

Álgebra Lineal II

TEMA I- Aplicaciones bilineales.

Capítulo 1. Formas bilineales y formas cuadráticas.

Formas cuadráticas.

Luis Fuentes García (2022).



Formas cuadráticas (I): Motivación.

Motivación:

Producto escalar: nos sirve para medir ángulos y distancias (“hacer” geometría).

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ (dos vectores se transforma en un número)



$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$f(\vec{u}, \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{v}$ **f forma bilineal**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$



$f(\vec{u}, \vec{v}) = f(\vec{v}, \vec{u})$

f simétrica

Norma o módulo: $\|\vec{u}\| = +\sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$



$\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

~~$\omega(\vec{u}) = +\sqrt{f(\vec{u}, \vec{u})}$~~

$$\|(3, 4)\| = +\sqrt{(3, 4) \cdot (3, 4)} = +\sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

Ejemplo: $f((x, y), (x', y')) = xx' + xy' + yx'$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x' & y' \\ x & y \end{matrix} \quad \text{simétrica}$$

$\omega: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$$

Forma cuadrática asociada a f

Inspiradas en el **módulo al cuadrado** de un vector.

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

$$\omega(1, -1) = +\sqrt{f((1, -1), (1, -1))} = +\sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = +\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = +\sqrt{-1}$$

¡NO EXISTE!



Formas cuadráticas (II): Definiciones equivalentes.

Definición I. Dado un **e.v.** U y una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \rightarrow R$ se llama **forma cuadrática asociada a f** a la aplicación $\omega: U \rightarrow R$ definida como $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$.

Definición II. Dado un **e.v.** U , una aplicación $\omega: U \rightarrow R$ es una **forma cuadrática** si cumple:

- i) $\omega(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 \omega(\vec{u})$ para cualesquiera $\vec{u} \in U, \lambda \in R$.
- ii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$ es una **forma bilineal simétrica**.

Son definiciones equivalentes:

Definición I $\Rightarrow$ Definición II.

Linealidad en la 1ª componente

Linealidad en la 2ª componente

$$\text{i) } \omega(\lambda \vec{u}) = f(\lambda \vec{u}, \lambda \vec{u}) = \lambda \cdot f(\vec{u}, \lambda \vec{u}) = \lambda^2 \cdot f(\vec{u}, \vec{u}) = \lambda^2 \omega(\vec{u})$$

Linealidad en la 1ª componente

$$\begin{aligned} \text{ii) } \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v})) &= \frac{1}{2} (f(\vec{u} + \vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) - f(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{v}, \vec{v})) = \\ &= \frac{1}{2} (f(\vec{u}, \vec{u} + \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u} + \vec{v}) - f(\vec{u}, \vec{u}) - f(\vec{v}, \vec{v})) = \\ &= \frac{1}{2} (\cancel{f(\vec{u}, \vec{u})} + f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u}) + \cancel{f(\vec{v}, \vec{v})} - \cancel{f(\vec{u}, \vec{u})} - \cancel{f(\vec{v}, \vec{v})}) = \frac{1}{2} (f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{v}, \vec{u})) = \\ &= \frac{1}{2} (f(\vec{u}, \vec{v}) + f(\vec{u}, \vec{v})) = \frac{1}{2} (2f(\vec{u}, \vec{v})) = f(\vec{u}, \vec{v}) \end{aligned}$$

Linealidad en la 2ª componente

Simetría



Formas cuadráticas (II): Definiciones equivalentes.

Definición I. Dado un **e.v. U** y una **forma bilineal simétrica $f: U \times U \rightarrow R$** se llama **forma cuadrática asociada a f** a la aplicación **$\omega: U \rightarrow R$** definida como **$\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$** .

Definición II. Dado un **e.v. U** , una aplicación **$\omega: U \rightarrow R$** es una **forma cuadrática** si cumple:

- i) **$\omega(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 \omega(\vec{u})$** para cualesquiera **$\vec{u} \in U, \lambda \in R$** .
- ii) **$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$** es una **forma bilineal simétrica**.

