 0, \end{cases} \qquad s : x = y = z.$$

Encontrar un plano paralelo a r y a s y equidistante de ambas.

Primero calcularemos la dirección del plano. Para ello obtenemos los vectores directores de r y s. El vector normal al plano que buscamos será su producto vectorial.

El vector director de s es $(1, 1, 1)$. El de r es:

$$(1, -1, 1) \wedge (1, 1, 0) = (-1, 1, 2)$$

Por tanto el vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \wedge (-1, 1, 2) = (1, -3, 2)$$

Ahora el plano es de la forma $x - 3y + 2z + \lambda = 0$. Para calcular λ utilizamos que la distancia del plano a ambas rectas debe de coincidir. Tomamos un punto arbitrario de cada una $(0, 0, 1) \in r$ y $(0, 0, 0) \in s$ y planteamos la ecuación:

$$\frac{|2 + \lambda|}{\|(1, -3, 2)\|} = \frac{|\lambda|}{\|(1, -3, 2)\|}$$

O bien, $2 + \lambda = \lambda$ y $\lambda > 0$ o $\lambda < -2$, pero esto no es posible; o bien $2 + \lambda = -\lambda$ y $\lambda \in (-2, 0)$. Obtenemos $\lambda = -1$. El plano buscado es

$$x - 3y + z - 1 = 0$$

(Examen final, junio 2001)

VI.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario se considera un sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O, \bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3\}$, en el que la matriz de Gram asociada a la base del sistema es G, las rectas r y s y el plano Π.*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad r : \begin{cases} x + y + z & = & -1 \\ \quad y + z & = & 2, \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x & = & \lambda \\ y & = & 2 \\ z & = & 1 + \lambda \end{cases} \qquad \Pi : x + 2y - z = 1$$

Se pide:

(a) *Distancia de r a s.*

Calculamos el vector que une a r y a s y es perpendicular a ambas. La distancia pedida es la norma de dicho vector. Primero escribimos las ecuaciones paramétricas de la recta r, resolviendo el sistema que forman sus dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} x &= -3 \\ y &= \alpha \\ z &= 2 - \alpha \end{aligned}$$

Ahora, un punto de r es de la forma $(-3, \alpha, 2 - \alpha)$ y un punto de s de la forma $(\lambda, 2, 1 + \lambda)$. El vector que los une es:

$$(\lambda + 3, 2 - \alpha, -1 + \lambda + \alpha)$$

Tiene que ser perpendicular a los vectores directores de r y s, $(0, 1, -1)$ y $(1, 0, 1)$. El producto escalar ha der ser cero. Es importante observar que ahora utilizamos la matriz del Gramm para el producto escalar:

$$\begin{aligned} (\,\lambda + 3 \quad 2 - \alpha \quad -1 + \lambda + \alpha\,)\, G\, (\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t = 0 \\ (\,\lambda + 3 \quad 2 - \alpha \quad -1 + \lambda + \alpha\,)\, G\, (\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t = 0 \end{aligned}$$

Obtenemos $\alpha = 8/3$ y $\lambda = -5/3$. Por tanto el vector que buscamos es $(4/3, -2/3, 0)$. La distancia pedida es:

$$\|(4/3, -2/3, 0)\| = \sqrt{(\,4/3 \quad 0 \quad -2/3\,)\, G\, (\,4/3 \quad 0 \quad -2/3\,)^t} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

(b) *Plano que contiene a r y es perpendicular a Π.*

Como el plano que buscamos contiene a r esta en el haz:

$$a(x+y+z+1)+b(y+z-2)=0$$

Su vector normal tiene por coordenadas covariantes:

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)_{COV}$$

Por otra parte por ser perpendicular a Π, este vector es perpendicular al normal a Π:

$$(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}$$

Por tanto

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)_{COV}\cdot(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}=0$$

y equivalentemente:

$$(\,a \quad a+b \quad a+b\,)\,G^{-1}\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)^t=0$$

Obtenemos $a=1$ y $b=-2$ y el plano que buscamos es:

$$x-y-z+5=0$$

(c) *ángulo formado por r y s.*

Calculamos el ángulo formado por los vectores directores pero utilizando la matriz de Gramm en el producto escalar.

