

Álgebra Lineal II

TEMA IV- Cónicas y cuádricas.

Capítulo 1. Cónicas.

Introducción a las cónicas.

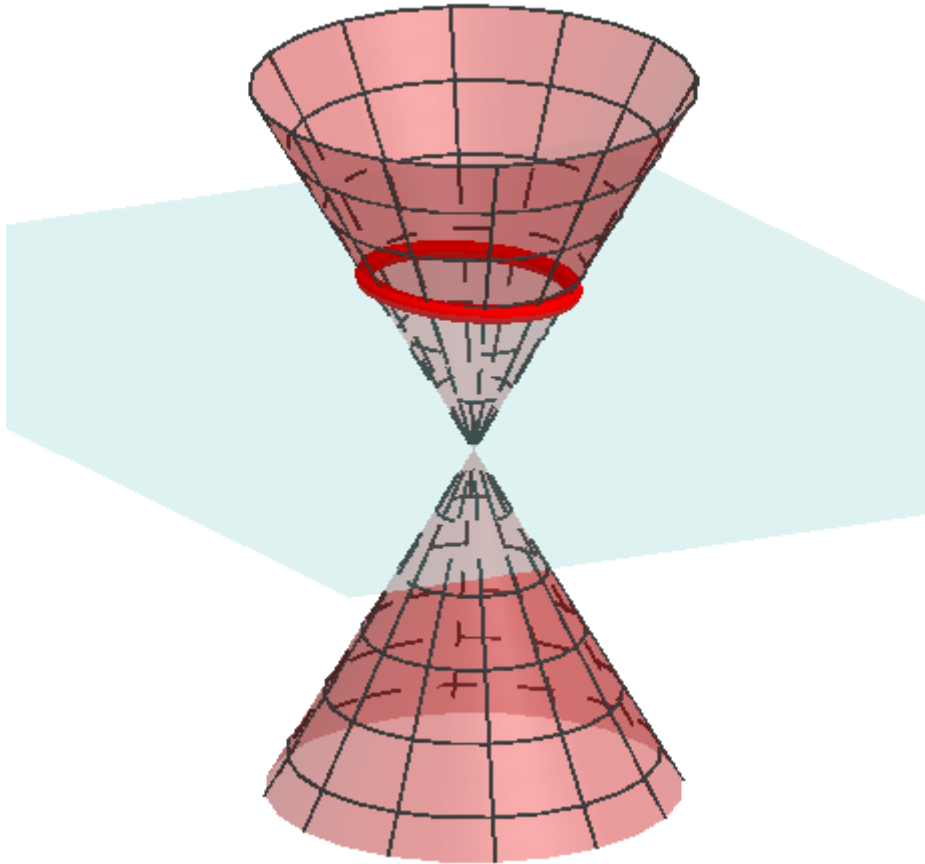
Luis Fuentes García (2022).



Definición clásica de cónica.

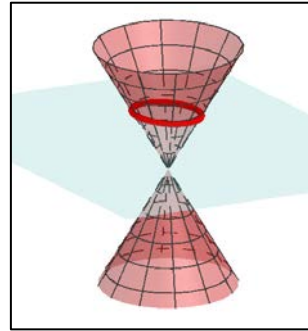
Definición clásica: Una **cónica** es la **curva** intersección de un **cono** y un **plano**.

$$\text{CÓNICA} = \text{CONO} \cap \text{PLANO}$$

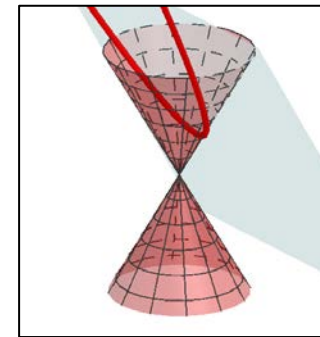


Dependiendo de la **posición del plano** varía el **tipo de cónica**.

