ÁLGEBRA LINEAL II — Solución a los problemas adicionales

Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas (Curso 2010–2011)

I.– *Sea E espacio vectorial sobre el cuerpo K y $f, g : E \longrightarrow K$ lineales. Se define la aplicación $\phi : E \times E \longrightarrow K$, $\quad \phi(\bar{x}, \bar{y}) = f(\bar{x})g(\bar{y})$.*

(a) *Demostrar que ϕ es bilineal.*

Sean $\bar{x}, \bar{x}', \bar{y}, \bar{y}' \in E$ y sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Se tiene:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = f(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}')g(\bar{y})$$

Por la linealidad de f queda:

$$\phi(\lambda\bar{x} + \mu\bar{x}', \bar{y}) = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}', \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y})$$

Análogamente utilizando la linealidad de g se ve que:

$$\phi(\bar{x}, \lambda\bar{y} + \mu\bar{y}') = \lambda f(\bar{x})g(\bar{y}) + \mu f(\bar{x}')g(\bar{y}) = \lambda\phi(\bar{x}, \bar{y}) + \mu\phi(\bar{x}, \bar{y}')$$

y por tanto la aplicación es bilineal.

(b) *Determinar la matriz de ϕ en una base $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ en función de las matrices de f y g en esa misma base.*

Supongamos que las matrices de f y g son respectivamente A y B, con:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

donde $a_i = f(\bar{e}_i)$ y $b_i = g(\bar{e}_i)$.

La matriz asociada a ϕ en la base canónica es:

$$C = (c_{ij}) \text{ con } c_{ij} = \phi(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = f(\bar{e}_i)g(\bar{e}_j) = a_i b_j$$

y matricialmente puede escribirse como:

$$C = A \cdot B^t$$

(c) *¿Es ϕ simétrica? ¿Es antisimétrica?*

No tiene porque ser simétrica ni antisimétrica. Por ejemplo tomando f y g de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ definidas por la matrices $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, la matriz de ϕ queda:

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que no es simétrica ni antisimétrica.

II.– *En el espacio vectorial real* $\mathbb{R}^3$*, hallar la expresión matricial en la base canónica de una forma cuadrática que cumple que:*

- *el vector* $(1,1,0)$ *es autoconjugado,*
- *el vector* $(2,0,1)$ *pertenece al núcleo,*
- *la forma cuadrática aplicada en* $(0,1,0)$ *da* 2 *y*
- *la forma polar asociada a esta forma cuadrática aplicada en los vectores* $(0,1,0)$ *y* $(1,1,0)$ *da* -1.

Consideramos la base $B = \{(1,1,0),(2,0,1),(0,1,0)\}$. Primero hallamos la matriz de la forma cuadrática (o equivalentemente de la polar asociada) con respecto a esta base. Si llamamos f a la forma polar asociada, tenemos:

- Por la primera condición, $f((1,1,0),(1,1,0)) = 0$.

- Por la segunda condición, $f((2,0,1),\bar{u}) = 0$, para cualquier $\bar{u} \in \mathbb{R}^3$. En particular, $f((2,0,1),(1,1,0)) = f((2,0,1),(2,0,1)) = f((2,0,1),(0,1,0)) = 0$.

- Por la tercera condición $f((0,1,0),(0,1,0)) = 2$.

- Finalmente por la cuarta condición $f((0,1,0),(1,1,0)) = -1$.

Obtenemos así la matriz de la forma cuadrática en la base B (teniendo en cuenta que es simétrica):

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0),(1,1,0)) & f((1,1,0),(2,0,1)) & f((1,1,0),(0,1,0)) \\ f((2,0,1),(1,1,0)) & f((2,0,1),(2,0,1)) & f((2,0,1),(0,1,0)) \\ f((0,1,0),(1,1,0)) & f((0,1,0),(2,0,1)) & f((0,1,0),(0,1,0)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Ahora teniendo en cuanta que la matriz para pasar de coordenadas de la base canónica a la base B es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

Hallamos la matriz que nos piden haciendo el cambio de base de la anterior:

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\right)^t \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -8 \\ -3 & 2 & 6 \\ -8 & 6 & 16 \end{pmatrix}$$

(Examen extraordinario, septiembre 2001)

III.– *Clasificar en función de* $a \in \mathbb{R}$ *la forma cuadrática en* $\mathbb{R}^3$ *cuya expresión con respecto a determinada base es*

$$\omega(x,y,z) = ax^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2ayz = 0$$

