Álgebra Lineal II

TEMA III- Espacios afines.

Capítulo 1. El espacio afín.

Haces de rectas y planos.

Luis Fuentes García (2022).

Haces de objetos geométricos.

E espacio euclídeo. $\begin{cases} \pi_1 \equiv f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \\ \pi_2 \equiv f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$

Haz generado por π_1 y π_2:

$$\alpha \cdot f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \beta \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

$\alpha = 0$

Si $\alpha \neq 0$ dividiendo por α

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \frac{\beta}{\alpha} \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + \lambda \cdot f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$\cup$$
$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

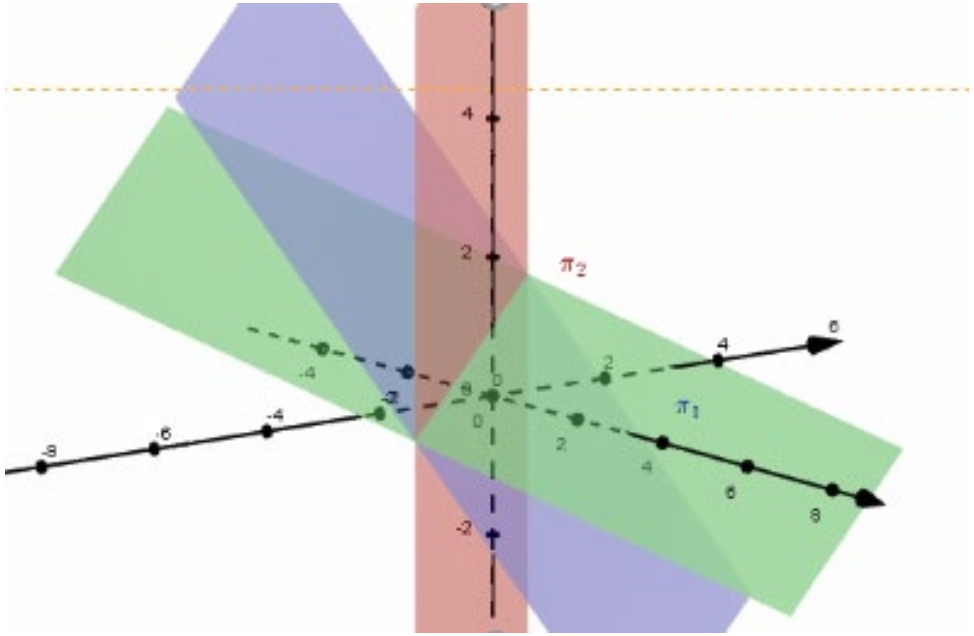
Los **objetos del haz** heredan **propiedades comunes** a los **generadores**:

- Pasar por un punto.
- Direcciones de paralelismo.
- Asíntotas, tangentes, puntos singulares,…

EJEMPLO: en $\mathbb{R}^3$. $\begin{cases} \pi_1 \equiv x + y + z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv x + y = 0 \end{cases}$

Haz generado por π_1 y π_2:

$$\alpha \cdot (x + y + z - 1) + \beta \cdot (x + y) = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$



$$x + y + z - 1 + \lambda \cdot (x + y) = 0, \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

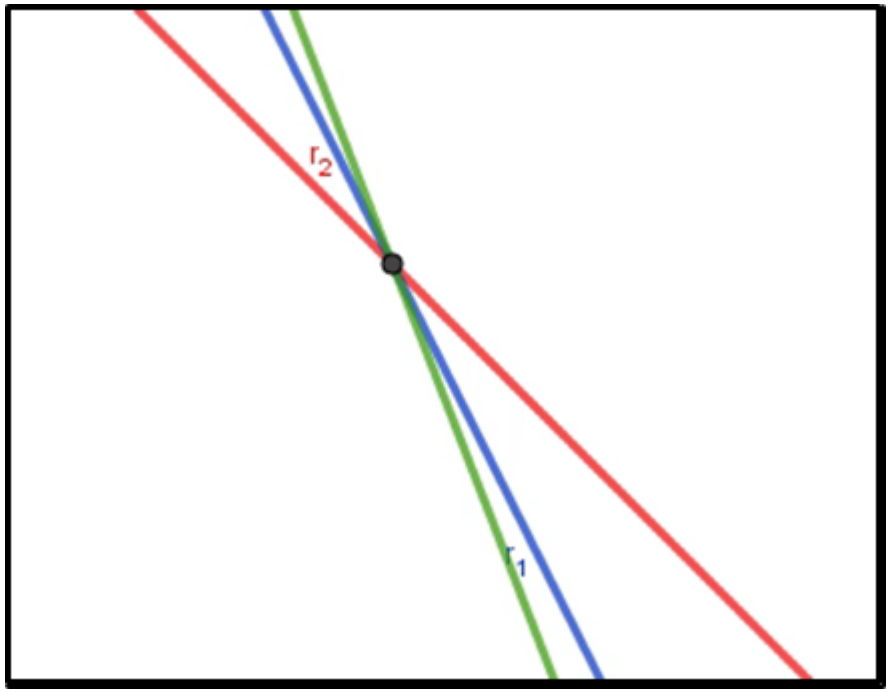
Haz de rectas en el plano.

