Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 2. Ortogonalidad.

Endomorfismos simétricos.

Luis Fuentes García (2022).

Resultado fundamental.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado fundamental:

Teorema. Dada una matriz real **simétrica** $A \in M_{n\times n}(R)$ se cumple:

1. Todos sus **autovalores** son **reales**.
2. **Diagonaliza** por **semejanza** ($P^{-1}AP = D$ **diagonal**).
3. **Autovectores** asociados a **autovalores** distintos son **ortogonales**(*).
4. Existe una **base ortonormal**(*) de **autovectores** de A.
5. Existe una matriz P **ortogonal** ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$ **diagonal**.

(*) Producto escalar usual

¿Por qué es importante?:

En general una matriz $A \in M_{n\times n}(R)$ **NO simétrica** :

NO tiene porque tener todos los **autovalores** reales.

NO siempre **diagonaliza** por **semejanza**.

El resultado nos dice que si es **simétrica** sin embargo **SI** se cumplen ambas propiedades.

5. Existe una matriz P **ortogonal** ($P^{-1} = P^t$) tal que $\underbrace{P^{-1}AP}_{\text{SEMEJANZA}} = \underbrace{P^tAP}_{\text{CONGRUENCIA}} = D$ diagonal.

La matriz **diagonaliza** al mismo tiempo por **semejanza** y por **congruencia**.

$P^{-1} = P^t$ convierte el cálculo de una inversa (costoso) en el cálculo de la **traspuesta (inmediato).**

Resultado fundamental.

El objetivo de esta sección es demostrar el siguiente resultado fundamental:

Teorema. Dada una matriz real **simétrica** $A \in M_{n\times n}(R)$ se cumple:

1. Todos sus **autovalores** son **reales**.
2. **Diagonaliza** por **semejanza** ($P^{-1}AP = D$ **diagonal**).
3. **Autovectores** asociados a **autovalores** distintos son **ortogonales**(*).
4. Existe una **base ortonormal**(*) de **autovectores** de A.
5. Existe una matriz P **ortogonal** ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$ **diagonal**.

(*) Producto escalar usual

¿Cómo se aplica?:

Dada $A \in M_{n\times n}(R)$ **simétrica** para hallar P **ortogonal** ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$ **diagonal,** los pasos son:

i) Hallar el **polinomio característico** $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$

ii) Sus raíces λ_i son los **autovalores**: resolvemos $p(\lambda) = 0$.

No hace falta comprobar multiplicidades.

iii) Para cada **autovalor** λ_i hallamos los **autovectores**: $(A - \lambda_i Id)\vec{u} = \vec{0}$

iv) **Ortogonalizamos** por **Gram-Schmidt** de manera independiente los **autovectores** asociados a **cada autovalor**.

v) **Normalizamos**, dividiendo cada vector por su norma. Conseguimos una **base ortonormal de autovectores**.

vi) Finalmente:

D es la matriz **diagonal** formada por los **autovalores**.

P es la matriz cuyas **columnas** son la **base ortornormal de autovectores**

Endomorfismos simétricos.

Trabajamos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + <u>producto escalar</u>

<u>**Definición**</u>. Un **endomorfismo** $\boldsymbol{f}: U \to U$ se dice **simétrico** si $f(\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot f(\vec{v})$ para cualesquiera $\vec{u}\cdot\vec{v} \in U$

<u>**Matricialmente:**</u>

B base de U

- F_B matriz asociada a f $\quad (f(\vec{u}))_B = F_B(u)_B \quad (f(\vec{v}))_B = F_B(v)_B$
- G_B matriz de **Gram** del **producto escalar** $\quad \vec{x}\cdot\vec{y} = (x)_B^t G_B (y)_B$

$$f(\vec{u})\cdot\vec{v} = \vec{u}\cdot f(\vec{v}) \Leftrightarrow \left(f(\vec{u})\right)_B^t G_B(v)_B = (u)_B^t G_B\left(f(\vec{v})\right)_B \Leftrightarrow (F_B(u)_B)^t G_B(v)_B = (u)_B^t G_B F_B(v)_B$$

$$\Leftrightarrow (u)_B^t F_B^t G_B (v)_B = (u)_B^t G_B F_B (v)_B \Leftrightarrow \boxed{F_B^t G_B = G_B F_B}$$

Un **endomorfismo** $\boldsymbol{f}: U \to U$ es **simétrico** si $F_B^t G_B = G_B F_B$ siendo B una base cualquiera de U

Si B es una **base ortonormal** de $U \Leftrightarrow G_B = Id$

$$F_B^t G_B = G_B F_B \Leftrightarrow \boxed{F_B^t = F_B} \Leftrightarrow \boxed{F_B \text{ es simétrica}}$$

Un **endomorfismo** $\boldsymbol{f}: U \to U$ es **simétrico** si su <u>**matriz asociada**</u> F_B respecto a una base B <u>**ortonormal**</u> es **simétrica**.

Endomorfismos simétricos.