La matriz asociada a la forma cuádratica es:

$$F = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

Para calcular su signatura en función de a, la diagonalizamos por congruencia: hacemos operaciones filas y las análogas en columnas buscando la forma diagonal. Comenzamos intercambiando la primera y tercera filas (y columnas):

$$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a^2 & 1-a \\ 0 & 1-a & a-1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a \\ 0 & 1-a & 1-a^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2-a^2-a \end{pmatrix}$$

Los autovalores son $1, a-1$ y $-(a^2+a-2)$. Estas expresiones se anulan cuando $a=1$ ó $a=-2$. Distinguimos entonces los siguientes casos:

- Si $a<-2$ la signatura es $(+,-,-)$, es decir, $(1,2)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

- Si $a=-2$ la signatura es $(+,-,0)$, es decir, $(1,1)$. Se trata de una forma degenerada indefinida.

- Si $-2<a<1$ la signatura es $(+,+,-)$, es decir, $(2,1)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

- Si $a=1$ la signatura es $(+,0,0)$, es decir, $(1,0)$. Se trata de una forma degenerada semidefinida positiva.

- Si $a>1$ la signatura es $(+,+,-)$, es decir, $(2,1)$. Se trata de una forma no degenerada indefinida.

(Examen final, junio 2003)

IV.– *En coordenadas referidas a una determinada base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, una forma cuadrática ω tiene la expresión $\omega(x,y)=x^2+2xy-y^2$. ¿Existe alguna base $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, con respecto a cuyas coordenadas la expresión de ω sea $\omega(u,v)=2uv+v^2$? En caso afirmativo, dar la nueva base en función de la anterior.*

La matriz de la forma cuádratica en la base $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ es:

$$\begin{pmatrix} \omega((1,0)) & \frac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) \\ \frac{1}{2}(\omega((1,1)-\omega(1,0)-\omega(0,1)) & \omega(0,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota: En general si la expresión de una forma cuadrática esta dada a partir de las coordenadas $(x^1,\dots,x^n)$ de un vector con respecto a una base, la expresión matricial se obtiene tomando en la diagonal los coefientes de los términos $(x^i)^2$ y en la posición ij, con $i\neq j$, los coeficientes de los términos x^ix^j divididos por dos.

Análogmante la matriz de ω con respecto a la nueva base $\{\bar{v}_1,\bar{v}_2\}$ sería:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se trata de ver si ambas matrices son congruentes. Para ello diagonalizamos ambas por congruencia, calculando además las matrices de paso. Hacemos operaciones por filas y las simétricas por columnas. Para tener además la matriz de paso hacemos también las operaciones fila sobre la identidad:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{array}\right)$$

Por tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y para la segunda matriz:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

luego:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se deduce que:

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix}\right)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz de paso de una matriz a otra es por tanto:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/\sqrt(2) & 1/\sqrt(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2\}$ en función de la primera se escribe:

$$\bar{v}_1 = (1-1/\sqrt{2})\bar{e}_1 + (1/\sqrt{2})\bar{e}_2$$
$$\bar{v}_1 = \bar{e}_1$$

V.– *Consideramos la forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$ dada por la expresión:*

$$\omega(x,y,z) = x^2 + 4y^2 + z^2 + 2\alpha xy + 2yz$$

Determinar para que valores de α existe una base de $\mathbb{R}^3$ en la que la expresión matricial de la forma cuadrática es la matriz identidad.

La matriz asociada a la forma cuadrática en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para que exista una base en la que dicha forma sea la identidad, ω ha de ser definida positiva:

Método I: Para que sea definida positiva tien que cumplirse:

$$|1| > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} > 0; \qquad \begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ \alpha & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} > 0;$$

Operando esto es equivalente a que:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 3-\alpha^2 > 0;$$

Por tanto para que se cumplan ambas desigualdades α tiene que estar en el intervalo abierto $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Método II: Diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-\alpha)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{21}(-\alpha)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha^2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(\frac{-1}{4-\alpha^2})}{\longrightarrow} \overset{\nu_{32}(\frac{-1}{4-\alpha^2})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4-\alpha^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\dfrac{1}{4-\alpha^2} \end{pmatrix}$$

Para que sea definida positiva los términos de la diagonal han de ser positivos. Obtenemos las condiciones:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 1-\frac{1}{4-\alpha^2} > 0;$$

o equivalentemente:

$$4-\alpha^2 > 0; \qquad 3-\alpha^2 > 0;$$

como en en método anterior.

