# Álgebra Lineal II

**TEMA II**- Espacios vectoriales euclídeos.

**Capítulo 2**. Introducción a los espacios euclídeos.

# Introducción a los espacios euclídeos.

*Luis Fuentes García (2022).*

# Motivación.

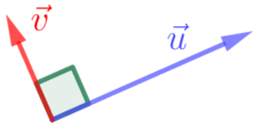
**Producto escalar:** **nos sirve para medir ángulos y distancias ("hacer" geometría).**

$\vec{u}\cdot\vec{v}$ (dos vectores se transforma en un número) $\longrightarrow$ $f: R^2 \times R^2 \to R$ $\quad f(\vec{u},\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{v}$ $\quad$ $f$ **forma bilineal**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$ $\longrightarrow$ $f(\vec{u},\vec{v}) = f(\vec{v},\vec{u})$ $\quad$ $f$ **simétrica**

**Norma o módulo:** $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}\cdot\vec{u}$ $\longrightarrow$ $\omega: R^2 \to R$ $\quad \omega(\vec{u}) = f(\vec{u},\vec{u})$ $\quad$ $\omega$ **forma cuadrática**

**Vectores perpendiculares u ortogonales.** $\longrightarrow$ **Vectores conjugados.**




$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$ $\longrightarrow$ $\vec{u}$ **conjugado con** $\vec{v} \Leftrightarrow f(\vec{u},\vec{v}) = 0$

**Buscamos**: **FORMAS BILINEALES** que se comporten como el **PRODUCTO ESCALAR** y sirvan para hacer **GEOMETRíA**.

$f: U \times U \to R$

1) **Bilineales.**

2) **Simétricas.**

3) **Definida positiva.**

Queremos **MEDIR** definiendo la **NORMA** ó **MÓDULO**:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}} \longrightarrow \sqrt{f(\vec{u},\vec{u})}$

NECESITAMOS que $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u},\vec{u}) \geq 0$ $\longrightarrow$ $f$ $\begin{cases} \text{semidefinida positiva} & \textbf{NO} \\ \text{definida positiva} \end{cases}$

**Si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **entonces** $\|\vec{u}\| \neq 0$ $\longrightarrow$ **Si** $\vec{u} \neq \vec{0}$ **entonces** $f(\vec{u},\vec{u}) \neq 0$

**Definición**. Un **producto escalar** en un **e.v.** $U$ es una **forma bilineal** $f: U \times U \to R$ **simétrica** y **definida positiva**.

# Notación.

**Definición**. Un **producto escalar** en un **e.v.** $U$ es una **forma bilineal** $f: U \times U \to R$ **simétrica** y **definida positiva**.

**Espacio vectorial $U$ + producto escalar = Espacio vectorial euclídeo**

Imagen de dos vectores: $f(\vec{u}, \vec{v})$ → Producto escalar de dos vectores: $\vec{u} \cdot \vec{v}$ ó $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$

**Matriz asociada** a $f$ respecto de la base $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$ → **Matriz de Gram** respecto de la base $B = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$

$$(F_B)_{ij} = \left(f(\vec{u_i}, \vec{u_j})\right) \qquad (G_B)_{ij} = (\vec{u_i} \cdot \vec{u_j})$$

$$F_B = \begin{pmatrix} f(\vec{u_1},\vec{u_1}) & f(\vec{u_1},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_1},\vec{u_n}) \\ f(\vec{u_2},\vec{u_1}) & f(\vec{u_2},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_2},\vec{u_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(\vec{u_n},\vec{u_1}) & f(\vec{u_n},\vec{u_2}) & \cdots & f(\vec{u_n},\vec{u_n}) \end{pmatrix} \qquad G_B = \begin{pmatrix} \vec{u_1}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_1}\cdot\vec{u_2} & \cdots & \vec{u_1}\cdot\vec{u_n} \\ \vec{u_2}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_2}\cdot\vec{u_2} & \cdots & \vec{u_2}\cdot\vec{u_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vec{u_n}\cdot\vec{u_1} & \vec{u_n}\cdot\vec{u_2} & \cdots & \vec{u_n}\cdot\vec{u_n} \end{pmatrix}$$

simétrica

definida positiva

**Expresión matricial:** → **Expresión matricial:**

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B \qquad \vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n)_B G_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

