

Contenidos

I Aplicaciones bilineales y tensores homogéneos. 1

1. Aplicaciones bilineales y formas cuadráticas. 1

1 Aplicaciones bilineales. 1

1.1 Expresión matricial de una forma bilineal. 1

1.2 Cambio de base de la matriz asociada a una forma bilineal. 1

2 Formas bilineales sobre un solo espacio vectorial. 2

2.1 Expresión matricial y cambio de base. 2

2.2 Espacio vectorial de formas bilineales en U 2

2.3 Formas bilineales simétricas y hemisimétricas. 2

3 Formas cuadráticas. 3

3.1 Definición. 3

3.2 Expresión matricial y cambio de base. 3

3.3 Conjugación. 4

3.3.1 Vectores conjugados. 4

3.3.2 Subespacios conjugados. 4

3.3.3 Núcleo de una forma cuadrática. 4

3.3.4 Formas cuadráticas ordinarias y degeneradas. 5

3.4 Diagonalización de una forma cuadrática. 5

4 Formas cuadráticas reales. 5

4.1 Expresión canónica de una forma cuadrática. 5

4.2 Clasificación de formas cuadráticas. 6

2. Dualidad y tensores homogéneos. 8

1 Dualidad. 8

1.1 Espacio vectorial dual. 8

1.2 Bases duales. 8

1.3 Cambio de base. 8

2 Producto tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita. 8

2.1 Producto tensorial de dos espacios vectoriales. 8

2.2 Producto tensorial de un número finito de espacios vectoriales. 9

3 Potencia tensorial de espacios vectoriales de dimensión finita. 9

4 Tensor homogéneo. 10

4.1 Definición. 10

4.2 Cambio de base. 10

5 Operaciones con tensores homogéneos. 11

5.1 Suma de tensores y producto por un escalar. 11

5.2 Producto tensorial. 11

5.3 Contracción tensorial. 11

5.4 Producto contraído. 11

6 Simetría y hemisimetría. 11

II Espacios vectoriales euclídeos. 12

1. Introducción a los espacios euclídeos. 12

1 Producto escalar. 12

1.1 Definición. 12

1.2 Matriz de Gram de un producto escalar. 12

2 Norma de un vector. 12

3 Ángulo entre dos vectores. 13

2. Ortogonalidad.	14	4 Orientación relativa de las bases.	20
1 Vectores ortogonales.	14	5 Transformaciones ortogonales directas o inversas.	21
2 Sistemas ortogonales.	14	6 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2.	21
2.1 Definición	14	6.1 Giros en \mathbb{R}^2	21
2.2 Bases ortogonales.	14	6.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro de ángulo dado en una base cualquiera.	21
2.3 Método de ortogonalización de Gram-Schmidt.	14	6.2 Simetrías en \mathbb{R}^2	22
2.4 Teorema de la base ortogonal incompleta.	15	6.2.1 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.	22
3 Singularidades de las bases ortonormales.	15	6.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2	22
3.1 Matriz de Gram en una base ortonormal.	15	7 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3.	23
3.2 Expresión del producto escalar en una base ortonormal.	15	7.1 Giros en \mathbb{R}^3	23
3.3 Coordenadas covariantes respecto a una base ortonormal.	16	7.1.1 Procedimiento para hallar la matriz de un giro en \mathbb{R}^3 en una base cualquiera.	23
3.4 Relación entre bases ortonormales.	16	7.2 Simetrías en \mathbb{R}^3	24
4 Proyección ortogonal.	16	7.2.1 Simetrías respecto al origen.	24
4.1 Subespacios ortogonales.	16	7.2.2 Simetría respecto a una recta.	24
4.2 Subespacio suplementario ortogonal.	16	7.2.3 Simetría respecto a un plano.	24
4.3 Aplicación proyección ortogonal.	17	7.2.4 Procedimiento para hallar la matriz de una simetría en una base cualquiera.	24
5 Endomorfismos simétricos.	17	7.3 Clasificación de transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3	25
5.1 Definición.	17	7.4 Método alternativo de clasificación transformaciones ortogonales.	26
5.2 Autovalores y autovectores de un endomorfismo simétrico.	17	7.4.1 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^2	26
5.3 Base ortonormal de autovectores.	18	7.4.2 Transformaciones ortogonales en \mathbb{R}^3	27
3. Transformaciones ortogonales.	19	4. Producto vectorial y producto mixto.	28
1 Definición.	19	1 Producto vectorial.	28
2 Propiedades.	19	1.1 Definición.	28
3 Autovalores y autovectores.	20	1.2 Expresión analítica.	28