Son definiciones equivalentes:

Definición II $\Rightarrow$ Definición I.

$$f(\vec{u}, \vec{u}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{u}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{u})) = \frac{1}{2} (\omega(2\vec{u}) - 2\omega(\vec{u})) = \frac{1}{2} (2^2 \omega(\vec{u}) - 2\omega(\vec{u})) = \frac{1}{2} (2\omega(\vec{u}))$$

IDEA ESENCIAL: **Formas cuadráticas** y **formas bilineales simétricas** son conceptos “**hermanos**”, **equivalentes**.

- Dada una **forma bilineal simétrica f** , inmediatamente tenemos una **forma cuadrática asociada $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$**
- Dada una **forma cuadrática ω** , inmediatamente tenemos una forma **forma bilineal simétrica asociada:**

$$f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$$

f se llama **forma polar asociada a ω**



Formas cuadráticas (II): Definiciones equivalentes.

Definición I. Dado un **e.v. U** y una **forma bilineal simétrica** $f: U \times U \rightarrow R$ se llama **forma cuadrática asociada a f** a la aplicación $\omega: U \rightarrow R$ definida como $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$.

Definición II. Dado un **e.v. U** , una aplicación $\omega: U \rightarrow R$ es una **forma cuadrática** si cumple:

- i) $\omega(\lambda \vec{u}) = \lambda^2 \omega(\vec{u})$ para cualesquiera $\vec{u} \in U, \lambda \in R$.
- ii) $f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$ es una **forma bilineal simétrica**.

Interpretación geométrica de: $f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$ $\left\{ \begin{array}{l} f \text{ forma bilineal simétrica} \Leftrightarrow \text{producto escalar} \\ \omega \text{ forma cuadrática} \Leftrightarrow \text{módulo al cuadrado} \end{array} \right.$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

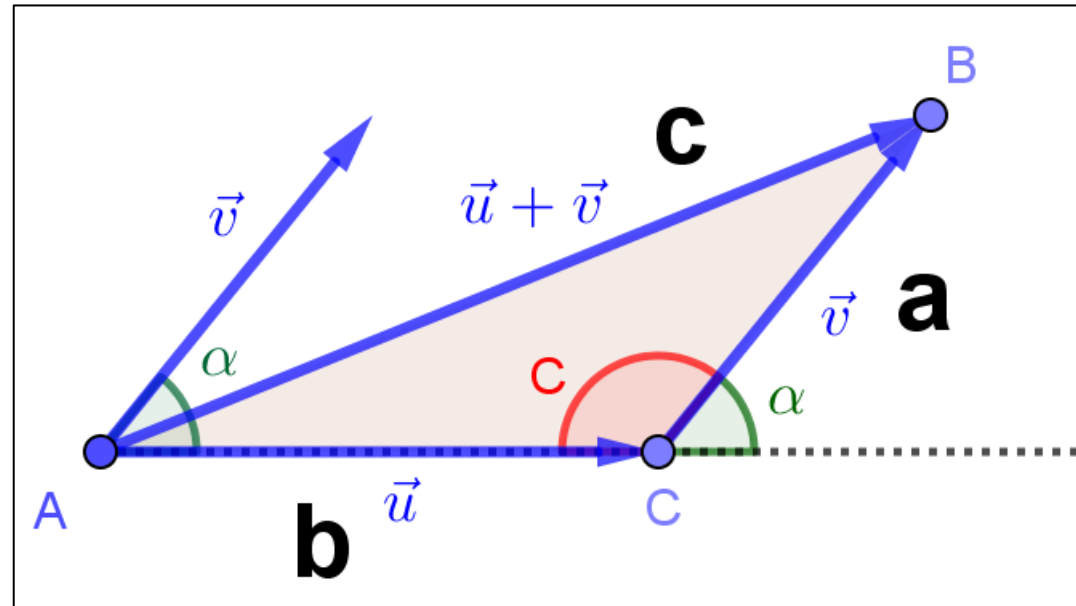
$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha) = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2bacos(C)$$

TEOREMA DEL COSENO



Formas cuadráticas (III): Matriz asociada.