Observamos que en esta diagonalización hemos divido por $4-\alpha^2$, luego hemos implicitamente supuesto que $\alpha^2 \neq 4$. Si $4-\alpha^2 = 0$ quedaría:

$$A \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{23}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{23}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

por lo que no es definida positiva.

(Examen final, junio 2004)

VI.– *En el espacio vectorial real V y con respecto a una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se considera la siguiente forma cuadrática:*

$$\omega(\bar{x}) = 2x^1x^2 - 2x^1x^3 + (x^2)^2 - 4x^2x^3 + 3(x^3)^2.$$

(a) *Obtener una base de vectores conjugados con respecto a ω.*

Para hallar la base de vectores conjugados, diagonalizamos la matriz asociada a la forma cuádratica con respecto a la base dada:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Hacemos operaciones por filas y sus simétricas en columnas. Hacemos las mismas operaciones filas sobre la indentidad para obtener la base de vectores conjugados:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto una base de vectores conjugados es $\{(0,1,0), (1,-1,0), (1,1,1)\}$.

(b) *Clasificar ω, dar su rango y signatura.*

Ya hemos visto cual es su forma diagonal. Deducimos que tiene rango 2 y signatura es $(1,-1)$. La forma es indefinida degenerada.

(c) *Determinar el núcleo de ω.*

El núcleo de ω esta generado por los vectores correspondientes al elemento 0 de la diagonal. Es decir, en este caso el núcleo está generado por el vector $\{(1,1,1)\}$.

(d) *Dar el subespacio conjugado al de ecuación implícita $x^1 - x^2 = 0$.*

Calculamos una base del subespacio. Por ejemplo $\{(0,0,1), (1,1,0)\}$. Ahora calculamos los conjugados de estos vectores:

$$\{(x^1,x^2,x^3) \in V / (0 \quad 0 \quad 1) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0\}$$

$$\{(x^1,x^2,x^3) \in V / (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = 0\}$$

Operando queda:

$$\{(x^1,x^2,x^3) \in V / \quad -x^1 - 2x^2 + 3x^3 = 0\}$$
$$\{(x^1,x^2,x^3) \in V / \quad x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0\}$$

El conjugado es el espacio que generan ambos subespacios; en este caso el dado por la ecuación implícita $x^1 + 2x^2 - 3x^3 = 0$.

(e) *Expresión de la forma cuadrática en la base $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$, siendo*

$$\begin{cases} \bar{v}_1 &= \bar{e}_1 - \bar{e}_2 \\ \bar{v}_2 &= \bar{e}_2 - \bar{e}_3 \\ \bar{v}_3 &= \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \end{cases}$$

La matriz para pasar de coordenadas en la base que nos dan a la canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por tanto la matriz de la forma cuadrática en la base que nos dan es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 8 & -3 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

y la expresión de ω en dicha base:

$$\omega(\bar{y}) = -(y^1)^2 - 2y^1y^2 + 8(y^2)^2 - 6y^2y^3 + (y^3)^2$$

VII.– *En un espacio vectorial real V y con respecto a una base $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$, se considera la siguiente forma cuadrática:*

$$\omega(\bar{x}) = 2x^1x^2 + 4x^1x^3 - 2x^2x^3 + (x^3)^2.$$

Se pide:

(a) *Hallar una base de vectores conjugados.*

Diagonalizamos la matriz asociada a la forma cuadrática:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

Por tanto una base de vectores conjugados es $\{(0,0,1), (0,1,1), (1,3,1)\}$.

(b) *Determinar un subespacio vectorial de V de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática definida positiva.*

Hay dos valores positivos en la forma diagonal, luego esa es la máxima dimensión que pude tener un subespacio para que la restricción de la forma cuadratica sea definida positiva. Tal subespacio está generado por los dos vectores correspondientes a los valores positivos, es decir, $\{(0,0,1), (1,3,1)\}$

(Examen final, setiembre 2002)

VIII.– *Sea E un espacio vectorial real de dimensión 4 y $B = \{\bar{e}_i\}$ una base de E. Se considera la forma cuadrática ω cuya expresión en función de las coordenadas referidas a B es*

$$\omega(\bar{x}) = 2(x^1)^2 + 2(x^2)^2 + 2(x^4)^2 + 4x^1x^2 - 4x^1x^4 - 2x^2x^3 - 4x^2x^4 - 4x^3x^4.$$