1.3	Propiedades.	28
1.4	Interpretación geométrica.	28
2	Producto mixto	28
III Geometría afín.		30
1.	El espacio afín.	30
1	Definición y propiedades.	30
2	Sistema cartesiano de referencia y coordenadas cartesianas.	30
2.1	Cambio de sistema de referencia.	30
3	Variedades afines.	31
3.1	Variedades afines en el plano afín E_2	31
3.2	Variedades afines en el espacio afín E_3	32
4	Haces de variedades afines.	32
4.1	Haces de rectas en E_2	32
4.2	Haces de planos en E_3	33
5	Ángulos.	33
5.1	Ángulo entre dos rectas.	33
5.2	Ángulo entre dos planos.	33
5.3	Ángulo entre recta y plano.	33
6	Distancias.	34
6.1	Distancia entre dos puntos.	34
6.2	Distancia de un punto a una variedad afín.	34
6.2.1	Distancia de un punto a una recta en E_2	34
6.2.2	Distancia de un punto a una recta en E_3	34
6.2.3	Distancia de un punto a un plano en E_3	35

6.3	Distancia entre dos variedades afines.	35
6.3.1	Distancia entre dos rectas paralelas.	35
6.3.2	Distancia entre dos planos paralelos de E_3	35
6.3.3	Distancia entre un plano y una recta paralela de E_3	35
6.3.4	Distancia entre dos rectas que se cruzan en E_3	35
7	Transformaciones afines.	36
7.1	Traslaciones.	36
7.2	Homotecias.	36
7.3	Transformaciones afines asociadas a transformaciones ortogonales: isometrías.	37
2.	El espacio afín ampliado.	38
1	Introducción.	38
1.1	Coordenadas homogéneas y espacio afín ampliado.	38
1.2	Puntos impropios o puntos del infinito.	38
1.2.1	Motivación: porqué los puntos con coordenada $t = 0$ representan puntos del infinito.	38
1.2.2	Definición de puntos impropios o del infinito.	39
1.3	Cambio de sistema de referencia en coordenadas homogéneas.	39
1.4	Ecuaciones cartesianas de variedades afines en coordenadas homogéneas.	39
1.4.1	Rectas en \bar{E}_2	39
1.4.2	Planos en \bar{E}_3	40
1.4.3	Rectas en \bar{E}_3	40
1.5	Ecuaciones paramétricas de variedades afines en coordenadas homogéneas.	40
1.5.1	Rectas en \bar{E}_2	40
1.5.2	Rectas en \bar{E}_3	40
1.5.3	Planos en \bar{E}_3	40
IV Cónicas y Cuádricas.		42

1. Cónicas.	42	8 Haces de cónicas	50
1 Definición y ecuaciones.	42	9 Apéndice: secciones planas de un cono.	52
2 Intersección de una recta y una cónica.	42	2. Cuádricas.	53
3 Polaridad.	43	1 Definición y ecuaciones.	53
4 Puntos y rectas notables asociados a una cónica.	43	2 Intersección de una recta y una cuádrica.	53
4.1 Puntos singulares.	43	3 Polaridad.	54
4.2 Centro.	44	4 Cambio de sistema de referencia.	54
4.3 Direcciones asintóticas y asíntotas.	44	5 Clasificación de cuádricas y ecuación reducida.	55
4.4 Diámetros.	44	5.1 Paso I: Reducción de términos cuadráticos (el giro).	55
4.5 Ejes.	45	5.2 Paso II: Reducción de términos lineales (la traslación).	55
4.6 Vértices.	45	5.3 Clasificación en función de las signaturas de T y A	58
4.7 Focos, directrices y excentricidad.	45	5.4 Obtención de los planos que forman las cuádricas de rango 1 ó 2.	59
5 Descripción de las cónicas no degeneradas.	45	6 Puntos, rectas y planos notables asociados a una cuádrica.	59
5.1 La elipse real.	45	6.1 Puntos singulares.	59
5.1.1 La elipse como lugar geométrico.	46	6.2 Centro.	59
5.2 La hipérbola.	46	6.3 Direcciones asintóticas.	60
5.2.1 La hipérbola como lugar geométrico.	47	6.4 Planos diametrales y diámetros.	60
5.3 La parábola.	47	6.5 Planos principales, ejes y vértices.	60
5.3.1 La parábola como lugar geométrico.	47	7 Descripción de las cuádricas reales de rango 3 y 4.	61
6 Cambio de sistema de referencia.	47	7.1 Cuádricas reales de rango 4.	61
7 Clasificación de cónicas y ecuación reducida.	48	7.1.1 Elipsoide real.	61
7.1 Paso I: Reducción de términos cuadráticos (el giro).	48	7.1.2 Hiperboloide de una hoja.	61
7.2 Paso II: Reducción de términos lineales (la traslación).	49	7.1.3 Hiperboloide de dos hojas.	62
7.3 Clasificación y ecuación reducida en función de $ T $ y $ A $	50	7.1.4 Paraboloides elíptico.	62
7.4 Clasificación mediante diagonalización por congruencia.	50	7.1.5 Paraboloides hiperbólico.	63
7.5 Obtención de las rectas que forman las cónicas degeneradas.	50		

7.2	Cuádricas reales de rango 3.	63
7.2.1	Cono real.	63
7.2.2	Cilindro elíptico real.	63
7.2.3	Cilindro hiperbólico.	64
7.2.4	Cilindro parabólico.	64
8	Formas reducidas de las cuádricas.	66
	Glosario.	68