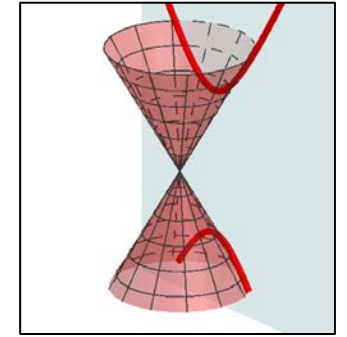
CÓNICAS NO DEGENERADAS



ELIPSE

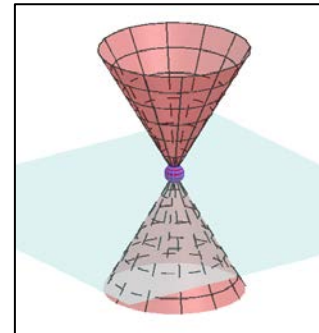


PARÁBOLA

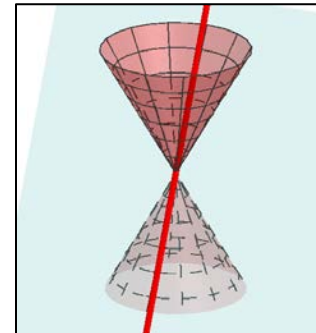


HIPÉRBOLA

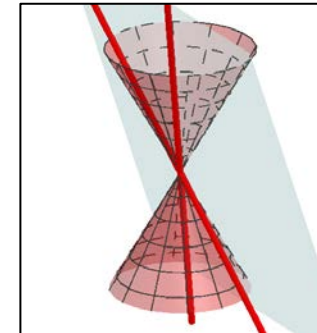
CÓNICAS DEGENERADAS



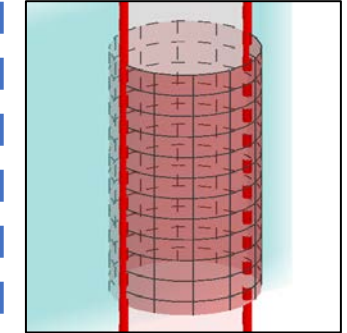
PUNTO



RECTAS
DOBLE



RECTAS
SECANTES



RECTAS
PARALELAS

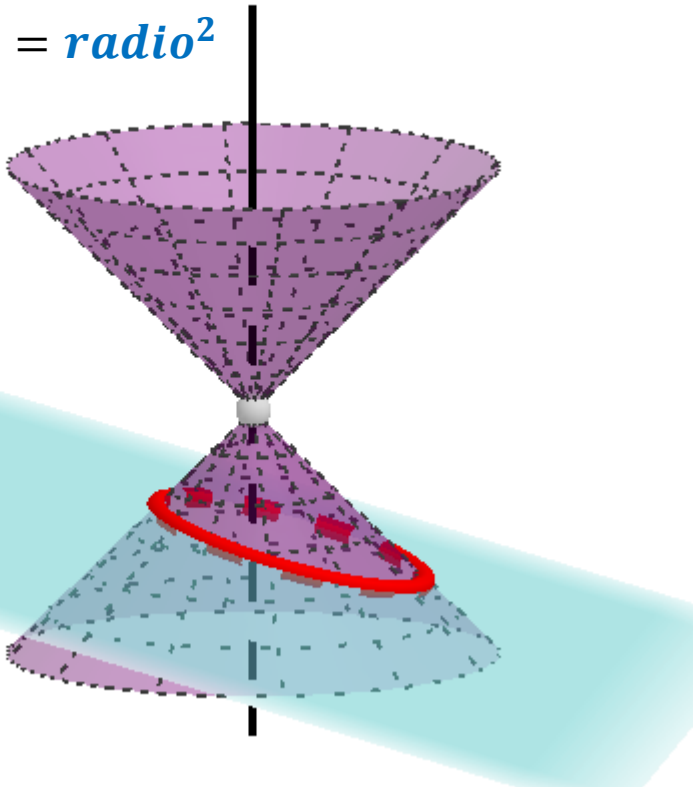


Definición algebraica de cónica.

Definición clásica: Una **cónica** es la **curva** intersección de un **cono** y un **plano**.

$$\text{CÓNICA} = \text{CONO} \cap \text{PLANO}$$

$$x^2 + y^2 = \text{radio}^2$$



Ecuación de un **cono**: $x^2 + y^2 = z^2$

Ecuación de un **plano**: $ax + by + cz + d = 0$

Despejando en la ecuación del **plano**:

$$z = \frac{(-ax - by - d)}{c}$$

Intersecar.



Resolver el sistema

Sustituyendo en en el **cono**:

$$x^2 + y^2 = \frac{(-ax - by - d)^2}{c^2}$$

Operando:

$$c^2x^2 + c^2y^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + d^2 + 2abxy + 2adx + 2bdy$$

$$\underbrace{(a^2 - c^2)x^2 + (b^2 - c^2)y^2 + 2abxy}_{\text{grado 2}} + \underbrace{2adx + 2bdy}_{\text{grado 1}} + \underbrace{d^2}_{\text{grado 0}} = 0$$

Definición algebraica: Una **cónica** es una **curva plana** definida por una **ecuación** implícita de **grado 2**



Matrices asociadas a una cónica.