$$cos(\alpha(r,s))=\frac{|\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\,G\,(\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t\,|}{\|(0,1,-1)\|\|(1,0,1)\|}$$

donde

$$\|(0,1,-1)\|^2=(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\,G\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t=2$$
$$\|(1,0,1)\|^2=(\,1 \quad 0 \quad 1\,)\,G\,(\,1 \quad 0 \quad 1\,)^t=2$$

Por tanto:

$$cos(\alpha(r,s))=\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,s)=60^o$$

(d) *ángulo formado por r y Π.*

Ahora calculamos el complementario del ángulo que forman el vector director de r y el normal de π. Recordemos que este último es $(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}$. Queda

$$sin(\alpha(r,\pi))=\frac{(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\cdot(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}}{\|(0,1,-1)\|\|\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}\,\|}$$

donde

$$(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\cdot(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}=(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)^t=3$$
$$\|(0,1,-1)\|^2=(\,0 \quad 1 \quad -1\,)\,G\,(\,0 \quad 1 \quad -1\,)^t=2$$
$$\|\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)_{COV}\,\|^2=(\,1 \quad 2 \quad -1\,)\,G^{-1}\,(\,1 \quad 2 \quad -1\,)=6$$

y entonces,

$$sin(\alpha(r,\pi))=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha(r,\pi)=60^o$$

(e) *Distancia de s a Π.*

Primero hay que ver si s es paralelo a π. En otro caso la distancia es 0. Pero el vector director de s es $(1,0,1)$ y pertenece a la dirección de π, que viene dada por la ecuación $x+2y-z=0$. Por tanto son paralelos.

Ahora, la distancia que nos piden es la de cualquier punto de s al plano π. Tomamos $A(0,2,1)\in s$ y la distancia pedida es:

$$d(s,\pi)=\frac{|1\cdot 0+2\cdot 2-1\cdot 1-1|}{\|(1,2,-1)_{COV}\|}$$

La norma de $(1,2,-1)_{COV}$ ya la hemos calculado en el apartado anterior, luego queda:

$$d(s,\pi)=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

VII.– *En el espacio afín y euclídeo ordinario dotado de un sistema de referencia rectangular, un plano* Π *corta a los semiejes positivos en puntos que distan 1 del origen. Determinar el lugar geométrico de las rectas que pasando por el punto* $P(1,2,2)$ *forman con el plano* Π *un ángulo de* $60°$*.*

(Segundo Parcial, junio 2003)

El plano que corta a los ejes en los puntos $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ y $(0,0,1)$ tiene por ecuación:

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{1}+\frac{z}{1}=1 \iff x+y+z-1=0$$

Dado un punto (x,y,z) cualquiera, la recta que lo une a P forma un ángulo de 60 grados con el plano precisamente si el ángulo que forma con el vector normal al mismo es de $90-60=30$ grados. El vector normal al plano es $(1,1,1)$. Por tanto planteamos la siguiente ecuación:

$$cos(30)=\frac{(1,1,1)(x-1,y-2,z-2)}{\|(1,1,1)\|\|(x-1,y-2,z-2)\|}$$

Elevando al cuadrado y operando queda la ecuación:

$$5x^2+5y^2+5z^2-8xy-8xz-8yz+22x+4y+4z-19=0$$

VIII.– *Se considera el espacio afín y euclídeo ordinario, dotado de un sistema de referencia rectangular y con la orientación asociada a éste. Determinar el punto que se obtiene al hacer girar* $90°$ *el origen de coordenadas alrededor del eje*

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & = & 1 \\ 3x-4z & = & 3 \end{array}\right.$$

tomado en el sentido de las x positivas.

Primero vemos cual es el vector director del eje de giro, con la cordenada x positiva:

$$\bar{u}_r=(4,0,3)$$

Ahora completamos $\bar{u}_r$ hasta una base ortogonal:

$$\{(4,0,3),(3,0,-4),(0,1,0)\}$$

Vemos que tiene orientación positiva, ya que

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \end{vmatrix}>0$$

y la normalizamos dividiendo por las normas:

$$B'=\{(4/5,0,3/5),(3/5,0,-4/5),(0,1,0)\}$$

Entonces en esta base la matriz de giro en esta base es:

$$T_{B'}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos90 & -sin90 \\ 0 & sin90 & cos90 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso respecto a la canónica es:

