Álgebra Lineal II

TEMA IV- Cónicas y cuádricas.

Capítulo 1. Cónicas.

Cónicas en su forma canónica. Ecuación y propiedades.

Luis Fuentes García (2022).

Focos, directrices y excentricidad de una elipse.

Ecuación reducida canónica

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (*) \qquad a \geq b > 0$$

a radio mayor

b radio menor

Tomando: $c^2 = a^2 - b^2$ — c distancia semifocal

Focos y directrices:

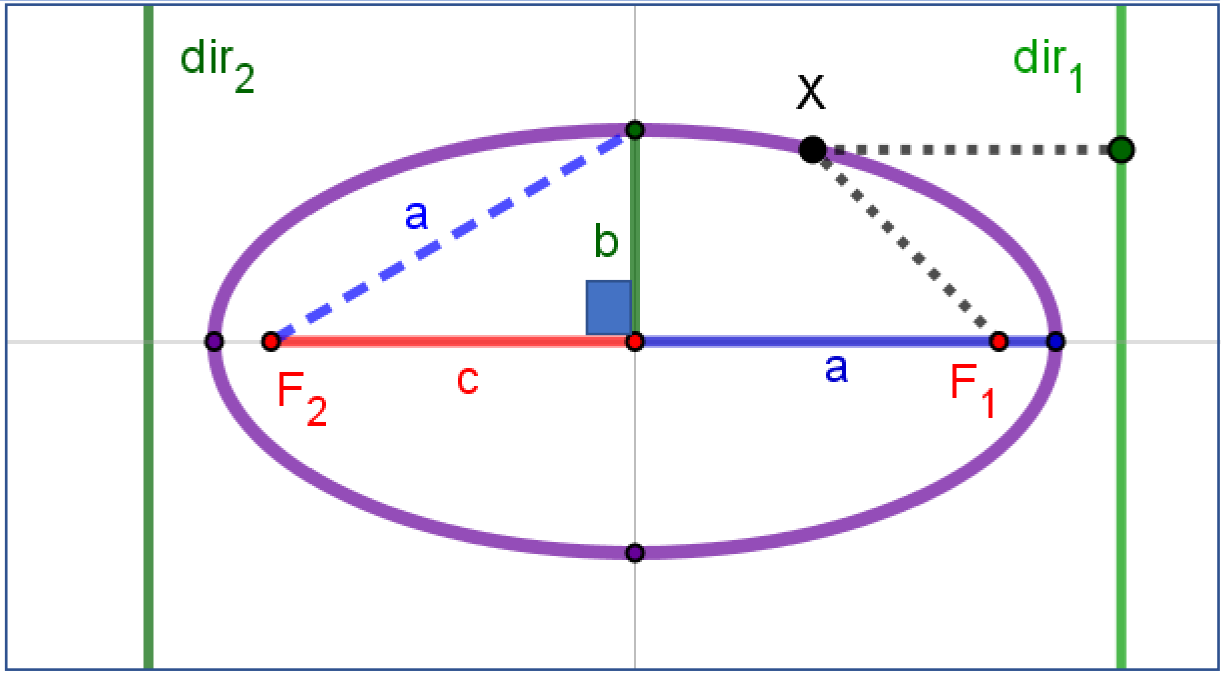
$$F_1 = (c,0) \quad \rightarrow \quad dir_1 \equiv x = \frac{a^2}{c}$$

$$F_2 = (-c,0) \quad \rightarrow \quad dir_2 \equiv x = -\frac{a^2}{c}$$

Excentricidad:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$0 \leq e < 1$$



$direcriz_1 \equiv$ **recta polar de** $F_1 = (c,0)$

$$\begin{pmatrix} c & 0 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/b^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hay que comprobar que para todo $(x,y) \in$ **cónica:** $\boxed{\dfrac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),dir_1)} = e \text{ cte}}$