**Cambio de base por CONGRUENCIA:** → **Cambio de base por CONGRUENCIA:**

$$F_{B'} = M^t_{BB'} F_B \, M_{BB'} \qquad G_{B'} = M^t_{BB'} G_B \, M_{BB'}$$

**Siempre puede diagonalizarse:**

$$M^t_{BB'} G_B \, M_{BB'} = G_{B'} \text{ diagonal} = Id$$

# Norma de un vector.

**Definición**. Dado un **e. v. euclídeo** $\boldsymbol{U}$, se define la **norma** o **módulo** de un vector $\vec{u}$ como: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u}\cdot\vec{u}}$

$\vec{u}\cdot\vec{u} \geq \mathbf{0}$ porque un producto escalar es una forma bilineal, simétrica y **definida positiva**

Propiedades:

**1)** $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u} = \vec{0}$

**Prueba:** $\|\vec{u}\| = 0 \iff \vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{0} \overset{\text{definida positiva}}{\iff} \vec{u} = \vec{0}$

**2)** $\|\vec{u}\| \geq \mathbf{0}$ para cualquier vector $\vec{u} \neq \vec{0}$

**3)** $\|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\|\vec{u}\|$ para cualquier $\vec{u} \in \boldsymbol{U}, \lambda \in \boldsymbol{R}$

**Prueba:** $\|\lambda\vec{u}\| = +\sqrt{\lambda\vec{u}\cdot\lambda\vec{u}} \overset{\text{bilinealidad}}{=} +\sqrt{\lambda^2\vec{u}\cdot\vec{u}} = |\lambda|\|\vec{u}\|$

**4) Desigualdad de *Cauchy-Schwarz*:** $|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

(posponemos la prueba)

**5) Desigualdad de *Minkowsky*:** $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ ⟷ **Desigualdad *TRIANGULAR.***

**Prueba:**

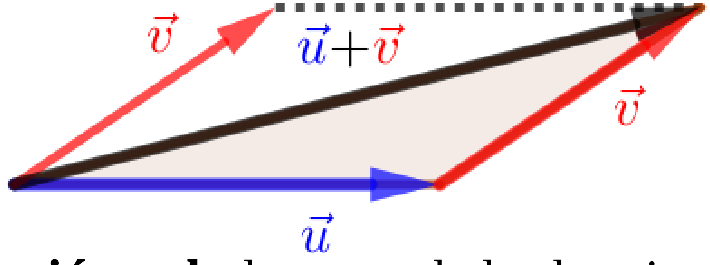
bilinealidad

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}\cdot\vec{v} =$$

$$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \leq \|\vec{u}\|^2 + 2|\vec{u}\cdot\vec{v}| + \|\vec{v}\|^2 \leq$$

simetría

$a \leq |a| \;\Rightarrow\; \vec{u}\cdot\vec{v} \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}|$




En un **triángulo** la suma de las longitudes de **dos lados** es siempre **mayor o igual** a la del lado **restante**

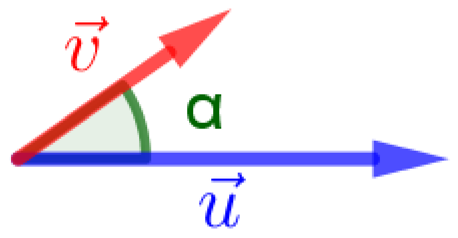
# Ángulo entre dos vectores.

**Motivación:**

1) En el plano hay definida una noción de ángulo.

2) Sabemos que para el producto escalar clásico:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|\cos(\alpha) \ \Rightarrow\ \cos(\alpha) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$$




**Definición**. Dado un **e. v. euclídeo** $U$, y dos vectores $\vec{u}, \vec{v} \neq \vec{0}$ se **define el ángulo** que forman $\angle(\vec{u}, \vec{v})$ como:

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = arcos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}\right) \in [0, \pi]$$

**Observación importante:**

Para que tenga sentido $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|}$ tiene que estar comprendido entre $-1$ y $1$, ya que $\cos(\alpha) \in [-1, 1]$.

