Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 3. Transformaciones ortogonales.

Introducción a las transformaciones ortogonales.

Luis Fuentes García (2022).

Transformaciones ortgonales.

Trabajaremos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + producto escalar

Definición. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$\boxed{t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

Propiedad fundamental. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es una **aplicación lineal**:

Prueba:

$\boxed{t \text{ es lineal si: } \quad t(a\vec{u} + b\vec{v}) = a\, t(\vec{u}) + b\, t(\vec{v})} \quad \Leftrightarrow \quad t(a\vec{u} + b\vec{v}) - a\, t(\vec{u}) - b\, t(\vec{v}) = \vec{0}$

Equivale a probar que: $\|t(a\vec{u} + b\vec{v}) - a\, t(\vec{u}) - b\, t(\vec{v})\| = 0$

$$\big(t(a\vec{u} + b\vec{v}) - a\, t(\vec{u}) - b\, t(\vec{v})\big) \cdot \big(t(a\vec{u} + b\vec{v}) - a\, t(\vec{u}) - b\, t(\vec{v})\big) =$$

$$= t(a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot t(a\vec{u} + b\vec{v}) + a^2\, t(\vec{u}) \cdot t(\vec{u}) + b^2\, t(\vec{v}) \cdot t(\vec{v})$$
$$-2a\, t(\vec{u}) \cdot t(a\vec{u} + b\vec{v}) - 2bt(\vec{v}) \cdot t(a\vec{u} + b\vec{v}) + 2a\, bt(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) =$$

$$= (a\vec{u} + b\vec{v}) \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) + a^2\vec{u} \cdot \vec{u} + b^2\vec{v} \cdot \vec{v} - 2a\vec{u} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) - 2b\vec{v} \cdot (a\vec{u} + b\vec{v}) + 2a\, b\vec{u} \cdot \vec{v} =$$

$$= \big((a\vec{u} + b\vec{v}) - a\vec{u} - b\vec{v}\big) \cdot \big((a\vec{u} + b\vec{v}) - a\vec{u} - b\vec{v}\big) = 0$$

Propiedades (I). Expresión matricial.

<u>Definición</u>. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \rightarrow U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda **transformación ortogonal** $t: U \rightarrow U$ de U es una **aplicación lineal**.

2. Condición matricial para ser **transformación ortogonal:**

B base de U
- T_B matriz asociada a t — $\left(t(\vec{u})\right)_B = T_B(u)_B \qquad \left(t(\vec{v})\right)_B = T_B(v)_B$
- G_B matriz de **Gram** del **producto escalar** — $\vec{x} \cdot \vec{y} = (x)_B^t G_B (y)_B$

$t: U \rightarrow U$ **ortogonal** $\Leftrightarrow \quad t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad (T_B(u)_B)^t G_B T_B(v)_B = (u)_B^t\, G_B\, (v)_B$

$$\Leftrightarrow \quad (u)_B^t \boxed{T_B^t G_B T_B} (v)_B = (u)_B^t \boxed{G_B} (v)_B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_B^t G_B T_B = G_B}$$

Si B es una **base ortonormal** de $U \quad \Leftrightarrow \quad G_B = Id$

$$T_B^t G_B T_B = G_B \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{T_B^t T_B = Id}$$

Propiedades (II).

Definición. Una transformación ortogonal de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$\boxed{t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda transformación ortogonal $t: U \to U$ de U es una aplicación lineal.

2. $t: U \to U$ lineal es ortogonal $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base ortonormal**

3. Toda transformación ortogonal $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\boxed{\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|}$

$$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Prueba:

$$\|t(\vec{u})\|^2 = t(\vec{u}) \cdot t(\vec{u}) = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$$

$$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = arcos\left(\frac{t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v})}{\|t(\vec{u})\| \, \|t(\vec{v})\|}\right) = arcos\left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}\right) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

Propiedades (III).

Definición. Una transformación ortogonal de U es una aplicación $t\colon U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda transformación ortogonal $t\colon U \to U$ de U es una aplicación lineal.