Haz de rectas en $\mathbb{R}^2$. $\begin{cases} r_1 \equiv ax + by + c = 0 \\ r_2 \equiv a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$

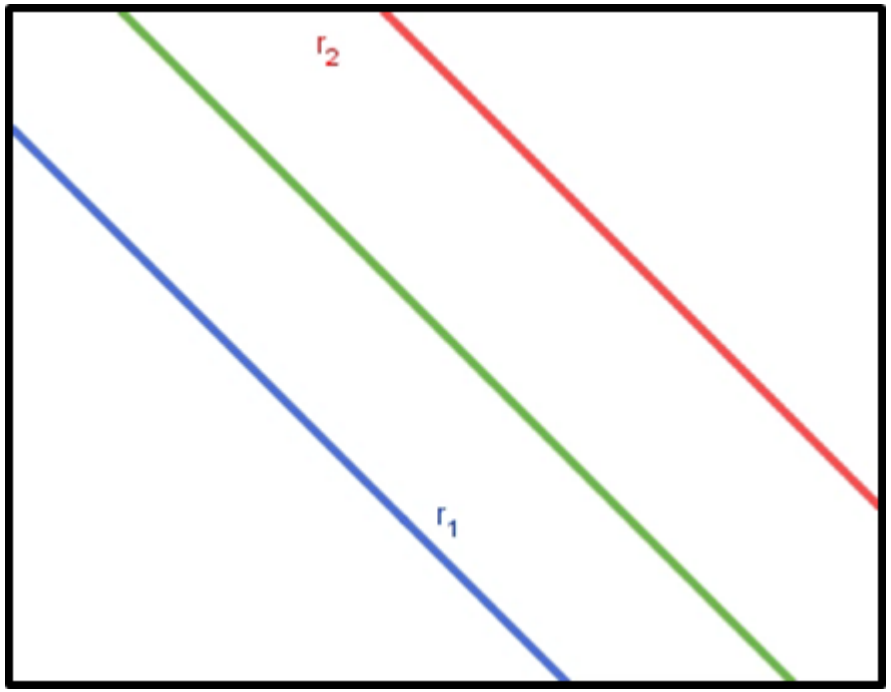
$$\alpha(ax + by + c) + \beta(a'x + b'y + c') = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

$$ax + by + c + \lambda(a'x + b'y + c') = 0,\ \lambda \in \mathbb{R}$$
$$a'x + b'y + c' = 0$$

Haz de rectas por un punto.



Haz de rectas parelelas.



Haz de planos en el espacio.

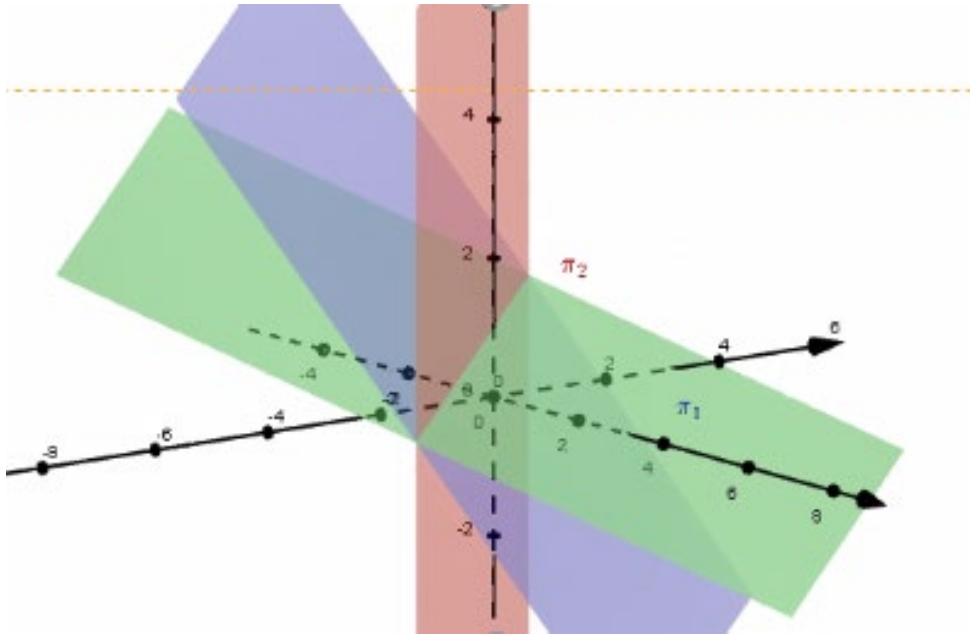
Haz de planos en $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} \pi_1 \equiv ax + by + cz + d = 0 \\ \pi_2 \equiv a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$$

