11.– *Consideramos los productos escalares en $\mathbb{R}^2$ cuyas matrices de Gram respecto de la base canónica son G_1 y G_2. Sabiendo que $G_1 = \lambda G_2$ con $\lambda \in R$, $\lambda > 1$, probar que los dos productos escalares definen la misma medida sobre ángulos de vectores, pero distinta en longitudes.*

Sean u, v dos vectores no nulos. La medida del ángulo que forma se hace mediante la fórmula:

$$cos(u,v) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|}.$$

Apliquémosla para cada uno de los productos escalares. Para G_1:

$$cos(u,v) = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}.$$

Para G_2:

$$cos(u,v) = \frac{(u)G_2(v)^t}{\|(u)G_2(u)^t\|\|(v)G_2(v)^t\|} = \frac{(u)(\lambda G_1)(v)^t}{\|(u)(\lambda G_1)(u)^t\|\|(v)(\lambda G_1)(v)^t\|} =$$
$$= \frac{\lambda(u)G_1(v)^t}{\lambda\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|} = \frac{(u)G_1(v)^t}{\|(u)G_1(u)^t\|\|(v)G_1(v)^t\|}$$

Luego vemos que ambos coninciden.

En cuanto a las longitudes:

$$\|u\|_1 = \sqrt{(u)G_1(u)^t},$$

pero

$$\|u\|_2 = \sqrt{(u)G_2(u)^t} = \sqrt{(u)(\lambda G_1)(u)^t} = \lambda\sqrt{(u)G_1(u)^t} = \lambda\|u\|_1.$$

Como $\lambda > 1$ vemos que la longitud con el segundo producto escalar es superior a la primera.

(Examen final, septiembre 2008)

12.– *Encontrar la (única) respuesta correcta, de entre las indicadas, a las siguientes cuestiones:*

(a) En $\mathbb{R}^3$ *se tiene una forma bilineal f cuya matriz en la base canónica es:* $F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & b \end{pmatrix}$

Para que f defina un producto escalar, la matriz ha de ser simétrica y definida positiva. Sin embargo vemos que el determinante formado por las dos primeras filas y columnas es:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 < 0$$

y por tanto nunca puede ser definida postiva. En particular $(1,-1,0)F\{1,-1,0) = -1 < 0$.

◯ *f es un producto escalar si y solo si $b < -a$.*

FALSO.

◯ *f es un producto escalar si y solo si $a = 1$ y $b < -1$.*

FALSO.

◯ *f siempre es un producto escalar.*

FALSO.

◯ *f nunca es un producto escalar.*

VERDADERO.

(Segundo parcial, junio 2002)

(b) *El método de Gram-Schimdt podría utilizarse para hallar una base de vectores conjugados respecto de una forma bilineal f*

Dada una base $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$, en el método de Gram-Schidt vamos obteniendo una base de vectores conjugados $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n$ de la siguiente forma:

$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1$$
$$\bar{v}_2 = \lambda^1 \bar{v}_1 + \bar{e}_2 \text{ con } f(v_2, v_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^1 = -\frac{f(\bar{v}_1, \bar{e}_2)}{f(\bar{v}_1, \bar{v}_1)}$$

ya el en segundo paso necesitamos que no se anule $f(\bar{v}_1, \bar{v}_1)$. Esto ocurre cuando f es definida negativa o definida positiva.

◯ *Si f es definida negativa.*

VERDADERO.

◯ *Si f es semidefinida positiva.*

FALSO.

◯ *Si f es indefinida.*

FALSO.

◯ *Sólo si f es definida positiva.*

FALSO.

(Segundo parcial, junio 2002)

(c) *Se considera un producto escalar f definido sobre $\mathbb{R}^n$. Sea $\{\bar{u}_i\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$, y $\{\bar{v}_i\}$ una base ortonormal respecto a f, siendo $\{\bar{v}_i\} = C\{\bar{u}_i\}$.*

◯ *C es una matriz ortogonal.*

FALSO. Por ejemplo f dada por la matriz de Gram en la base canónica

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y $v_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$, $v_2 = (1/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2})$. Se tiene que la base $\{\bar{v}_i\}$ es ortonormal y $\{\bar{v}_i\} = C\{\bar{u}_i\}$ con C matriz no ortogonal:

$$C = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & -2/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

◯ *La matriz de Gram de f en la base canónica es CC^t.*

FALSO. De hecho si G es dicha matriz, por ser $\{\bar{v}_i\}$ ortonormal, sabemos que se verifica:

$$CGC^t = Id$$

y por tanto $G = C^{-1}C^{-t}$.