Cónica = Curva plana definida por una **ecuación** de **grado 2**

$$(a_{11}, a_{12}, a_{22}) \neq (0, 0, 0)$$

$$\overbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy}^{\text{grado 2}} + \overbrace{2a_{13}x + 2a_{23}y}^{\text{grado 1}} + \overbrace{a_{33}}^{\text{grado 0}} = 0$$

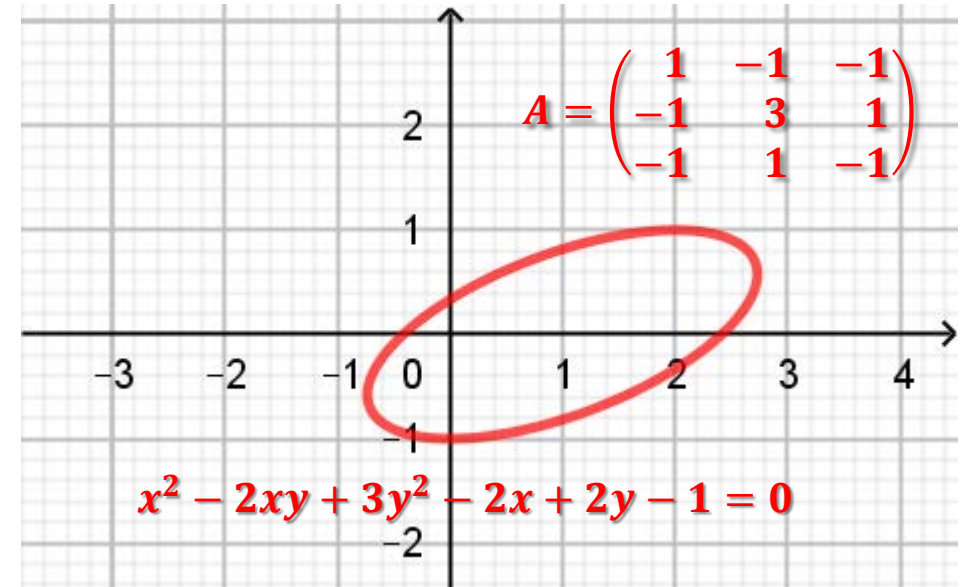
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ 1 \end{matrix}$$

$x \quad y \quad 1$

Matriz asociada a la cónica.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Matriz de términos cuadráticos



Ecuación matricial (I):

$$(x \ y \ 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Notación abreviada:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t A X = 0$$

Ecuación matricial (II):

$$(x \ y)T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13} \ a_{23}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

grado 2

grado 1

grado 0



Comportamiento asintótico y puntos del infinito.

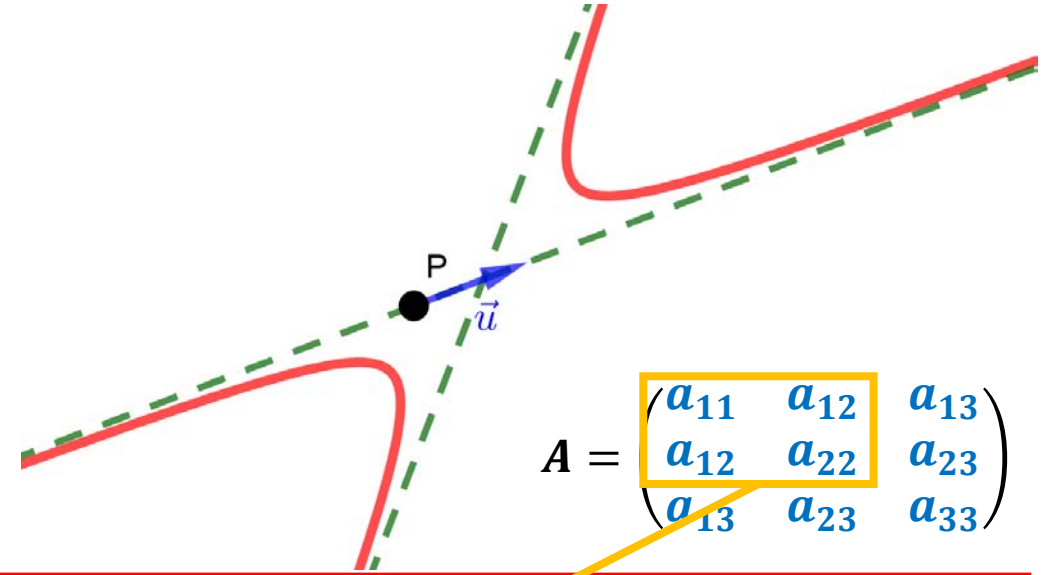
Cónica $(x \ y \ 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