(a) *Clasificar la forma cuadrática y diagonalizarla por suma de cuadrados.*

La matriz asociada a la forma cuadrática que nos dan es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

la diagonalizamos por congruencia:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{41}(1)\ \ \nu_{41}(1)]{H_{21}(-1)\nu_{21}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\nu_{23}(-1/2)]{H_{23}(-1/2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[H_{42}(-1)\nu_{42}(-1)]{H_{32}(1)\ \ \nu_{32}(1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 & -1 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{H_{43}(-1)\nu_{43}(-1)} \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Vemos que tiene dos autovalores positivos, uno negativo y otro nulo. Por tanto su rango es 3 y su signatura $(2,1)$. Es por tanto indefinida degenerada. La forma en suma de cuadradados en coordenadas en la base $\{(1,0,0,0),(-1,1,-1/2,0),(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$ es:

$$\omega(y^1,y^2,y^3,y^4) = 2(y^1)^2 + (y^2)^2 - (y^3)^2$$

(b) *Determinar un subespacio vectorial de E de dimensión máxima tal que la restricción de ω a él sea una forma cuadrática semidefinida negativa.*

Como la signatura es $(2,1)$ y la dimensión del espacio es 4, la máxima dimensión posible para un subespacio en el cual la restricción de ω es semidefinida negativa es 2. Tomamos el subespacio generado por los correspondientes vectores relativos al valor negativo y nulo de la diagonal $\{(-1,1,1/2,0),(3,-2,0,1)\}$.

IX.– *Consideremos la forma cuadrática ω de $\mathbb{R}^4$ que en la base canónica viene dada por la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) *Calcular el rango y la signatura de ω.*

Diagonalizamos la matriz mediante operaciones elementales en fila y sus simétrica en columna:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1/2 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1/2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1/2 \\ 0 & 1 & -1 & -3/2 \\ 0 & -1/2 & -3/2 & -1/4 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Por tanto el rango es 4 y la signatura $(2,2)$.

(b) *Calcular, si existe, un vector distinto del nulo que sea autoconjugado.*

Teniendo en cuenta que en la matriz que nos dan aparecen ceros en la diagonal, basta tomar, por ejemplo, $\bar{v} = (1,0,0,0)$.

(c) *Considérese el subespacio vectorial*

$$V = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 /\ x - y + 2z = z + t = 0\}$$

y la restricción Ω de ω a V. Hallar una base de V y la matriz asociada a Ω en dicha base.

Una base de V está formada por los vectores $\{(1,1,0,0),(0,2,1,-1)\}$. La matriz de Ω en dicha base es:

$$\begin{pmatrix} f((1,1,0,0),(1,1,0,0)) & f((1,1,0,0),(0,2,1,-1)) \\ f((1,1,0,0),(0,2,1,-1) & f((0,2,1,-1),(0,2,1,-1) \end{pmatrix}$$

donde f es la forma bilineal asociada a ω, es decir, $f(\bar{u},\bar{v}) = (\bar{u})A\{\bar{v}\}$. La matriz queda:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

(Examen final, junio 2001)

X.– *En el espacio vectorial $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ de polinomios de grado menor o igual que dos con coeficientes reales, para cada $a \in R$, se considera la aplicación dada por:*

$$f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow R, \quad f(p(x),q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a)$$

i) *Probar que es una forma bilineal simétrica.*

Veamos primero que es lineal en la primera componente. Sean $c,d \in R$, $p_1(x), p_2(x), q(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} f(cp_1(x)+dp_2(x),q(x)) &= (cp_1(a)+dp_2(a))q(-a) + (cp_1(-a)+dp_2(-a))q(a) = \\ &= cp_1(a)q(-a) + dp_2(a)q(-a) + cp_1(-a)q(a) + dp_2(-a)q(a) = \\ &= c(p_1(a)q(-a) + p_1(-a)q(a)) + d(p_2(a)q(-a) + p_2(-a)q(a)) = \\ &= cf(p_1(x),q(x)) + df(p_2(x),q(x)) \end{aligned}$$

Además es simétrica:

$$f(p(x),q(x)) = p(a)q(-a) + p(-a)q(a) = q(a)p(-a) + q(-a)p(a) = f(q(x),p(x)).$$

Por tanto de ambas cosas deducimos que también es lineal en la segunda componente y así es bilineal simétrica.

ii) *Estudiar para que valores de a el conjunto $B_a = \{(x-a)^2, x^2, (x+a)^2\}$ es una base de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.*