En particular en el ejemplo anterior:

$$C^{-1}C^{-t} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y sin embargo:

$$CC^t = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 5/2 \end{pmatrix}$$

○ *C es una matriz simétrica.*

FALSO. Basta considerar el ejemplo anterior.

○ *La matriz de Gram de f en la base canónica es $C^{-1}(C^{-1})^t$.*

VERDADERO. Lo hemos razonado arriba.

(Segundo parcial, junio 2002)

I.– *En un espacio vectorial real V de dimensión 3 se considera una cierta base $B = \{\bar{e}_i\}$. Hallar, en esa base, la matriz métrica G de un producto escalar definido en V del que se sabe que:*

(a) El módulo de $\bar{e}_1$ es $\sqrt{2}$ y el de $\bar{e}_2$ es $\sqrt{3}$.

(b) El subespacio vectorial U, definido por la ecuación $x^1 + x^2 + x^3 = 0$ en la base B, es ortogonal a la envolvente de $\bar{e}_1$.

(c) La proyección ortogonal de $\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3$ sobre la envolvente de $\bar{e}_2$ es $3\bar{e}_2$.

(d) El vector $\bar{e}_3$ es ortogonal a alguno del conjunto $C = \{(2,2,0), (2,0,-1), (0,2,-1)\}$, cuyos elementos vienen dados por sus coordenadas contravariantes en la base B.

De la condición (a) obtenemos:

$$\|\bar{e}_1\| = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$\|\bar{e}_2\| = \sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = 3$$

La condición (b) significa que:

$$\bar{x} \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \forall \bar{x} \in U$$

y teniendo en cuenta que una base de U está formada por los vectores $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ y $\bar{e}_1 - \bar{e}_3$, obtenemos:

$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_2) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$
$$(\bar{e}_1 - \bar{e}_3) \cdot \bar{e}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \bar{e}_3 \cdot \bar{e}_1 = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = 2$$

De estas dos condiciones deducimos que la matriz es de la forma:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$$

La condición (c) significa que:

$$((\bar{e}_1 + \bar{e}_2 + \bar{e}_3) - 3\bar{e}_2) \cdot \bar{e}_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\,1 \quad -2 \quad 1\,)\,G\,\{\,0 \quad 1 \quad 0\,\} = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Finalmente utilizando la hipótesis (d) sabemos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:

$$\bar{e}_3 \cdot (2,2,0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 12 = 0 \text{ luego no puede ser.}$$
$$\bar{e}_3 \cdot (2,0,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$
$$\bar{e}_3 \cdot (0,2,-1) = 0 \quad \Rightarrow \quad b = 8$$

Por tanto en principio, hay dos posibilidades para la matriz G:

$$G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix} \text{ ó } G_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, sabemos que la forma bilineal asociada ha de ser definida positiva (todos los autovalores de la matriz positivos). En particular el determinante ha de ser mayor que cero. Pero $|G_1| = -4$ y $|G_2| = 8$. Luego la matriz que buscamos es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1998)

II.– *En un espacio vectorial V de dimensión n, se considera una forma bilineal f cuya matriz en una determinada base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ es A^2, siendo A una matriz real $n \times n$, no singular y simétrica. Demostrar que f es un producto escalar. Encontrar, en función de $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$, una base ortonormal para f.*

En primer lugar, como A es una matriz simétrica y no singular, entonces A^2 es simétrica y no singular, y por tanto define una forma bilineal simétrica. Si $\bar{v} = v^i \bar{e}_i$ y $\bar{w} = w^i \bar{e}_i$, entonces:

$$f(\bar{v}, \bar{w}) = (v^i)A^2\{w^i\}$$

Para ver que es un producto escalar hay que comprobar que es definida positiva. Sea $\bar{v} = v^i \bar{e}_i \in V$, $\bar{v} \neq \bar{0}$:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (v^i)A^2\{v^i\} = (v^i)AA\{v^i\} = (v^i)A((v^i)A)^t$$

Como A es no singular y $\bar{v}$ es no nulo, $(v^i)A = (u^i)$ es un vector no nulo y por tanto:

$$f(\bar{v}, \bar{v}) = (u^i)(u^i)^t = \sum_{i=1}^{n} (u^i)^2 > 0$$

y vemos que f es definida positiva.