Trabajamos en un Espacio vectorial euclídeo = Espacio vectorial U + producto escalar

Definición. Un **endomorfismo** $f: U \to U$ se dice **simétrico** si $f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot f(\vec{v})$ para cualesquiera $\vec{u} \cdot \vec{v} \in U$

Un **endomorfismo** $f: U \to U$ es **simétrico** si $F_B^t G_B = G_B F_B$ siendo B una base cualquiera de U

Un **endomorfismo** $f: U \to U$ es **simétrico** si su **matriz asociada** F_B respecto a una base B **ortonormal** es **simétrica**.

Propiedad:

Si $f: U \to U$ es un **endomorfismo simétrico** y $\vec{u}$ y $\vec{v}$ **son autovectores de** f asociados a **autovalores distintos** entonces $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Prueba:

$\vec{u}$ **autovector** de f asociado al **autovalor** λ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u}) = \lambda \cdot \vec{u}$

$\vec{v}$ **autovector** de f asociado al **autovalor** μ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{v}) = \mu \cdot \vec{v}$

$$f(\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot f(\vec{v}) \Rightarrow (\lambda \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\mu \cdot \vec{v}) \Leftrightarrow \lambda \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = \mu \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(\lambda - \mu)}_{\text{NO NULO}} \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Ejemplo. Dada la **matriz simétrica real** $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ hallar una matriz P **ortogonal** ($P^{-1} = P^t$) tal que $P^{-1}AP = P^tAP = D$ **diagonal**.

i) Hallar el **polinomio característico** $p(\lambda) = \det(A - \lambda Id)$:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2-\lambda & 2-\lambda \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1+\lambda)^2$$

ii) Sus raíces λ_i son los **autovalores**: resolvemos $p(\lambda) = 0$.

$$(2-\lambda)(1+\lambda)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ con } \boxed{\textbf{m.a. 1}} \\ \lambda_2 = -1 \text{ con } \boxed{\textbf{m.a. 2}} \end{cases}$$

iii) Para cada **autovalor** λ_i hallamos los **autovectores**: $(A - \lambda_i Id)\vec{u} = \vec{0}$

Autovectores asociados a $\lambda_1 = 2$.

$$(A - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ \cancel{x + y - 2z = 0} \end{cases}$$

DEPENDIENTE

Paramétricas. Generadores

1 generador

$S_2 = L\{(1,1,1)\}$

Autovectores asociados a $\lambda_2 = -1$.

$$(A - (-1)Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ \cancel{x + y + z = 0} \\ \cancel{x + y + z = 0} \end{cases}$$

DEPENDIENTES

Paramétricas. Generadores

2 generadores

$S_{-1} = L\{(1,0,-1),(0,-1,1)\}$

Ejemplo. Dada la **matriz simétrica real** $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ hallar una matriz P **ortogonal** ($P^{-1}=P^t$) tal que $P^{-1}AP=P^tAP=D$ **diagonal**.

iv) **Ortogonalizamos** por **Gram-Schmidt** de manera independiente los **autovectores** asociados a **cada autovalor**.

$S_2=L\{(1,1,1)\}$ **Un solo vector: nada que ortogonalizar.**

$S_{-1}=L\{(1,0,-1),(0,-1,1)\}$ **Ortogonalizamos por Gram-Schmidt.**

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}_1=(1,0,-1)\\ \vec{v}_2=(0,-1,1)+a(1,0,-1)\end{array}\right\}$$

Imponemos ortogonalidad $\vec{v}_2\cdot\vec{v}_1=0$

$$\left\{\begin{array}{l}(0,-1,1)\cdot(1,0,-1)+a(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)=0\\ a=-\dfrac{(0,-1,1)\cdot(1,0,-1)}{(1,0,-1)\cdot(1,0,-1)}=\end{array}\right.$$

PRODUCTO ESCALAR USUAL

$$\vec{v}_2=(0,-1,1)-\frac{1}{2}(1,0,-1)$$

$$S_{-1}=L\left\{(1,0,-1),\left(\frac{1}{2},-1,\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$B'=\{\underbrace{(1,1,1)}_{\lambda_1=2},\underbrace{(1,0,-1),\left(\tfrac{1}{2},-1,\tfrac{1}{2}\right)}_{\lambda_2=-1}\}$$ **base ortogonal de autovectores**

v) **Normalizamos**, dividiendo cada vector por su norma. Conseguimos una **base ortonormal de autovectores**.

$$\frac{(1,1,1)}{\|(1,1,1)\|}=\frac{(1,1,1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{(1,0,-1)}{\|(1,0,-1)\|}=\frac{(1,0,-1)}{\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{(1/2,-1,1/2)}{\|(1/2,-1,1/2)\|}=\frac{(1/2,-1,1/2)}{\sqrt{(1/2)^2+(-1)^2+(1/2)^2}}=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

Base ortonormal de autovectores

$$P=\begin{pmatrix}1/\sqrt{3}&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&0&-2/\sqrt{6}\\1/\sqrt{3}&-1/\sqrt{2}&1/\sqrt{6}\end{pmatrix}\qquad D=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

AUTOVECTORES **AUTOVALORES**