(*) Despejando y e sustituyendo

$$d((x,y),F_1) = \sqrt{(x-c)^2+y^2} = \frac{a^2-cx}{a}$$

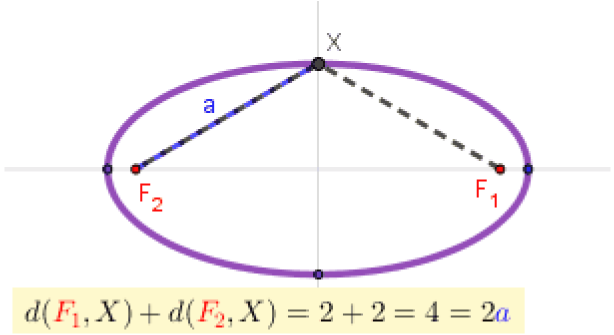
$$d((x,y),dir_1) = \frac{a^2}{c} - x = \frac{a^2-cx}{c}$$

$$\frac{d((x,y),F_1)}{d((x,y),dir_1)} = \frac{\frac{a^2-cx}{a}}{\frac{a^2-cx}{c}} = \frac{c}{a}$$

Propiedades de los focos de una elipse.

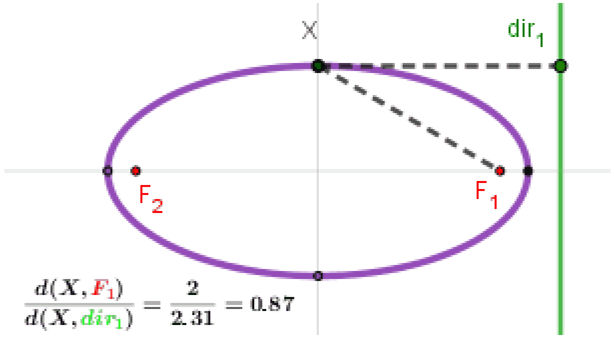
<u>Elipse como lugar geométrico (I)</u>: La **elipse** es el **lugar geométrico** de puntos cuya **suma de distancias a** dos puntos dados (**los focos**) es **constante.**

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a \text{ cte}$$



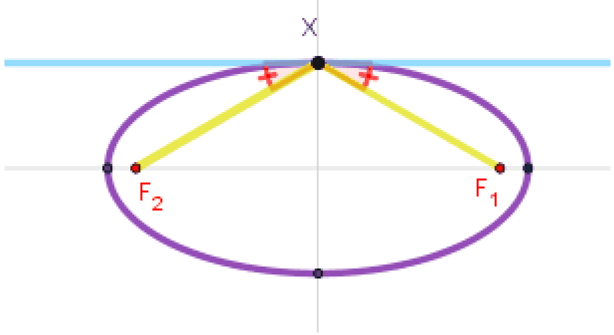
<u>Elipse como lugar geométrico (II)</u>: La **elipse** es el **lugar geométrico** de puntos cuyo **cociente de distancias a** un punto (**un foco**) y una recta (la **directriz**) es una **constante** menor que uno (la **excentricidad**).

$$\frac{d((x,y), F_1)}{d((x,y), dir_1)} = e \text{ cte}$$



<u>Propiedad de reflexión</u>:

Un **rayo** que proviene de un **foco** de la **elipse** se **refleja** en ella hacia el **otro foco**.



Ejemplo: cónica conocido centro, foco y excentricidad.

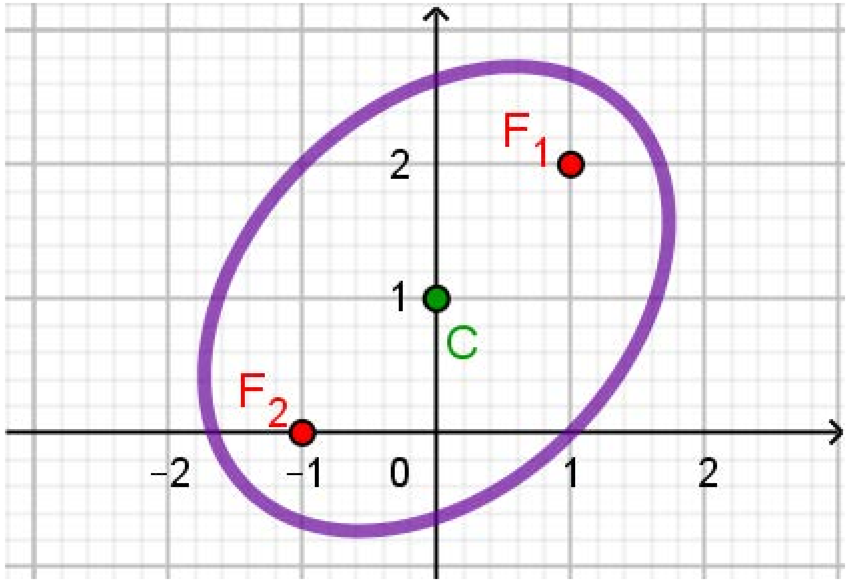
Ecuación de una cónica de centro $C=(0,1)$, uno de los focos $F_1=(1,2)$ y excentricidad $e=\sqrt{2}/2$.