Para encontrar una base ortonormal, buscamos una matriz B de cambio de base de manera que, la matriz de Gram en dicha base sea la identidad. Es decir, si

$$(\bar{u}_i) = (\bar{e}_j)B$$

la matriz de Gram de f en la base $\{\bar{u}_i\}$ es:

$$B^t A^2 B$$

Para que sea la identidad basta tomar $B = A^{-1}$, ya que entonces, como A es simétrica:

$$B^t A^2 B = A^{-t} A^2 A^{-1} = A^{-1} A^2 A^{-1} = Id$$

Deducimos que una base otonormal es aquella cuyos vectores tienen por coordenadas en la base $\{\bar{e}_i\}$ las columnas de la matriz A^{-1}.

III.– *Sea un espacio vectorial euclídeo V de dimensión finita, y dos subespacios cualesquiera suyos U_1 y U_2. Comprobar que:*

(a) $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$

Primero veamos que $(U_1 + U_2)^\perp \subset U_1^\perp \cap U_2^\perp$:

$$\bar{v} \in (U_1 + U_2)^\perp \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u} = 0 \quad \forall \bar{u} \in U_1 + U_2$$

Pero en particular cualquier $\bar{u}_1 \in U_1$ ó $\bar{u}_2 \in U_2$ está en $U_1 + U_2$, luego:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^\perp \\ \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \quad \Rightarrow \quad v \in U_2^\perp \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$$

Ahora veamos que $U_1^\perp \cap U_2^\perp \subset (U_1 + U_2)^\perp$:

$$v \in U_1^\perp \cap U_2^\perp \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \bar{v} \in U_1^\perp \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u}_1 = 0 \quad \forall \bar{u}_1 \in U_1 \\ \bar{v} \in U_2^\perp \quad \Rightarrow \quad \bar{v} \cdot \bar{u}_2 = 0 \quad \forall \bar{u}_2 \in U_2 \end{array}\right.$$

Dado cualquier $\bar{u} \in U_1 + U_2$ es de la forma $\bar{u} = \bar{u}_1 + \bar{u}_2$ con $\bar{u}_1 \in U_1$ y $\bar{u}_2 \in U_2$. Luego:

$$\bar{v} \cdot \bar{u} = \bar{v} \cdot (\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = \bar{v}.\bar{u}_1 + \bar{v}.\bar{u}_2 = 0$$

y por tanto $\bar{v} \in (U_1 + U_2)^\perp$.

(b) $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$

Utilizando el apartado anterior y que $(U^\perp)^\perp = U$ obtenemos:

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = ((U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp)^\perp = ((U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$$

IV.– *En* $\mathbb{R}^3$ *y con respecto a una determinada base* $\{\bar{e}_i\}$ *se definen el producto escalar*

$$\bar{x}\cdot\bar{y} = 2x^1y^1 + 2x^2y^2 + 3x^3y^3 + x^1y^2 + x^2y^1 + 2x^1y^3 + 2x^3y^1$$

y el endomorfismo f *que verifica:* $f(\bar{e}_1) = 2\bar{e}_1$, $f(\bar{e}_2) = 3\bar{e}_1 - 2\bar{e}_3$, $f(\bar{e}_3) = 2\bar{e}_3$. *¿Es* f *un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar dado arriba? En caso afirmativo, dar una base ortonormal en la que la matriz de* f *sea diagonal.*

La matriz de Gram del producto escalar que nos dan respecto a la base $\{\bar{e}_i\}$ es:

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

y la matriz del endomorifsmo:

$$F = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

f será simétrico si GF es una matriz simétrica. Y efectivamente:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

es simétrica.

Para hallar una base ortonormal, basta tomar una base ortonormal de cada subespacio característico de f. Primero calculamos los autovalores:

$$|F - \lambda I| = -\lambda(2-\lambda)^2$$

Son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = 0$ con multiplicidades 1 y 2 respectivamente.

Ahora calculamos los espacios característicos:

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2x + 3y \\ 0 = -2y + 2z \end{cases}$$

luego, $S_0 = \mathcal{L}\{(3,-2,-2)\}$

Y para el otro autovalor:

$$(F - 2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0$$

luego, $S_2 = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

Ahora los ortonormalizamos utilizando la matriz G. En S_0 basta dividr el vector base por su norma.

$$\|(3,-2,-2)\| = \sqrt{(3,-2,2)G\{3,-2,2\}} = \sqrt{2}$$

En S_2 calculamos $\bar{u} = a(1,0,0) + (0,0,1)$ ortogonal a $(1,0,0)$:

$$a = -\frac{(1,0,0)G\{(0,0,1)\}}{(1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = -1$$

luego $\bar{u} = (-1,0,1)$ y dividimos por las normas:

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{((1,0,0)G\{(1,0,0)\}} = \sqrt{2}$$
$$\|(-1,0,1)\| = \sqrt{(-1,0,1)G\{(-1,0,1)\}} = 1$$

La base que buscamos es:

$$\{(3/\sqrt{2}, -2/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}), (1/\sqrt{2}, 0, 0), (-1,0,1)\}$$

V.– *En un espacio euclídeo V se tienen dos subespacios suplementarios V_1 y V_2. Demostrar que la condición necesaria y suficiente para que la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2 sea simétrica es que V_1 y V_2 sean ortogonales.*

Sea $f : V \longrightarrow V_1$ la proyección sobre V_1 paralelamente a V_2. Sabemos que:

$$f(v) = v_1, \qquad \text{siendo } v = v_1 + v_2 \text{ con } v_1 \in V_1 \text{ y } v_2 \in V_2.$$

Por otra parte que f sea simétrica significa que:

$$u \cdot f(v) = f(u) \cdot v; \qquad \forall u, v \in V$$

- Supongamos que V_1 y V_2 son ortogonales. Entonces sean $u, v \in V$ cualesquiera. Se descomponen como $u = u_1 + u_2$ y $v = v_1 + v_2$ con $u_1, v_1 \in V_1$ y $u_2, v_2 \in V_2$. Entonces:

$$u \cdot f(v) = (u_1 + u_2) \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_1 = u_1 \cdot v_1$$

ya que $v_1 \cdot u_2 = 0$ por ser V_1 y V_2 ortogonales.

De igual forma:

$$f(u) \cdot v = u_1 \cdot (v_1 + v_2) = u_1 \cdot v_1 + u_1 \cdot v_2 = u_1 \cdot v_1 = u \cdot f(v)$$

y por tanto f es simétrico.

- Recíprocamente supongamos que f es simétrico y veamos que entonces V_1 y V_2 son ortogonales. Sean $v_1 \in V_1$ y $v_2 \in V_2$ cualesquiera. Por ser f simétrico:

$$v_1 \cdot f(v_2) = f(v_1) \cdot v_2$$

Pero esto es equivalente a:

$$v_1 \cdot 0 = v_1 \cdot v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 \cdot v_2 = 0$$

y tenemos la ortogonalidad de v_1 y v_2.

(Examen extraordinario, septiembre 2004)

VI.– *Dada la matriz $n \times n$ A definida por*

$$a_{ij} = 1 \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\},$$

¿es diagonalizable por semejanza ortogonal? En caso de que lo sea, dar una matriz de paso.

A es una matriz simétrica y por tanto se puede interpretar como la matriz asociada a un endomorfismo simétrico con respecto al producto escalar usual en $\mathbb{R}^n$. Sabemos que entonces existe una base ortonormal en la que la matriz de f es diagonal. Deducimos que A es diagonalizable por semejanza ortogonal (existe C ortogonal, $C^{-1} = C^t$ tal que C^tAC es diagonal).

Para calcular la matriz de paso, basta calcular una base ortonormal de autovectores de cada subespacio característico. Primero calculamos los autovalores:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & n-\lambda & n-\lambda & \dots & n-\lambda & n-\lambda \\ 1 & 1-\lambda & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} n-\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)^{n-1}(n-\lambda)$$

Por tanto tenemos el autovalor $\lambda_1 = n$ con mulptiplicidad 1 y el autovalor $\lambda_2 = 0$ con multiplicidad $n-1$. El espacio característico asociado al autovalor 0 tiene dimensión $n-1$ y esta dado por la ecuación:

$$A \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} = 0 \iff x^1 + x^2 + \ldots + x^n = 0$$

Una base ortogonal del mismo es:

$$\{(1,-1,0,\ldots,0,0),(1,1,-2,\ldots,0,0),\ldots,(1,1,1,\ldots,2-n,0),(1,1,1,\ldots,1,1-n)\}$$

El subespacio característico asociado al autovalor n es precisamente el ortogonal al anterior, es decir, el generado por el vector $\{(1,1,1,\ldots,1,1)\}$.