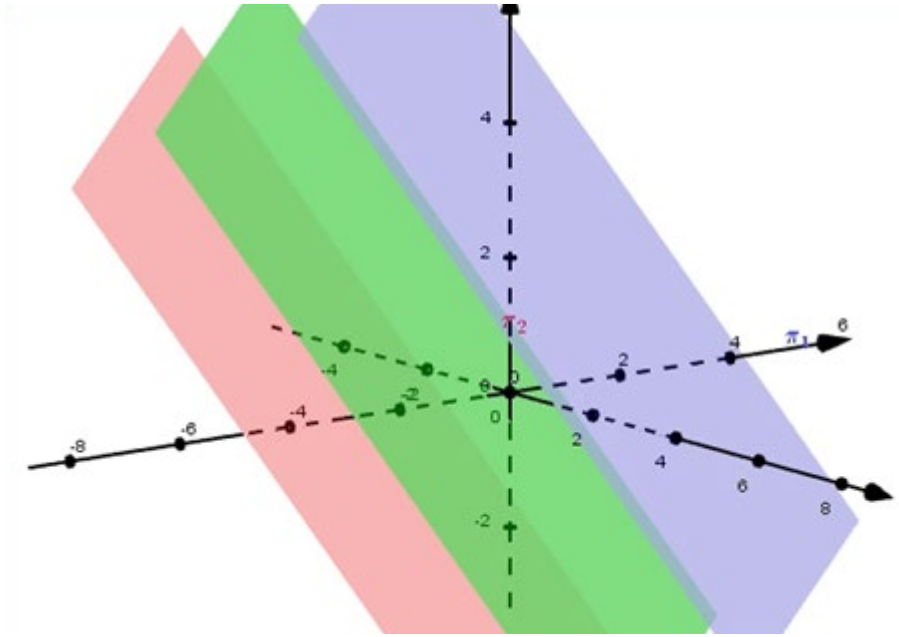
$$\alpha(ax + bx + cz + d) + \beta(a'x + b'y + c'z + d') = 0$$
$$\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \qquad (\alpha, \beta) \neq (0, 0)$$

$$ax + by + cz + d + \lambda(a'x + b'y + c'z + d') = 0, \lambda \in \mathbb{R}$$
$$a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

Haz de planos por una recta común.



Haz de planos paralelos.



Haz de planos en el espacio. Ejemplo I.

En $\mathbb{R}^3$ dar la ecuación del plano que pasa por $P=(1,1,1)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 & \pi_1 \\ x+y=0 & \pi_2 \end{cases}$

Haz de planos que contiene a al recta r;

Versión de UN parámetro:

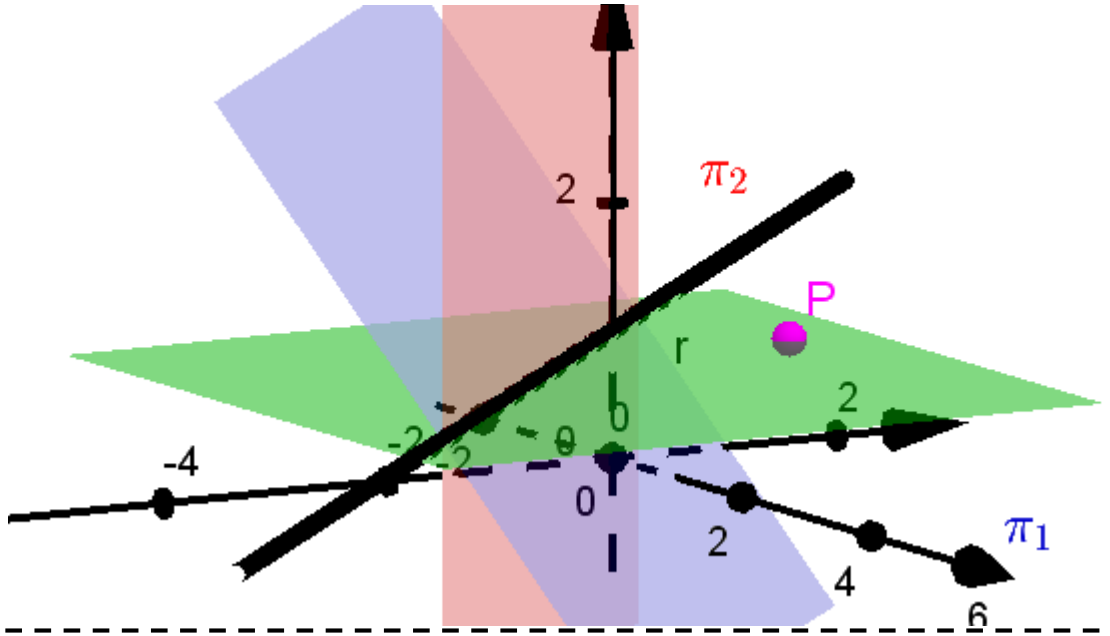
$$x+y+z-1+\lambda\cdot(x+y)=0, \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