$$M_{CB'}=\begin{pmatrix} 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3/5 & -4/5 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hacer el giro de un punto (x, y, z) cualquiera en coordenadas en la base canónica hacemos lo siguiente. Tomamos un punto en el eje de giro, y por tanto que es invariante:

$$P = (1, 1, 0)$$

Ahora la imagen de (x, y, z) por el giro es:

$$(x', y', z')^t = (1, 1, 0)^t + T_C((x, y, z) - (1, 1, 0))^t$$

donde T_C es la matriz del giro respecto a la base canónica. Haciendo el cambio de base nos queda:

$$(x', y', z')^t = (1, 1, 0)^t + M_{CB'}T_{B'}M_{CB'}^{-1}((x, y, z) - (1, 1, 0))^t = (1, 1, 0)^t + M_{CB'}T_{B'}M_{CB}^t((x, y, z) - (1, 1, 0))^t$$

Hacemos el cálculo para $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ y obtenemos su imagen:

$$(x', y', z')^t = (1, 1, 0)^t + M_{CB'}T_{B'}M_{CB}^t(-(1, 1, 0))^t = (\frac{24}{25}, \frac{2}{5}, \frac{-32}{25})^t$$

(Examen final, junio 2003)

IX.– *En el plano afín euclídeo E_2 y con respecto a una referencia rectangular, sea C la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 4$. Calcular el lugar geométrico de los puntos medios de las cuerdas de C paralelas a la recta $x = y$.*

La ecuación de C es:

$$x^2 + 2y^2 = 4.$$

La ecuación de una recta paralela a $x = y$ es:

$$x = y + c.$$

Intersecamos ambas:

$$(y + c)^2 + 2y^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad 3y^2 + 2cy + c^2 - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -\frac{c}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}.$$

Obtenemos dos soluciones:

$$y_1 = -\frac{c}{3} + \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_1 = y_1 + c.$$

$$y_2 = -\frac{c}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{12 - 2c^2}, \quad x_2 = y_2 + c.$$

Es decir, las cuerdas cortan en los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2). El punto medio es:

$$(x, y) = \frac{(x_1, y_1) + (x_2, y_2)}{2} = (2c/3, -c/3).$$

Vemos que el lugar geométrico es la recta de ecuación paramétrica:

$$(x, y) = (2c/3, -c/3)$$

o de ecuación implícita $x = -2y$.

Observación. En realidad, de manera más rigurosa, el lugar geométrico pedido no es toda la recta, si no tan solo el segmento que se obtiene cuando el parámetro c varía en el intervalo $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$. En otro caso los valores de y_1 e y_2 no son reales. Geométricamente esto significa que las cuerdas no cortan a la elipse.

(Examen extraordinario, septiembre 2006)

X.– *En el espacio E_2 se consideran los puntos P y Q. Sean S_P y S_Q las simetrías en E_2 con centros P y Q, respectivamente. Demostrar que $S_Q \circ S_P$ es una traslación y encontrar el vector asociado.*

(Examen final, junio 2001)

Las simetrías S_P y S_Q llevan un punto X cualquiera en los puntos:

$$\begin{aligned} S_P(X) &= P + \overline{XP} \\ S_Q(X) &= Q + \overline{XQ} \end{aligned}$$

Si consideramos coordenadas contravariantes en un sistema de referencia, tenemos:

$$\begin{aligned} S_P(x^i) &= (p^i) + (p^i - x^i) = (2p^i - x^i) \\ S_Q(q^i) &= (q^i) + (q^i - x^i) = (2q^i - x^i) \end{aligned}$$

La composición queda:

$$S_Q(S_P(x^i)) = (2q^i - S_P(x^i)) = (2q^i - 2p^i + x^i) = (x^i) + 2(q^i - p^i)$$

y por tanto:

$$S_Q(S_P(X)) = X + 2\overline{PQ}$$

es la traslación por el vector $2\overline{PQ}$.