El espacio $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ tiene dimensión 3. Para que tres vectores formen base basta que sean independientes; equivalentemente basta que la matriz de coordenadas respecto de la base canónica tenga determinante no nulo. La base canónica es:

$$C = \{1, x, x^2\}$$

y

$$(x-a)^2 = a^2 - 2ax + x^2 \equiv (a^2, -2a, 1), \quad x^2 \equiv (0,0,1), \quad (x+a)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \equiv (a^2, 2a, 1).$$

Entonces:

$$det M_{B_aC} = det \begin{pmatrix} a^2 & 0 & a^2 \\ -2a & 0 & 2a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -4a^3.$$

Deducimos que B_a es base si y sólo si $a \neq 0$.

iii) *Para aquellos valores de a para los que tenga sentido, hallar la matriz asociada a f con respecto a la base B_a.*

Tiene sentido cuando B_a es base, es decir, $a \neq 0$. Con respecto a la base canónica la matriz asociada es:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) & f(1,x^2) \\ f(x,1) & f(x,x) & f(x,x^2) \\ f(x^2,1) & f(x^2,x) & f(x^2,x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos a la base B_a:

$$F_{B_a} = M^t_{CB_a} F_C M_{CB_a} = \begin{pmatrix} 0 & 4a^4 & 16a^4 \\ 4a^4 & 2a^4 & 4a^4 \\ 16a^4 & 4a^4 & 0 \end{pmatrix},$$

donde:

$$M_{B_aC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

iv) *Hallar el rango y la signatura de la forma cuadrática asociada a f en función del parámetro a.*

Diagonalizamos la matriz asoicada por congruencia:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 2a^2 & 0 & 2a^4 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-a^2)\mu_{31}(-a^2)}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2a^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vemos que:

- Si $a = 0$ el rango es 1 y la signatura $(1, 0)$.

- Si $a \neq 0$ el rango es 2 y la signatura $(1, 1)$.

XI.– *Sea $\omega : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ la forma cuadrática que en la base canónica tiene la expresión*

$$\omega(x, y, z, t) = 2x^2 + \alpha y^2 + 2z^2 + t^2 + 2\beta xz + 2yt$$

Se pide, en función de los parámetros α y β, el rango, la signatura y la clasificación de ω.

La matriz de la forma cuadrática en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Mediante operaciones fila y sus simétricas en las columnas obtenemos una diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & \beta & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 1 \\ \beta & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\substack{H_{31}(-\beta/2)\nu_{31}(-\beta/2) \\ H_{24}(-1) \quad \nu_{24}(-1)}}{\longrightarrow \quad \longrightarrow} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \beta^2/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los términos de la diagonal son $2, 1, \alpha - 1, 2 - \beta^2/2$. Vemos que los dos últimos se anulan cuando $\alpha = 1$ y $\beta = 2$ o $\beta = -2$ respectivamente. Distinguimos así los siguientes casos:

- Si $\alpha < 1$ y $\beta < -2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(2, 2)$ y la forma es indefinida no degenerada.

- Si $\alpha < 1$ y $\beta = -2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(2, 1)$ y la forma es indefinida degenerada.

- Si $\alpha < 1$, $\beta > -2$ y $\beta < 2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(3, 1)$ y la forma es indefinida no degenerada.

- Si $\alpha < 1$ y $\beta = 2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(2, 1)$ y la forma es indefinida degenerada.

- Si $\alpha < 1$ y $\beta > 2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(2, 2)$ y la forma es indefinida no degenerada.

- Si $\alpha = 1$ y $\beta < -2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(2, 1)$ y la forma es indefinida degenerada.

- Si $\alpha = 1$ y $\beta = -2$, entonces el rango es 2, la signatura es $(2, 0)$ y la forma es semidefinida positiva degenerada.

- Si $\alpha = 1$, $\beta > -2$ y $\beta < 2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(3, 0)$ y la forma es semidefinida positiva degenerada.

- Si $\alpha = 1$ y $\beta = 2$, entonces el rango es 2, la signatura es $(2, 0)$ y la forma es semidefinida positiva degenerada.

- Si $\alpha = 1$ y $\beta > 2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(2, 1)$ y la forma es indefinida degenerada.

- Si $\alpha > 1$ y $\beta < -2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(3, 1)$ y la forma es indefinida no degenerada.

- Si $\alpha > 1$ y $\beta = -2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(3, 0)$ y la forma es semidefinida positiva degenerada.

- Si $\alpha > 1$, $\beta > -2$ y $\beta < 2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(4, 0)$ y la forma es definida positiva no degenerada.

- Si $\alpha > 1$ y $\beta = 2$, entonces el rango es 3, la signatura es $(3, 0)$ y la forma es semidefinida positiva degenerada.