$\omega: U \rightarrow R$ **forma cuadrática** $\iff$ $f: U \times U \rightarrow R$ **forma bilineal simétrica (forma polar)** $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$

La **matriz asociada** a la **forma cuadrática** ω es la matriz asociada a su **forma polar** f (forma bilineal simétrica).

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

$$\omega(\vec{x}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

F_B **simétrica**

Ejemplo I:

$$f((x, y), (x', y')) = xx' + 3xy' + 3yx' - 2yy'$$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \text{simétrica}$$

$$\omega((x, y)) = f((x, y), (x, y)) = x \cdot x + 3xy + 3yx - 2y \cdot y = x^2 + 6xy - 2y^2$$

$$\omega((x, y)) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo II:

$$\omega((x, y)) = x^2 + 6xy - 2y^2$$

Por definición: $f(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{1}{2} (\omega(\vec{u} + \vec{v}) - \omega(\vec{u}) - \omega(\vec{v}))$

$$\begin{aligned} f((x, y), (x', y')) &= \frac{1}{2} (\omega((x, y) + (x', y')) - \omega(x, y) - \omega(x', y')) = \frac{1}{2} (\omega((x + x', y + y')) - \omega(x, y) - \omega(x', y')) = \\ &= \frac{1}{2} ((x + x')^2 + 6(x + x')(y + y') - 2(y + y')^2 - (x^2 + 6xy - 2y^2) - (x'^2 + 6x'y' - 2y'^2)) = \dots = \\ &= xx' + 3xy' + 3yx' - 2yy' \end{aligned}$$



Formas cuadráticas (III): Matriz asociada.

$\omega: U \rightarrow R$ **forma cuadrática** $\iff$ $f: U \times U \rightarrow R$ **forma bilineal simétrica (forma polar)** $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$

La **matriz asociada** a la **forma cuadrática** ω es la matriz asociada a su **forma polar** f (forma bilineal simétrica).

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

$$\omega(\vec{x}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

F_B **simétrica**

Ejemplo I:

$$f((x, y), (x', y')) = xx' + 3xy' + 3yx' - 2yy'$$

$$\omega((x, y)) = f((x, y), (x, y)) = x \cdot x + 3xy + 3yx - 2y \cdot y = x^2 + 6xy - 2y^2$$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix} \quad \text{simétrica}$$

$$\omega((x, y)) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Ejemplo II:

$$\omega((x, y)) = x^2 + 6xy - 2y^2$$

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 6/2 \\ 6/2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \end{matrix}$$

¡OJO!
Fuera de la **diagonal**
DIVIDIDOS entre **DOS**

$$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\omega((x, y)) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$f((x, y), (x', y')) = (x \ y) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = xx' + 3xy' + 3yx' - 2yy'$$



Formas cuadráticas (IV): Cambio de base.

$\omega: U \rightarrow R$ **forma cuadrática** $\iff f: U \times U \rightarrow R$ **forma bilineal simétrica (forma polar)** $\omega(\vec{u}) = f(\vec{u}, \vec{u})$

La **matriz asociada** a la **forma cuadrática** ω es la matriz asociada a su **forma polar** f (forma bilineal simétrica).

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_B$$

$$\omega(\vec{x}) = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n)_B F_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B$$

F_B **simétrica**

Cambio de base:

$B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_n\}$ base de U

$B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de U

$$F_{B'} = M_{BB'}^t F_B M_{BB'}$$

CONGRUENCIA

Consecuencias:

Dos **matrices asociadas** a una misma **forma cuadrática** respecto a distintas bases son **congruentes**

Toda **matriz simétrica** diagonaliza por congruencia $\iff$ Toda **forma cuadrática** es **diagonalizable** $\left\{ \begin{array}{l} \text{Existe } B \text{ base de } U \\ F_B \text{ es diagonal} \end{array} \right.$

Su **forma diagonal** permitirá clasificar las **formas cuadráticas** y aquello que estén **modelizando**.