XII.– *Se considera el espacio E_2, en el que se ha fijado un sistema de referencia rectangular $\mathcal{R}$. Dada la transformación $\mathcal{A}(x, y) = (x', y')$ (coordenadas en $\mathcal{R}$) por las ecuaciones*

$$\begin{aligned} x' &= 3 + \frac{1}{2}(1+\lambda)x + \frac{1}{2}(1-\lambda)y \\ y' &= \mu + \frac{1}{2}(1-\lambda)x + \frac{1}{2}(1+\lambda)y, \end{aligned}$$

se pide:

(a) *Determinar λ para que $\mathcal{A}$ sea una transformación afín.*

Para que sea una transfomración afín la parte lineal de la transformación debe de ser un automorfismo. Por tanto la matriz asociada a dicha aplicación lineal debe de ser no singular:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\lambda) & \frac{1}{2}(1-\lambda) \\ \frac{1}{2}(1-\lambda) & \frac{1}{2}(1+\lambda) \end{pmatrix}$$

Para que sea no singular, su determinante debe de ser no nulo. Veamos cuando se anula:

$$0 = det(A) = \frac{1}{4}((1+\lambda)^2 - (1-\lambda)^2) = \lambda$$

Por tanto $\mathcal{A}$ es una afinidad si $\lambda \neq 0$.

(b) *Determinar λ para que $\mathcal{A}$ sea una traslación. Para ese valor de λ, dar el vector asociado a la traslación.*

Para que λ sea una traslación, la parte lineal de la transformación debe de ser la identidad. Es decir

$$A = Id \quad \iff \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\lambda) & \frac{1}{2}(1-\lambda) \\ \frac{1}{2}(1-\lambda) & \frac{1}{2}(1+\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \lambda = 1$$

En ese caso el vector asociado a la traslación vemos que es el $(3, \mu)$.

(c) *Determinar λ y μ para que $\mathcal{A}$ sea la simetría ortogonal respecto a una recta. Para esos valores de λ y μ, dar la ecuación de la recta.*

Para que sea una simetría la parte lineal de la transformación ha de conservar distancias, es decir, ha de ser una matriz ortogonal. En particular su determinante es 1 o -1:

- Si $det(A) = 1$ entonces $\lambda = 1$ y vimos que se trata de una traslación.

- Si $det(A) = -1$ entonces $\lambda = -1$ y la transformación queda:

$$\begin{aligned} x' &= 3 + y \\ y' &= \mu + x \end{aligned}$$

Si es una simetría tiene puntos invariantes. Estos verifican $(x, y) = (x', y') = (3 + y, \mu + x)$, es decir:

$$y = \mu + x = \mu + 3 + y \quad \Rightarrow \quad \mu = -3$$

Por tanto $\mu = -3$ y $\lambda = -1$ y la recta respecto a la cual se hace la simetría (recta de puntos invariantes) viene dada por la ecuación $x = 3 + y$.

(Segundo parcial, mayo 2001)

XIII.– *Calcular la ecuación de una homotecia del plano que lleve la circunferencia:*

$$x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0.$$

en otra de ecuación:

$$x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0.$$

Escribimos las ecuaciones de las circunferencias distinguiendo su centro y su radio:

$$\begin{array}{lllll} x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0 & \Longleftrightarrow & x^2 + y^2 - 4y + 4 - 4 + 3 = 0 & \Longleftrightarrow & x^2 + (y-2)^2 = 1^2. \\ x^2 + y^2 - 8y + 7 = 0 & \Longleftrightarrow & x^2 + y^2 - 8y + 16 - 16 + 7 = 0 & \Longleftrightarrow & x^2 + (y-4)^2 = 3^2. \end{array}$$

La primera tiene centro $(0, 2)$ y radio 1; la segunda centro $(0, 4)$ y radio 3. Vemos que tienen el punto $(0, 1)$ común y por tanto este ha de ser el centro de la homotecia. Además el radio de la circunferencia inicial se multiplica por tres, luego la razón de la misma es tres. Las ecuaciones de la homotecia serán:

$$(x', y') = (0, 1) + 3((x, y) - (0, 1)) = (3x, 3y - 2).$$

XIV.– *En el plano afín E_2 y con respecto a un sistema de referencia rectangular consideramos las rectas r, s de ecuaciones:*

$$r : x = 0; \qquad s : x + y = 0.$$

Calcular todas las rectas t que pasan por el punto $(0, -1)$ y tales que el triángulo formado por los puntos de corte de r, s y t es isósceles.

Calculemos la ecuación de una recta t pasando por $(0, -1)$.

Como t tiene que ser distinta de r la ecuación puede escribirse como:

$$t : \lambda x + y + c = 0$$

Dado que $(0, -1)$ está en la recta, su ecuación queda:

$$t : \lambda x + y + 1 = 0$$

donde, como tampoco puede ser paralela a s, $\lambda \neq 1$.