Esto está garantizado gracias a la **desigualdad de *Cauchy-Schwarz:*** $\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \quad\Rightarrow\quad \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} \leq 1 \quad\Rightarrow\quad -1 \leq \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\ \|\vec{v}\|} \leq 1$$

**Ejemplo 1**: En $R^2$ dada la **forma bilineal** $f: R^2 \times R^2 \to R, \quad f((x,y),(x',y')) = xx' + xy' + yx' + 5yy'$

1) Comprobar que define un **producto escalar**.

2) Hallar el **ángulo** que forman los vectores $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,0)$

**Matriz de Gram**

$$G_c = F_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$F_C$ es **simétrica**

$$f \ \text{producto escalar} \Leftrightarrow \begin{cases} \textbf{bilineal} \ \boxtimes \quad \text{(es un dato del enunciado)} \\ \textbf{simétrica} \ \boxtimes \Leftrightarrow F_C \text{ es simétrica} \\ \textbf{definida positiva} \ \boxtimes \Leftrightarrow \begin{cases} \text{signatura} = (2,0) \\ \boxed{\text{Criterio de Sylvester}} \ \boxtimes \end{cases} \end{cases}$$

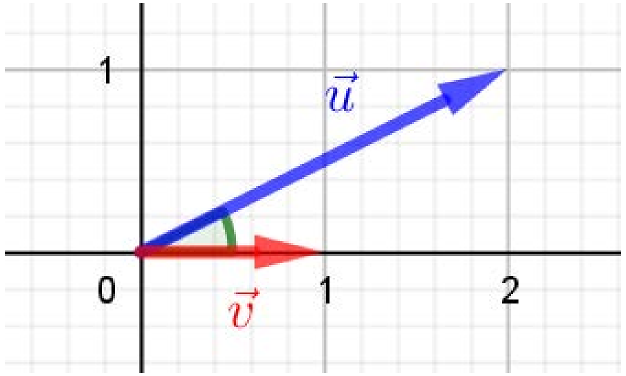
$$\begin{cases} F_1 = (1) & F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \\ \det(F_1) = 1 > 0 & \det(F_2) = 4 > 0 \end{cases}$$

$$\angle(\vec{u}, \vec{v}) = arcos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right) = arcos\left(\frac{3}{\sqrt{13} \cdot 1}\right) = 33.69^o$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (2 \quad 1) G_c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = \sqrt{(2 \quad 1) G_c \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(2 \quad 1) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{13}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{(1 \quad 0) G_c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{(1 \quad 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$




Es ESENCIAL usar en el **producto escalar** y en las **normas** la **Matriz de Gram** del producto escalar con el que se está trabajando.

**Ejemplo 1**: $f: R^2 \times R^2 \to R,\quad f((x,y),(x',y')) = xx' + xy' + yx' + 5yy'$

2) Hallar el **ángulo** que forman los vectores $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,0)$

$G_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3 \qquad \|\vec{u}\| = \sqrt{(2 \quad 1)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{13} \qquad \|\vec{v}\| = \sqrt{(1 \quad 0)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = arcos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) = arcos\left(\frac{3}{\sqrt{13}\cdot 1}\right) = 33.69^o$$

---

**Ejemplo 2**: En $R^2$ con el **producto escalar usual** hallar el **ángulo** que forman los vectores $\vec{u} = (2,1)$ y $\vec{v} = (1,0)$

**Producto escalar usual:** $f: R^2 \times R^2 \to R,\quad f((x,y),(x',y')) = xx' + yy'$

$G_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = Id$

$$(x,y)\cdot(x',y') = (x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + yy'$$

$$\boxed{(x,y)\cdot(x',y') = xx' + yy'}$$

$$\|(x,y)\| = \sqrt{(x,y)\cdot(x,y)} = \sqrt{(x \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\boxed{\|(x,y)\| = \sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\angle(\vec{u},\vec{v}) = arcos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right) = arcos\left(\frac{(2,1)\cdot(1,0)}{\|(2,1)\|\,\|(1,0)\|}\right) = arcos\left(\frac{2\cdot 1 + 1\cdot 0}{\sqrt{2^2+1^2}\sqrt{1^2+0^2}}\right) = arcos\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 26,57^o$$