0) La excentricidad es $e=\frac{\sqrt{2}}{2}<1 \Rightarrow$

1) F_2 es el simétrico de F_1 respecto al **centro** C

$$C=\frac{F_1+F_2}{2} \quad \Rightarrow \quad F_2=2C-F_1=2(0,1)-(1,2)=(-1,0)$$

2) $$e=\frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad a=\frac{c}{e}=\frac{d(F_1,C)}{e}=\frac{\sqrt{(0-1)^2+(1-2)^2}}{\sqrt{2}/2}$$



3) Elipse como lugar geométrico: $\boxed{d(X,F_1)+d(X,F_2)=2a \text{ cte}}$

$$d\big((x,y),(1,2)\big)+d\big((x,y),(-1,0)\big)=2\cdot 2$$

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}=4-\sqrt{(x+1)^2+y^2} \quad \Rightarrow \quad (x-1)^2+(y-2)^2=\left(4-\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2$$

Operando y simplificando: $$2\sqrt{(x+1)^2+y^2}=3+x+y \quad \Rightarrow \quad \left(2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2=(3+x+y)^2$$

$$\boxed{3x^2-2xy+3y^2+2x-6y-5=0}$$

Focos, directrices y excentricidad de una hipérbola.

Ecuación reducida canónica

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad a,b>0$$

a distancia centro-vértice
b/a pendiente asíntotas

Tomando: $c^2=a^2+b^2$ — c **distancia semifocal**

Focos y directrices:

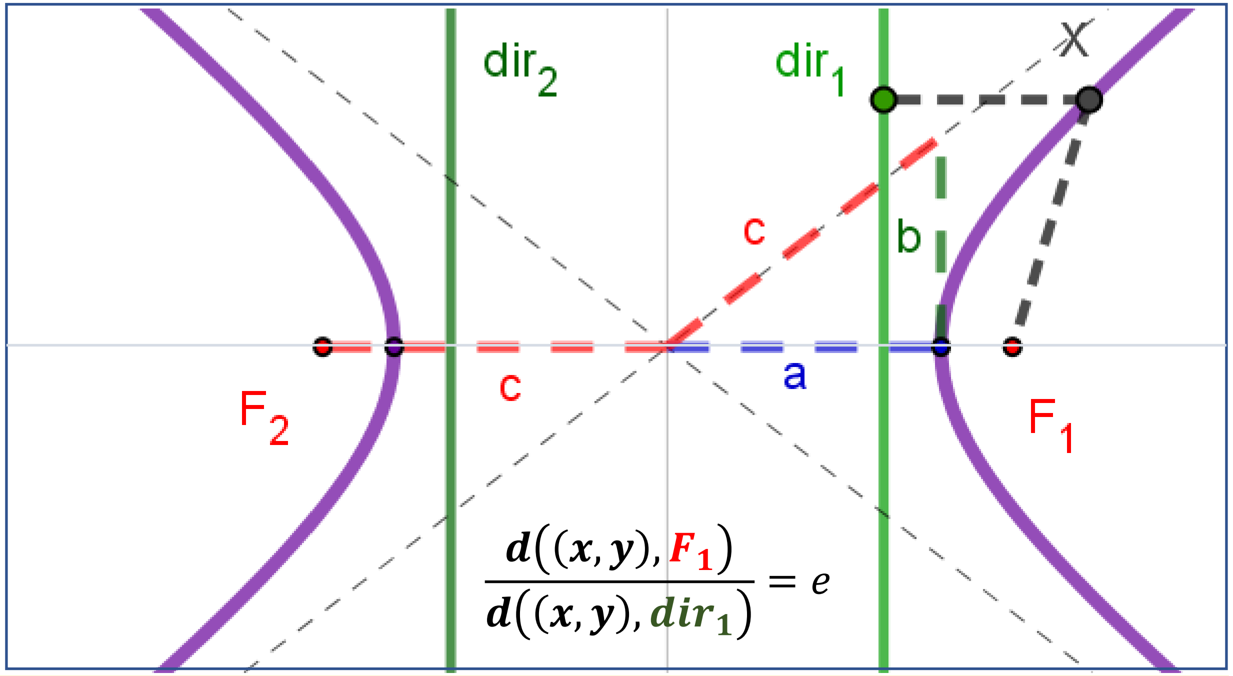
$$F_1=(c,0) \quad\rightarrow\quad dir_1 \equiv x=\frac{a^2}{c}$$