- Si $\alpha > 1$ y $\beta > 2$, entonces el rango es 4, la signatura es $(3, 1)$ y la forma es indefinida no degenerada.

(Primer parcial, enero 2001)

XII.– *En el espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ y referido a la base canónica, se considera la familia de formas cuadráticas:*

$$\omega : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \omega(x, y, z) = ax^2 + by^2 + az^2 - 2xz, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

Clasificar las formas cuadráticas en función de a y b.

Escribimos la matriz asociada a ω con respecto a la base canónica. Para clasificarla la diagonalizaremos por congruencia:

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Si $a \neq 0$ podemos hacer:

$$A \overset{H_{31}(1/a)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(1/a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a - 1/a \end{pmatrix}$$

Por el contrario si $a = 0$ queda:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{13}}{\longrightarrow} \overset{\nu_{13}}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 0 & b & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\nu_{31}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

En ambos casos b es uno de los elementos de la diagonal. Los otros dos dependen de a. Además $a - 1/a$ se anula cuando $a = 1$ o $a = -1$. Teniendo en cuenta todo esto, distinguimos las siguientes posibilidades:

- Si $b > 0$ y:

  $a > 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (3, 0)$ y es definida positiva (no degenerada).

  $a = 1$, entonces *rango* $= 2$, *signatura* $= (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (2, 1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces *rango* $= 2$, signatura $(1, 1)$ y es indefinida (degenerada).

  $a < -1$, entonces *rango* $= 3$, signatura $(1, 2)$ y es indefinida (no degenerada).

- Si $b = 0$ y:

  $a > 1$, entonces *rango* $= 2$, *signatura* $= (2, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

  $a = 1$, entonces *rango* $= 1$, *signatura* $= (1, 0)$ y es semidefinida positiva (degenerada).

$-1 < a < 1$, entonces *rango* $= 2$, *signatura* $= (1,1)$ y es indefinida (degenerada).

$a = -1$, entonces *rango* $= 1$, signatura $(0,1)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

$a < -1$, entonces *rango* $= 2$, signatura $(0,2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

- Si $b < 0$ y:

  $a > 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (2,1)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = 1$, entonces *rango* $= 2$, *signatura* $= (1,1)$ y es indefinida (degenerada).

  $-1 < a < 1$, entonces *rango* $= 3$, *signatura* $= (1,2)$ y es indefinida (no degenerada).

  $a = -1$, entonces *rango* $= 2$, signatura $(0,2)$ y es semidefinida negativa (degenerada).

  $a < -1$, entonces *rango* $= 3$, signatura $(0,3)$ y es definida negativa (no degenerada).

XIII.– *En el espacio vectorial* $\mathbb{R}^3$ *se considera la familia de formas cuadráticas* $\omega_a : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ *que en la base canónica tienen la siguiente expresión:*

$$\omega_a(x,y,z) = 5x^2 + y^2 + 2z^2 + 2axy + 2xz - 2yz, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

Clasificarlas en función del parámetro a.

Escribimos las matrices asociadas a las formas cuadráticas con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^3$:

$$Q_a = \begin{pmatrix} 5 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla las diagonalizamos por congruencia:

$$Q_a \underset{\nu_{12}}{\overset{H_{12}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ a & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\nu_{21}(-a)\nu_{31}(1)}{\overset{H_{21}(-a)H_{31}(1)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5-a^2 & 1+a \\ 0 & 1+a & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\underset{\nu_{23}}{\overset{H_{23}}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a \\ 0 & 1+a & 5-a^2 \end{pmatrix} \underset{\nu_{32}(-1-a)}{\overset{H_{32}(-1-a)}{\longrightarrow}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2a^2-2a+4 \end{pmatrix}.$$

Para saber que intervalos hemos de estudiar vemos cuando se anulan los valores de la diagonal:

$$-2a^2 - 2a + 4 = 0 \iff a^2 + a - 2 = 0 \iff a = -2 \quad \text{ó } a = 1.$$

Distinguimos por tanto los siguientes casos:

VALOR DE a	SIGNATURA	RANGO	TIPO
$a \in (-\infty, -2)$	$(2,1)$	3	indefinida, no degenerada
$a = -2$	$(2,0)$	2	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (-2, 1)$	$(3,0)$	3	definida positiva, no degenerada
$a = 1$	$(2,0)$	1	semidefinida positiva, degenerada
$a \in (1, \infty)$	$(2,1)$	3	indefinida, no degenerada