Recta $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{a}, \mathbf{b}) + t(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \mathbf{p} \\ \mathbf{q} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

$$((a \quad b \quad 1) + t(p \quad q \quad 0))A \left(\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0$$

dividendo por t^2

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} (a \quad b \quad 1) + (p \quad q \quad 0) \right) A \left(\frac{1}{t} \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ q \\ 0 \end{pmatrix} \right) = 0 \Leftrightarrow$$



$$(p \quad q \quad \mathbf{0}) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \mathbf{0} \iff (p \quad q) T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

(p, q) dirección o punto del infinito de la **cónica**

Resumen:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Punto usual.

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ Dirección, vector o punto del INFINITO.

Asíntota = Tangente en **punto dirección** del infinito.



Ejemplo.

Cónica: $x^2 - 4xy + 3y^2 - 2x - y - 5 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{-2} & -1 \\ \boxed{-2} & \boxed{3} & -1/2 \\ -1 & -1/2 & -5 \end{pmatrix} \rightarrow T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz asociada. Matriz términos cuadráticos

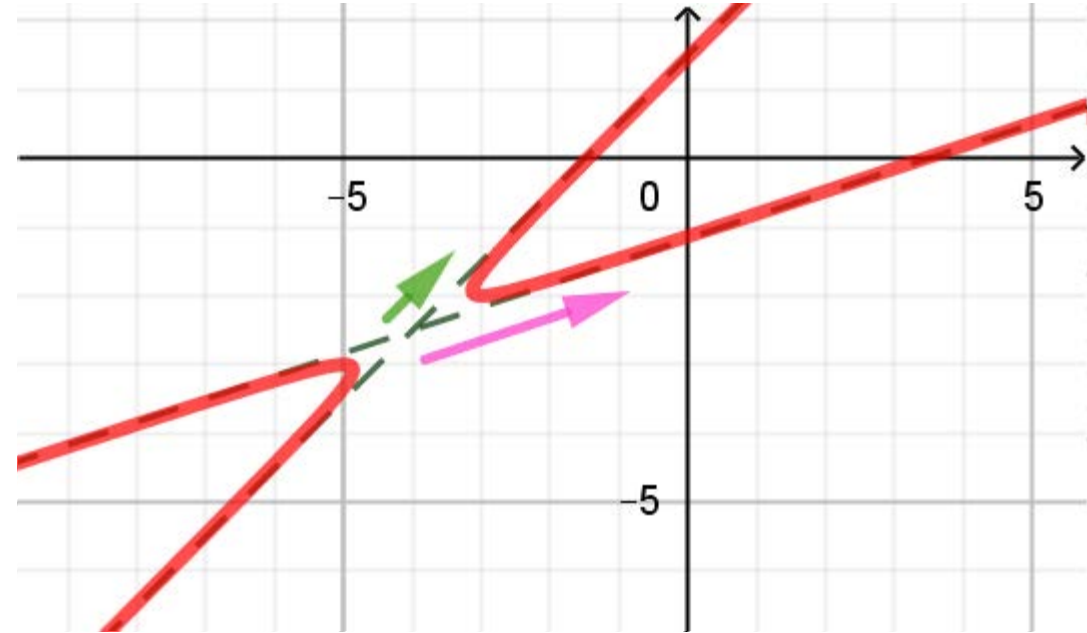
Ecuación Matricial (I):

$$(x \ y \ \textcircled{1}) \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & -1/2 \\ -1 & -1/2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ \textcircled{1} \end{pmatrix} = 0$$

Ecuación Matricial (II):

$$(x \ y) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(-1 \ -1/2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - 5 = 0$$

grado 2 grado 1 grado 0



Comportamiento asintótico:

$$(p, q) \text{ dirección asintótica} \Leftrightarrow (p \ q \ \textcircled{0}) A \begin{pmatrix} p \\ q \\ \textcircled{0} \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (p \ q) T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (p \ q) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0$$

p en función de q

$$p^2 - 4pq + 3q^2 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{4q \pm \sqrt{16q^2 - 12q^2}}{2} = \begin{cases} p = 3q \\ p = q \end{cases} \xrightarrow{q=1} \begin{cases} (p, q) = (3, 1) \\ (p, q) = (1, 1) \end{cases}$$