Divididiendo estos vectores por sus normas obtenemos las filas de la matriz de paso ortogonal que buscamos:

$$\begin{aligned} \|(1,1,1,\ldots,1,1)\| &= \sqrt{n} \\ \|(1,-1,0,\ldots,0,0)\| &= \sqrt{1+1} = \sqrt{2} \\ \|(1,1,-2,\ldots,0,0)\| &= \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6} \\ &\vdots \\ \|(1,1,1,\ldots,2-n,0)\| &= \sqrt{n-2+(2-n)^2} = \sqrt{n^2-3n+2} \\ \|(1,1,1,\ldots,1,1-n)\| &= \sqrt{n-1+(1-n)^2} = \sqrt{n^2-n} \end{aligned}$$

y por tanto la matriz C es

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & \frac{2-n}{\sqrt{n^2-3n+2}} & \frac{1}{\sqrt{n^2-n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-n}{\sqrt{n^2-n}} \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 1999)

VII.– *En un espacio euclídeo V se consideran los vectores fijos y no nulos $\bar{a}$ y $\bar{b}$ y la aplicación $f(\bar{x}) = (\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} - 3\bar{x}$. Se pide:*

(a) *Ver si f es lineal.*

Veamos que es lineal. Sean $\bar{x},\bar{y}\in V$ y $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$. Hay que comprobar que $f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) = \lambda f(\bar{x})+\mu f(\bar{y})$:

$$\begin{aligned} f(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) &= (\bar{a}\cdot(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}))\bar{b} - 3(\lambda\bar{x}+\mu\bar{y}) = \lambda(\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b} + \mu(\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b} - 3\lambda\bar{x} - 3\mu\bar{y} = \\ &= \lambda((\bar{a}\cdot\bar{x})\bar{b}-3\bar{x}) + \mu((\bar{a}\cdot\bar{y})\bar{b}-3\bar{y}) = \lambda f(\bar{x})+\mu f(\bar{y}) \end{aligned}$$

(b) *Determinar los autovalores y autovectores.*

Sea λ un autovalor y $\bar{v}$ un autovector asociado no nulo. Se tiene:

$$\lambda\bar{v} = f(\bar{v}) = (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} - 3\bar{v} \quad\Rightarrow\quad (\bar{a}\cdot\bar{v})\bar{b} = (\lambda+3)\bar{v}$$

Por tanto hay dos posibilidades:

- $\lambda=-3$ y $\bar{a}\cdot\bar{v}=0$, es decir, $\bar{v}\in\{\bar{a}\}^{\perp}$, o bien,

- $\bar{v}=\bar{b}$ y $\lambda+3=\bar{a}\cdot\bar{b}$.

Es decir si $dim(V)=n$, el autovalor $\lambda_1=-3$ tiene multiplicidad geométrica $dim(\{\bar{a}\}^{\perp}) = n-1$, ya que el subespacio caracerístico es precisamente $S_{-3}=\{\bar{a}\}^{\perp}$.

Además si $\bar{a}\cdot\bar{b}\neq 0$ aparece otro autovalor $\lambda_2=\bar{a}\cdot\bar{b}-3$ distinto, cuyo subespacio caracerístico es precisamente $S_{\lambda_2}=\mathcal{L}\{\bar{b}\}$.

(c) *¿Qué condición han de cumplir $\bar{a}$ y $\bar{b}$ para que f sea diagonalizable?*

Para que sea diagonalizable, la suma de las multiplicidades geométricas han de ser la dimensión de V. Por lo razonado en el apartado anterior, esto ocurre precisamente si $\bar{a}\cdot\bar{b}\neq 0$ ese decir si $\bar{a}$ y $\bar{b}$ no son ortogonales.

(d) *Si en la base $\{\bar{e}_1,\ \bar{e}_2,\ \bar{e}_3\}$ la matriz de Gram es*

$$G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y las coordenadas covariantes de $\bar{a}$ y $\bar{b}$ son $(1,2,-1)$ *y* $(2,0,-3)$, *respectivamente, determinar en dicha base la matriz de f, los autovalores y los autovectores.*

Los autovalores son $\lambda_1=-3$ y $\lambda_2=\bar{a}\cdot\bar{b}-3$. Para calcular este producto, basta calcular las coordenadas contravariantes de $\bar{b}$:

$$G^{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ahora,

$$\lambda_2 = \bar{a}\cdot\bar{b}-3 = (\,1 \quad 2 \quad -1\,)\,\{\,3 \quad 1 \quad -1\,\} - 3 = 3$$