Imponemos que pase por $P=(1,1,1)$

$1+1+1-1+\lambda\cdot(1+1)=0 \Rightarrow 2+2\lambda=0 \Rightarrow$ $\boxed{\lambda=-1}$

$x+y+z-1+(-1)\cdot(x+y)=0$

$$\boxed{z-1=0}$$



Versión de DOS parámetros:

$$\alpha\cdot(x+y+z-1)+\beta\cdot(x+y)=0$$
$$\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Imponemos que pase por $P=(1,1,1)$

$\alpha\cdot(1+1+1-1)+\beta\cdot(1+1)=0 \Rightarrow$ $\boxed{\beta=-\alpha}$

$\alpha\cdot(x+y+z-1)-\alpha\cdot(x+y)=0$

dividiendo por α

$x+y+z-1+(-1)\cdot(x+y)=0$

$$\boxed{z-1=0}$$

Haz de planos en el espacio. Ejemplo II.

En $\mathbb{R}^3$ dar la ecuación del plano que pasa por $P=(1,-1,0)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+z-1=0 & \pi_1 \\ x+y=0 & \pi_2 \end{cases}$

Haz de planos que contiene a al recta r;

Versión de UN parámetro:

$$x+y+z-1+\lambda\cdot(x+y)=0, \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

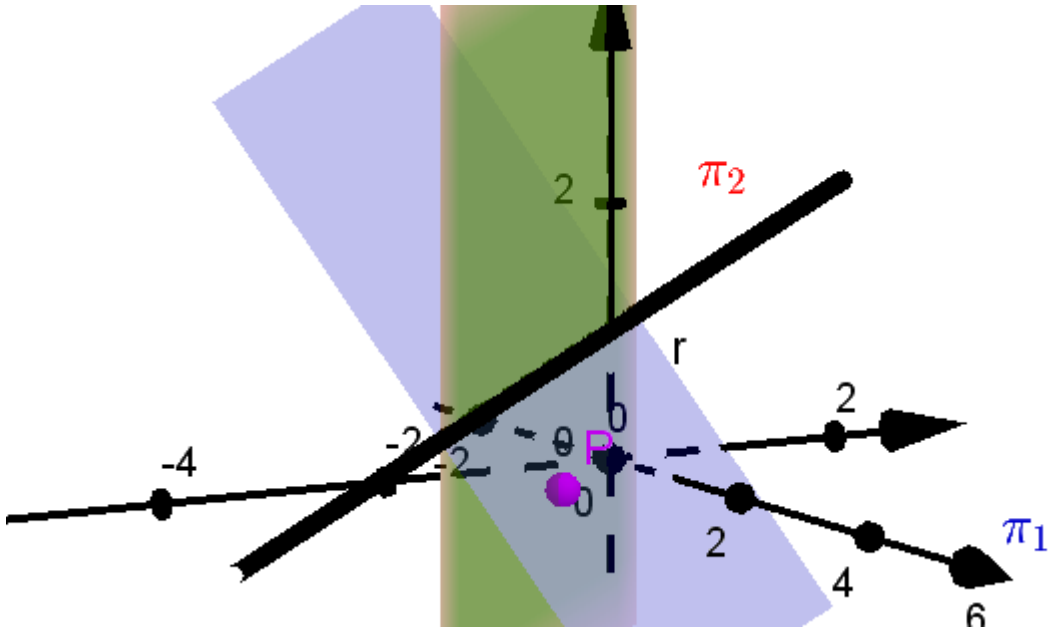
Imponemos que pase por $P=(1,-1,0)$

$1-1+0-1+\lambda\cdot(1-1)=0 \Rightarrow -1=0$ **¡IMPOSIBLE!**

¿**No hay solución**?

$$x+y=0$$

Pasa por $P=(1,-1,0)$, ya que $1-1=0$



Versión de DOS parámetros:

$$\alpha\cdot(x+y+z-1)+\beta\cdot(x+y)=0$$
$$\alpha,\beta\in\mathbb{R}, \qquad (\alpha,\beta)\neq(0,0)$$

Imponemos que pase por $P=(1,-1,0)$

$\alpha\cdot(1-1+0-1)+\beta\cdot(1-1)=0 \Rightarrow \boxed{\alpha=0}$

$\beta\cdot(x+y)=0$

dividiendo por β

$$x+y=0$$