Álgebra Lineal II

TEMA III- Espacios afines.

Capítulo 1. El espacio afín.

Definición de espacio afín.
Referencias afines.

Luis Fuentes García (2022).

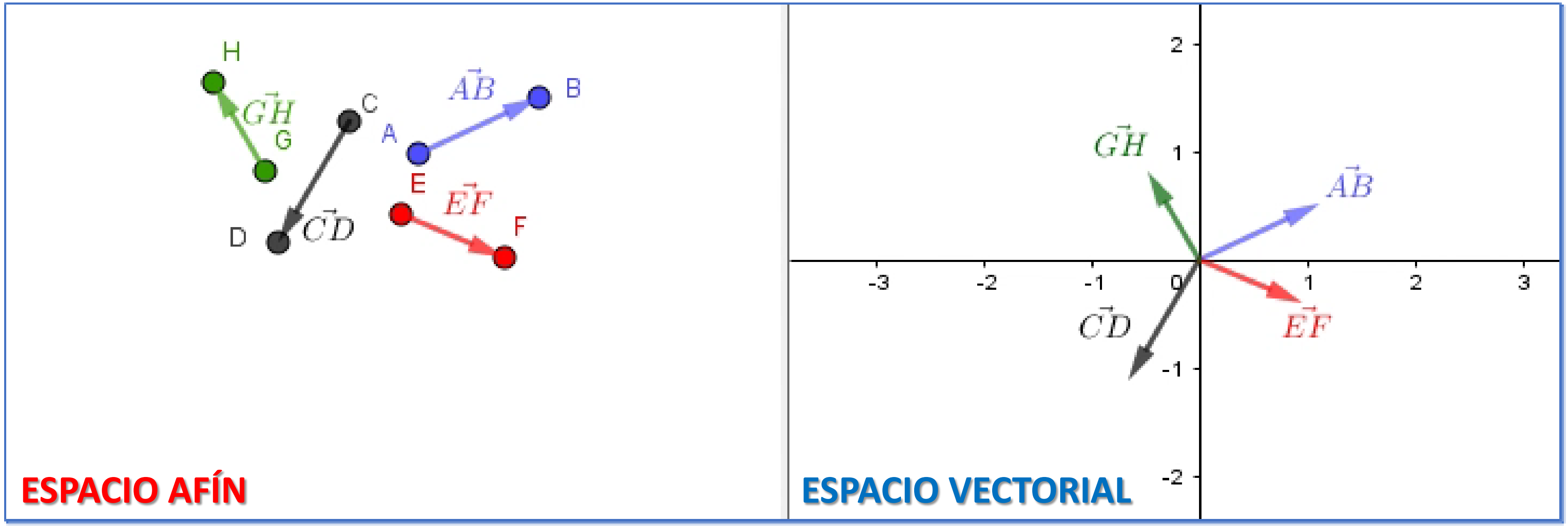
Definición de espacio afín.

Partimos de un espacio vectorial V (sus elementos son vectores)

Un espacio afín $E \neq \emptyset$ asociado al **espacio vectorial V** es un conjunto de **PUNTOS**

y una forma de asignar a cada par de puntos un vector:

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & V \\ (P, Q) & \rightarrow & \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{array}$$



cumpliendo:

1) $\forall P \in E$ y $\forall \vec{v} \in V$ **existe un único** $Q \in E$ **verificando que** $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

2) $\forall P, Q, R \in E$ **se verifica que** $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ (**Relación de Chasles**)

Propiedades del espacio afín.