Los autovectores asociados son:

$$\begin{aligned} S_{-3} &= \{\bar{a}\}^{\perp} = \{x^1\bar{e}_1+x^2\bar{e}_2+x^3\bar{e}_3 / x^1+2x^2-x^3=0\} = \mathcal{L}\{\bar{e}_1+\bar{e}_3, \bar{e}_2+2\bar{e}_3\} \\ S_3 &= \mathcal{L}\{\bar{b}\} = \mathcal{L}\{3\bar{e}_1+\bar{e}_2-\bar{e}_3\} \end{aligned}$$

Por último la imagen de un vector (x,y,z) es:

$$f(x,y,z) = ((x,y,z)\cdot\bar{a})\bar{b} - (3x,3y,3z) = (-2x+6y-3z, x-3y-z, -x-2y-2z)$$

La matriz asociada queda:

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 1997)

VIII.– *Sea* $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow R$ *una forma bilineal cuya matriz en la base canónica es*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

y sea $S \subset \mathbb{R}^3$ *el subespacio generado por* $\{(1,0,0),(0,1,0),(1,-1,0)\}$.

(a) *Probar que la forma bilineal* f *define un producto escalar.*

Para que f defina una forma bilineal su matriz asociada ha de ser simétrica y definida positiva.

La simetría se cumple por ser la matriz A simétrica.

La diagonalizamos por congruencia para comprobar que es definida positiva:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1/2)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{21}(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(2/3)}{\longrightarrow}\overset{\nu_{32}(2/3)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura es $(+,+,+)$ y por tanto f es definida positiva.

(b) *Obtener una base ortogonal de* S *respecto del producto escalar* f.

En primer lugar vemos si los vectores que generan S son independientes. Para ello obtenemos un sistema de generadores equivalente haciendo operaciones fila:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Luego $S = \mathcal{L}\{(1,0,0),(0,1,0)\}$.

Para obtener una base ortogonal de S podemos utilizar el método de ortogonalización de Gram-Schmidt.

Tomamos como primer vector $\bar{v}_1 = (1,0,0)$.

Ahora buscamos otro vector de S de la forma:

$$\bar{v}_2 = (0,1,0) + \lambda\bar{v}_1$$

tal que

$$\bar{v}_2 \cdot \bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (0,1,0)\cdot\bar{v}_1 + \lambda\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -\frac{(0,1,0)\cdot\bar{v}_1}{\bar{v}_1\cdot\bar{v}_1}$$

Tenemos en cuenta que para hacer el producto escalar tenemos que utilizar la matriz A de f:

$$\lambda = -\frac{(0,1,0)A(1,0,0)^t}{(1,0,0)A(1,0,0)^t} = \frac{1}{2}$$

Por tanto la base pedida es:

$$\{(1,0,0),(\frac{1}{2},1,0)\}$$

IX.– *Analizar razonadamente la veracidad o falsedad de la siguiente afirmación: "El conjunto formado por dos vectores no nulos y ortogonales entre sí es un sistema libre".*

Es VERDADERO. Sean v, w tales vectores. Si fueran dependientes, como $w \neq 0$, existiría un escalar $\lambda \neq 0$ tal que $w = \lambda v$. Pero entonces, por ser ortogonales,

$$0 = v \cdot w = \lambda |v|^2,$$

de donde se derivaría que $v = 0$, lo que es una contradicción con la hipótesis. Así pues, son linealmente independientes y constituyen un sistema libre.

(Examen extraordinario, diciembre 2006)

X.– *Sea E un espacio euclídeo y $f : E \to E$ un endomorfismo simétrico. Demostrar que los subespacios núcleo e imagen de f son suplementarios ortogonales.*

Hay que comprobar que $Imf^{\perp} = Kerf$:

- Primero veamos que $Imf^{\perp} \subset Kerf$. Sea $\bar{x} \in Imf^{\perp}$. Se tiene que $\bar{x} \cdot f(\bar{y}) = 0$ para cualquier $\bar{y} \in E$. Además, por ser f simétrico

$$f(\bar{x}) \cdot f(\bar{x}) = \bar{x} \cdot f(f(\bar{x})) = 0$$

y por tanto $f(\bar{x}) = 0$ y $\bar{x} \in \ker f$.

- Ahora veamos que $Kerf \subset Imf^{\perp}$. Sea $\bar{x} \in Kerf$. Sea $\bar{y} \in E$. Por ser f simétrico,

$$\bar{x} \cdot f(\bar{y}) = \bar{y} \cdot f(\bar{x}) = \bar{y} \cdot \bar{0} = 0$$

luego $\bar{x} \in Imf^{\perp}$.

(Segundo parcial, mayo 2001)