2. $t\colon U \to U$ lineal es ortogonal $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base** ortonormal

3. Toda transformación ortogonal $t\colon U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$
$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

4. $t\colon U \to U$ lineal es ortogonal $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

$\boxed{\Rightarrow}$ **Inmediato.**

$\boxed{\Leftarrow}$

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$

$B' = t(B) = \{t(\vec{u}_1), t(\vec{u}_2), , \dots, t(\vec{u}_n)\}$

B y B' bases **ortonormales** $\Rightarrow$ $M_{BB'}$ ortogonal

$\Rightarrow M_{BB'}^t M_{BB'} = Id \Rightarrow T_B^t T_B = Id$

Matriz cuyas columnas son las coordenadas de la imagen de los vectores de la base B respecto de la base B

$$\boxed{T_B = T_{BB}} = \left((t(\vec{u}_1))_B \;\middle|\; (t(\vec{u}_2))_B \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; (t(\vec{u}_n))_B \right) = \boxed{M_{BB'}}$$

Matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de la base $B' = t(B)$ respecto de la base B

Propiedades (IV).

Definición. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es una **aplicación lineal**.

2. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base ortonormal**

3. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

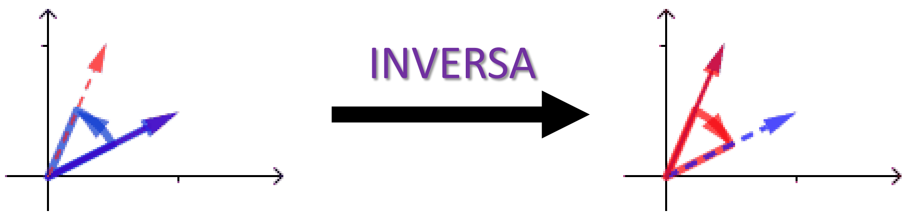
$$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

4. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

5. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es **biyectiva**, tiene **inversa** y su inversa es también **ortogonal**.

Ejemplo:

Giro de 40^o **Giro de -40^o**



Prueba:

$$T_B^t T_B = Id \Leftrightarrow T_B^{-1} = T_B^t \Leftrightarrow T_B \text{ inversible} \Leftrightarrow \begin{array}{l} t \text{ biyectiva} \\ t \text{ inversible} \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

$$T_B^{-t} T_B^{-1} = Id \Leftrightarrow t^{-1} \text{ ortogonal.}$$

Propiedades (V).

Definición. Una transformación ortogonal de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda transformación ortogonal $t: U \to U$ de U es una aplicación lineal.

2. $t: U \to U$ lineal es ortogonal $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base** ortonormal

3. Toda transformación ortogonal $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$

$$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$$

4. $t: U \to U$ lineal es ortogonal $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

5. Toda transformación ortogonal $t: U \to U$ de U es biyectiva, tiene inversa y su inversa es también ortogonal.

6. Si $t: U \to U$ es una transformación ortogonal entonces $det(T_B) = \pm 1$

Prueba:

Determinante del producto = Producto de determinantes

$det(G_B) \neq 0$

$$t: U \to U \text{ ortogonal} \Leftrightarrow T_B^t G_B T_B = G_B \Rightarrow det(T_B^t G_B T_B) = det(G_B) \Leftrightarrow det(T_B^t)\cancel{det(G_B)}det(T_B) = \cancel{det(G_B)}$$

$$\Leftrightarrow det(T_B^t)\,det(T_B) = 1 \Leftrightarrow det(T_B)\,det(T_B) = 1 \Leftrightarrow det(T_B)^2 = 1 \Leftrightarrow det(T_B) = \pm 1$$

$det(T_B^t) = det(T_B)$

Propiedades (VI).

Definición. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es una **aplicación lineal**.

2. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base ortonormal**

3. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, $\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

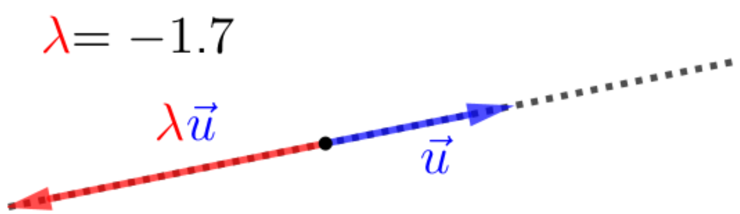
4. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

5. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es **biyectiva**, tiene **inversa** y su inversa es también **ortogonal**.

6. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** entonces $det(T_B) = \pm 1$

7. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** y $\lambda \in R$ es **autovalor** de t, entonces $\lambda = \boxed{?}$

Prueba:



λ **autovalor** de t $\Leftrightarrow$ $t(\vec{u}) = \lambda\vec{u}$ $\quad \vec{u} \neq \vec{0}$

$$\cancel{\|\vec{u}\|} = \|t(\vec{u})\| = \|\lambda\vec{u}\| = |\lambda|\cancel{\|\vec{u}\|} \Rightarrow 1 = |\lambda| \Rightarrow \lambda = \pm 1$$

Propiedades (VII).

Definición. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es una **aplicación lineal**.

2. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base ortonormal**

3. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$, $\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

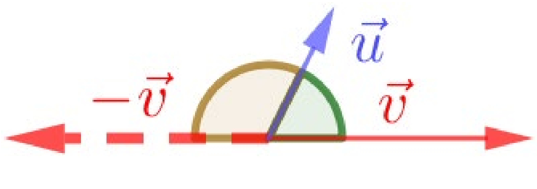
4. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

5. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es **biyectiva**, tiene **inversa** y su inversa es también **ortogonal**.

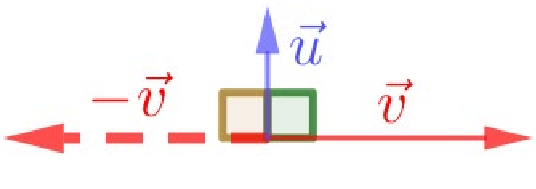
6. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** entonces $det(T_B) = \pm 1$

7. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** y $\lambda \in R$ es **autovalor** de t, entonces $\lambda = \pm 1$

8. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal, autovectores** asociados a **autovalores** **distintos** son **ortogonales.**



NO conserva ángulo



SI conserva ángulo

$$\boxed{t(\vec{u}) = \vec{u} \qquad t(\vec{v}) = -\vec{v}}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = -\vec{u} \cdot \vec{v} \;\Rightarrow\; 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \vec{u} \perp \vec{v}$$

Propiedades (VII).

<u>Definición</u>. Una **transformación ortogonal** de U es una aplicación $t: U \to U$ que conserva el **producto escalar**:

$$t(\vec{u}) \cdot t(\vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v} \qquad \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$$

1. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es una **aplicación lineal**.

2. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ $T_B^t G_B T_B = G_B$, B **base cualquiera** $\Leftrightarrow$ $T_B^t T_B = Id$, B **base ortonormal**

3. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U conserva **módulos** y **ángulos**: $\|t(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$
$\angle(t(\vec{u}), t(\vec{v})) = \angle(\vec{u}, \vec{v})$

4. $t: U \to U$ **lineal** es **ortogonal** $\Leftrightarrow$ Lleva **bases ortonormales** en **bases ortonormales**

5. Toda **transformación ortogonal** $t: U \to U$ de U es **biyectiva**, tiene **inversa** y su inversa es también **ortogonal**.

6. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** entonces $det(T_B) = \pm 1$

7. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal** y $\lambda \in R$ es **autovalor** de t, entonces $\lambda = \pm 1$

8. Si $t: U \to U$ es una **transformación ortogonal, autovectores** asociados a **autovalores <u>distintos</u>** son **ortogonales.**

9. Si $t: U \to U$ es **ortogonal** y **diagonalizable,** entonces existe una **base ortonormal de autovectores.**