Un espacio afín $E \neq \emptyset$ asociado al espacio vectorial V es un conjunto de PUNTOS **y una forma de asignar a cada par de puntos un vector:**

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & V \\ (P, Q) & \rightarrow & \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

cumpliendo:

1) $\forall P \in E$ **y** $\forall \vec{v} \in V$ **existe un único** $Q \in E$ **verificando que** $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

2) $\forall P, Q, R \in E$ **se verifica que** $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ **(Relación de Chasles)**

Propiedades:

$$\boxed{P = Q = R}$$

$$\boxed{1.\ \overrightarrow{PQ} = \vec{0} \Leftrightarrow P = Q}$$

Prueba:

$\boxed{\Leftarrow}$ $\quad \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PP} = \vec{0}$

$\boxed{\Rightarrow}$ $\quad \left.\begin{array}{l} P \in E \\ \vec{0} \in V \end{array}\right\} \Rightarrow \exists$único $Q \in E / \overrightarrow{PQ} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad P = Q$

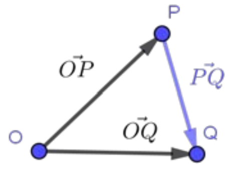
$$\boxed{2.\ \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}}$$

Prueba:

$\boxed{P = R}$

$\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$

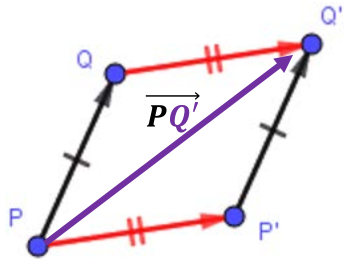
$$\boxed{3.\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}}$$



Prueba:

$\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}$

$$\boxed{4.\ \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} \Rightarrow \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}}$$



Prueba:

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{\overrightarrow{PQ}} + \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{PQ'} \\ \overrightarrow{PP'} + \cancel{\overrightarrow{P'Q'}} = \overrightarrow{PQ'} \end{array}\right. \quad \text{RESTANDO}$$

$$\overrightarrow{QQ'} - \overrightarrow{PP'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{QQ'}$$

Ejemplo estándar de espacio afín.

Un espacio afín $E \neq \emptyset$ asociado al espacio vectorial V es un conjunto de PUNTOS **y una forma de asignar a cada** par de puntos **un** vector**:**

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & V \\ (P,Q) & \to & \vec{v} = \overrightarrow{PQ} \end{array}$$

cumpliendo:

1) $\forall P \in E$ **y** $\forall \vec{v} \in V$ **existe un único** $Q \in E$ **verificando que** $\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$

2) $\forall P, Q, R \in E$ **se verifica que** $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ **(Relación de Chasles)**

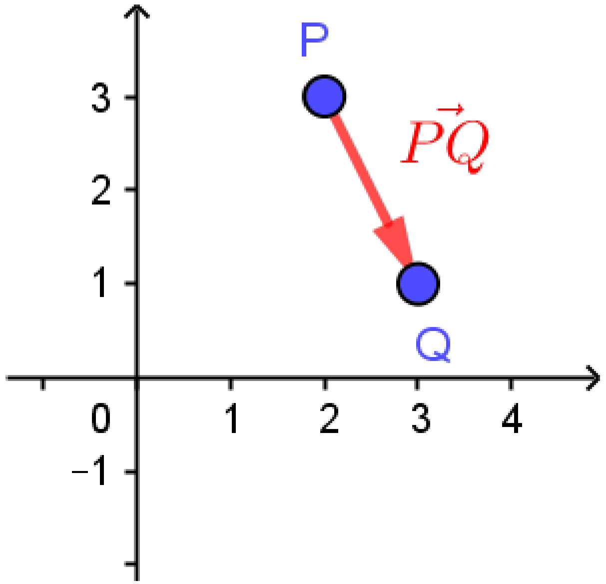
E es espacio afín asociado a V y V tiene un **producto escalar** $\Rightarrow$ E **se llama espacio afín euclídeo** (¡podemos **medir**!)

Construcción de un espacio afín:

Dado un espacio vectorial V cualquiera tomamos como espacio afín $E = V$.

$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & V \\ (P,Q) & \to & \vec{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P \end{array}$$

Cumple las dos propiedades de la definición.



Ejemplo: $V = R^2$ y $E = V = R^2$.

$$P = (2,3),\ Q = (3,1) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PQ} = Q - P = (3,1) - (2,3) = (1,-2)$$

Referencias afines.

Motivación: En un espacio vectorial para introducir coordenadas partíamos del concepto de base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.