# Demostración de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

**Desigualdad de *Cauchy-Schwarz:*** $\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$

1) Si $\vec{u}=\vec{0}$ ó $\vec{v}=\vec{0}$ la desigualdad se cumple porque $|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 0 \leq 0 = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$

2) Si $\vec{u},\vec{v}\neq\vec{0}$ , sea un número real $x$ cualquiera:

**bilinealidad**

$$0 \leq \|\vec{u}+x\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+x\vec{v})\cdot(\vec{u}+x\vec{v}) = \vec{u}\cdot\vec{u} + \vec{u}\cdot(x\vec{v}) + (x\,\vec{v})\cdot\vec{u} + (x\vec{v})\cdot(x\vec{v}) =$$

**bilinealidad**

$$= \vec{u}\cdot\vec{u} + x\vec{u}\cdot\vec{v} + x\vec{v}\cdot\vec{u} + x^2\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + 2x\vec{u}\cdot\vec{v} + x^2\|\vec{v}\|^2$$

**simetría**

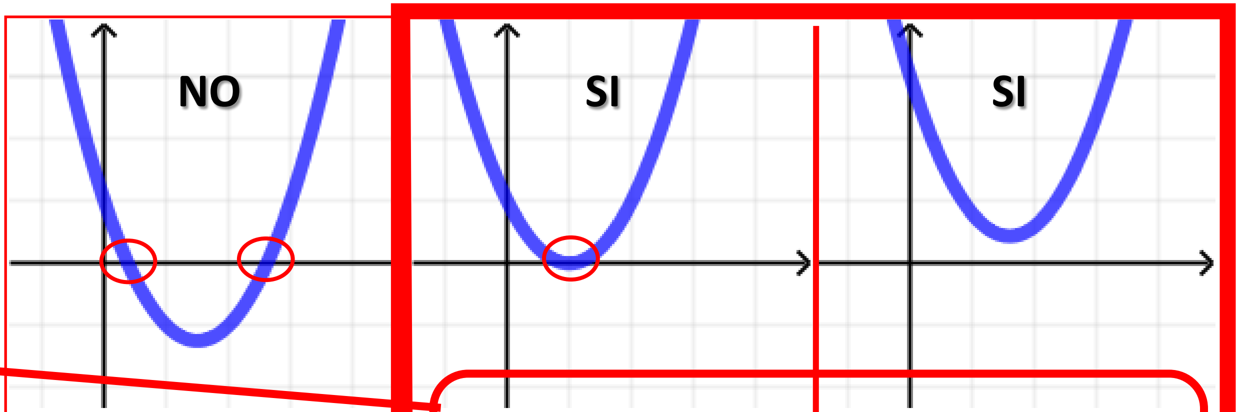
$$0 \leq \underbrace{\boxed{\|\vec{u}\|^2}}_{C} + \underbrace{\boxed{2\vec{u}\cdot\vec{v}}}_{B}\cdot x + x^2\underbrace{\boxed{\|\vec{v}\|^2}}_{A>0}$$

para todo $x \in R$

$\boxed{Ax^2+Bx+C \text{ NO toma valores negativos}}$

$$Ax^2+Bx+C=0 \quad \Leftrightarrow \quad x=\frac{-B\pm\sqrt{B^2-4AC}}{2A}$$

$\boxed{B^2-4AC \leq 0}$




| DOS RAÍCES | UNA RAÍZ | CERO RAÍCES |
|---|---|---|
| $B^2-4AC>0$ | $B^2-4AC=0$ | $B^2-4AC<0$ |

$$4(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 - 4\,\|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2 \leq 0$$

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2$$

$\boxed{|\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$