Ahora intersecamos esta recta con s:

$$\left.\begin{array}{r}\lambda x+y+1=0\\ x+y=0\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad s\cap t=(\frac{1}{1-\lambda},-\frac{1}{1-\lambda})$$

Por tanto tenemos que estudiar cuando es isósceles (dos lados iguales) el triángulo de vértices:

$$A=(0,0);\qquad B=(0,-1);\qquad C=(\frac{1}{1-\lambda},-\frac{1}{1-\lambda}).$$

Calculamos las longitudes de cada lado:

$$a=\overline{BC}=\sqrt{1+\lambda^2}\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|$$
$$b=\overline{AC}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{1-\lambda}\right|$$
$$c=\overline{AB}=1$$

donde recordemos que $\lambda\neq 1$.

Hay tres posibilidades:

(i) $a=b$, y por tanto:

$$a=b\quad\Rightarrow\quad 2=1+\lambda^2\quad\Rightarrow\quad\lambda=\pm 1\quad\Rightarrow\quad\lambda=-1\qquad\text{(ya que }\lambda\neq 1).$$

(ii) $a=c$, y por tanto:

$$a=c\quad\Rightarrow\quad(1+\lambda^2)=(1-\lambda)^2\quad\Rightarrow\quad 2\lambda=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=0.$$

(iii) $b=c$, y por tanto:

$$b=c\quad\Rightarrow\quad 1-\lambda=\pm\sqrt{2}\quad\Rightarrow\quad\lambda=1-\sqrt{2}\quad\text{ó}\quad\lambda=1+\sqrt{2}.$$

En definitiva las posibilidades para la recta pedida son:

$$-x+y+1=0;\ \text{ó}\ y+1=0;\ \text{ó}\ (1-\sqrt{2})x+y+1=0;\ \text{ó}\ (1+\sqrt{2})x+y+1=0.$$

(Segundo Parcial, mayo 2005)

XV.– *Se considera, en el plano afín E_2, la referencia $\{O;\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ respecto a la cual el producto escalar viene dado por la matriz de Gram* $G=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$.

Calcular las ecuaciones de la simetría respecto a la recta $r\equiv x+y-1=0$.

Tomamos el vector director de la recta. Para ello la escribimos en paramétricas:

$$x=\lambda$$
$$y=1-\lambda$$

Queda $\bar{u}=(1,-1)$. Completamos hasta una base ortogonal:

$$(1,-1)G(x,y)^t=0\qquad\iff\qquad -y=0.$$

Escogemos $\bar{v}=(1,0)$ y tenemos la base $B'=\{(1,-1),(1,0)\}$.

Con respecto a esta base, la parte vectorial de la transformación afín queda:

$$T_{B'}=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}.$$

La pasamos a la base de partida:

$$T_C=M_{CB'}T_{B'}M_{B'C}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&0\end{pmatrix}^{-1}.$$

Ahora escogemos un punto fijo de la simetría. Basta escoger un punto cualquiera de la recta r. Por ejemplo el punto $P=(1,0)$. Entonces la transformación queda:

$$t(x,y)=(1,0)^t+\begin{pmatrix}-1&-2\\0&1\end{pmatrix}(x-1,y)^t.$$

XVI.– *Calcular las ecuaciones de una transformación afín que lleve el cuadrado de vértices* $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ *en el cuadrado de vértices* $(1,1),(3,1),(3,3),(1,3)$.

Solución: Es fácil ver que el lado del primer cuadrado es el la mitad del lado del segundo. Habrá por tanto que duplicar por dos sus dimensiones mediante una homotecia. Teniendo en cuenta esto todavía hay diversas opciones. Dos de ellas son:

(a) Traslación, homotecia y traslación:

$$t(x,y) = (1,1) - 2(x-1, y-1) = (3,3) - 2(x,y),$$

que como se ve resulta en la composición de una homotecia con una traslación de mayor recorrido.

(b) Homotecia y traslación:

$$t(x,y) = (1,1) + 2(x,y).$$

Nótese que en el primer caso el $(1,1)$ es un punto fijo de la transformación, mientras que en el segundo caso, el punto fijo es el $(-1,-1)$, que está *fuera* de la figura.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)