En un espacio afín los vectores pueden trasladarse a cualquier punto.

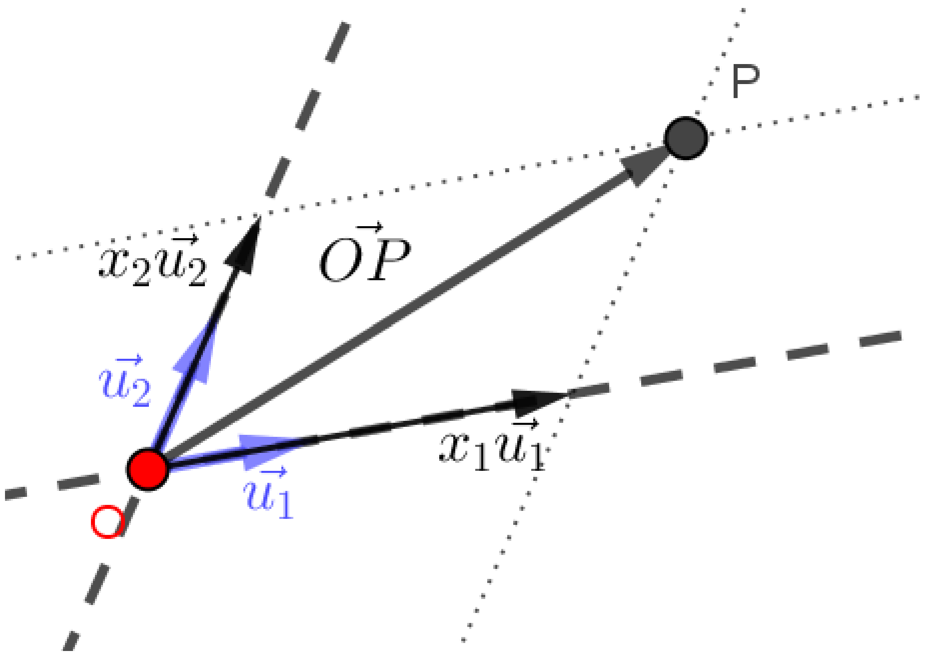
Referencia afín $R = \{O; \vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ está formada por un punto O y una base $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$.

Coordenadas de un **punto** P respecto a la **referencia** R

$P \in E$ Coordenadas de P en la referencia R = Coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ en la base B

$$\overrightarrow{OP} = x_1\vec{u}_1 + x_2\vec{u}_2 + \cdots + x_n\vec{u}_n \qquad \boxed{P = (x_1, x_2, \dots, x_n)_R}$$

Si B es una **base ortonormal** la referencia se llama **referencia rectangular**



Ejemplo 1 . Referencia canónica.

$$R_c = \{(0,0); \underbrace{(1,0), (0,1)}_{\text{Base canónica}}\} \qquad P = (3,2) \qquad \boxed{P = (3,2)_{R_c}}$$

$$\overrightarrow{OP} = (3,2) - (0,0) = (3,2) = 3 \cdot (1,0) + 2 \cdot (0,1) = (3,2)_c$$

Ejemplo 2 .

$$R' = \{(1,1); (2,0), (-1,1)\} \qquad P = (3,2) \qquad \boxed{P = \left(\frac{3}{2}, 1\right)_{R'}}$$

$$\overrightarrow{O'P} = (3,2) - (1,1) = (2,1) = \frac{3}{2} \cdot (2,0) + 1 \cdot (-1,1)$$

"A ojo" NO es fácil

Cambio de referencia afín.

Dadas dos referencias $\begin{cases} R = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n}_{B}\} \\ R' = \{O'; \underbrace{\vec{u}_1{}', \vec{u}_2{}', \dots, \vec{u}_n{}'}_{B'}\} \end{cases}$

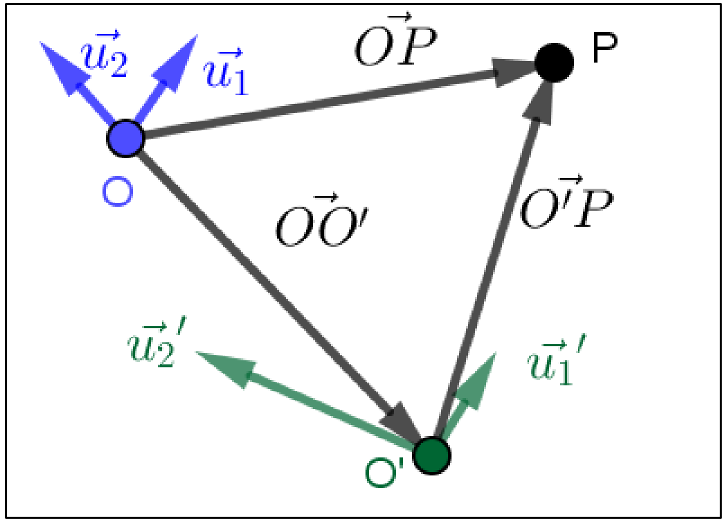
Punto $P = \begin{cases} (x_1, x_2, \dots, x_n)_R \longrightarrow \overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, \dots, x_n)_B \\ (x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}')_{R'} \longrightarrow \overrightarrow{O'P} = (x_1{}', x_2{}', \dots, x_n{}')_{B'} \end{cases}$

¿Cómo se relacionan? **¿Cómo se relacionan?**

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P}$ $\qquad \overrightarrow{OO'} = (a_1, a_2, \dots, a_n)_B$ coordenadas de O' en la referencia R

BASE B

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B + \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_B \Rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_B = M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_{B'}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_B + M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_{B'}$$



$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_R = \boxed{\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_R} + \boxed{M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_{R'}}$$

PARTE AFÍN

PARTE VECTORIAL

Coordenadas del (<u>nuevo</u>) origen de R' respecto a R

Ejemplo de cambio de referencia afín.

Ejemplo 1 . Referencia canónica.

$R_c = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$ $\qquad P = (3,2) = (3,2)_{R_c}$

Base canónica

Ejemplo 2 .

$R' = \{(1,1); (2,0), (-1,1)\}$

Base B'

$P = \left(? \right)_{R'}$

Cambio de R' a la canónica.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_{R_c} + M_{CB'} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}_{R'}$$

Coordenadas del (nuevo) origen de R' respecto a R_c

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} + M_{CB'} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'}$$

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'}$$

Despejamos $(x', y')_R'$

Necesitamos: cambio de la canónica a R'.

$$\begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \end{pmatrix}_{R_c}$$

Aplicamos la fórmula al punto $P = (3,2)_{R_c}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 2-1 \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ 1 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$P = (3/2, 1)_{R'}$$

Expresión de la fórmula de cambio de referencia con una sola matriz.

$$R' = \{O'; \underbrace{\vec{u}_1{}', \vec{u}_2{}', \dots, \vec{u}_n{}'}_{B'}\} \Rightarrow R = \{O; \underbrace{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n}_{B}\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}_R + M_{BB'} \begin{pmatrix} x_1{}' \\ x_2{}' \\ \vdots \\ x_n{}' \end{pmatrix}_{R'}$$

Coordenadas del (<u>nuevo</u>) origen de R' respecto a R

$\Leftrightarrow$

Matriz de cambio de referencia $((n+1) \times (n+1))$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ 1 \end{pmatrix}_R = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & a_1 \\ & M_{BB'} & & a_2 \\ & & & \vdots \\ & & & a_n \\ \hline 0 & 0 \;\dots & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_n' \\ 1 \end{pmatrix}_{R'}$$

Coordenadas del (<u>nuevo</u>) origen de R' respecto a R

<u>Ejemplo:</u>

$$R' = \{(1,1); (2,0), (-1,1)\} \Rightarrow R_c = \{(0,0); (1,0), (0,1)\}$$

Base canónica

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{R_c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} + \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{R'}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}_{R_c} = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}_{R'}$$

$$M_{CB'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de cambio de referencia (3×3)