$$F_2=(-c,0) \quad\rightarrow\quad dir_2 \equiv x=-\frac{a^2}{c}$$

Excentricidad:

$$e=\frac{c}{a}$$

$$e>1$$



Direcciones asintóticas:

$$\boxed{(p \quad q)T\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}=0} \Rightarrow q=\pm\frac{b}{a}p \Rightarrow \begin{cases}(p,q)=(a,b)\\(p,q)=(a,-b)\end{cases}$$

$$A=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0 & 0\\ 0 & -1/b^2 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \qquad T=\begin{pmatrix}1/a^2 & 0\\ 0 & -1/b^2\end{pmatrix}$$

Asíntotas:

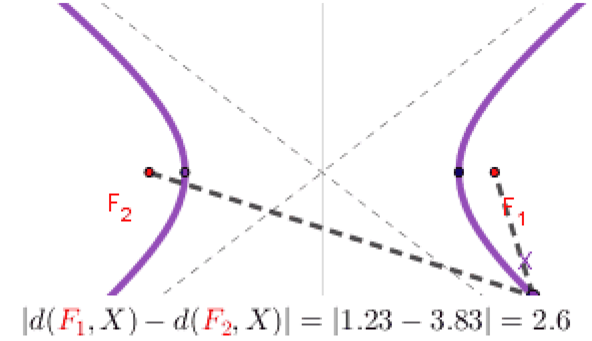
$$(a \quad b \quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0 \Leftrightarrow y=-\frac{b}{a}x$$

$$(a \quad -b \quad 0)A\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}=0 \Leftrightarrow \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0 \Leftrightarrow y=+\frac{b}{a}x$$

Propiedades de los focos de una hipérbola.

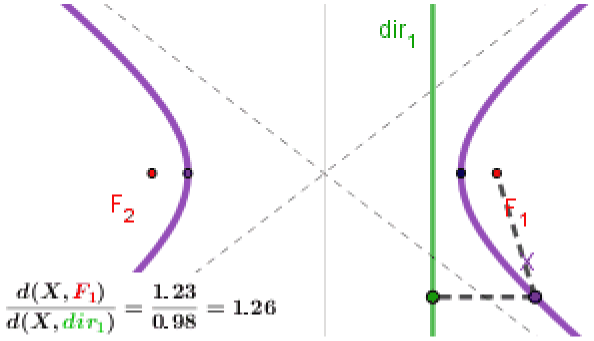
<u>Hipérbola como lugar geométrico (I):</u> La **hipérbola** es el **lugar geométrico** de puntos cuya **diferencia de distancias a** dos puntos (**los focos**) es **constante.**

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a \text{ cte}$$



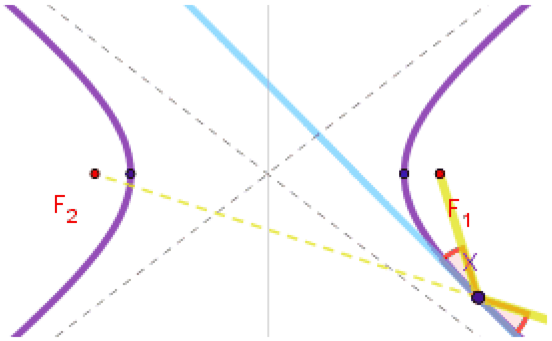
<u>Hipérbola como lugar geométrico (II):</u> La **hipérbola** es el **lugar geométrico** de puntos cuyo **cociente de distancias a** un punto (**un foco**) y una recta (la **directriz**) es una **constante <u>mayor que uno</u>** (la **excentricidad**).

$$\frac{d((x, y), F_1)}{d((x, y), dir_1)} = e \text{ cte}$$



<u>Propiedad de reflexión</u>:

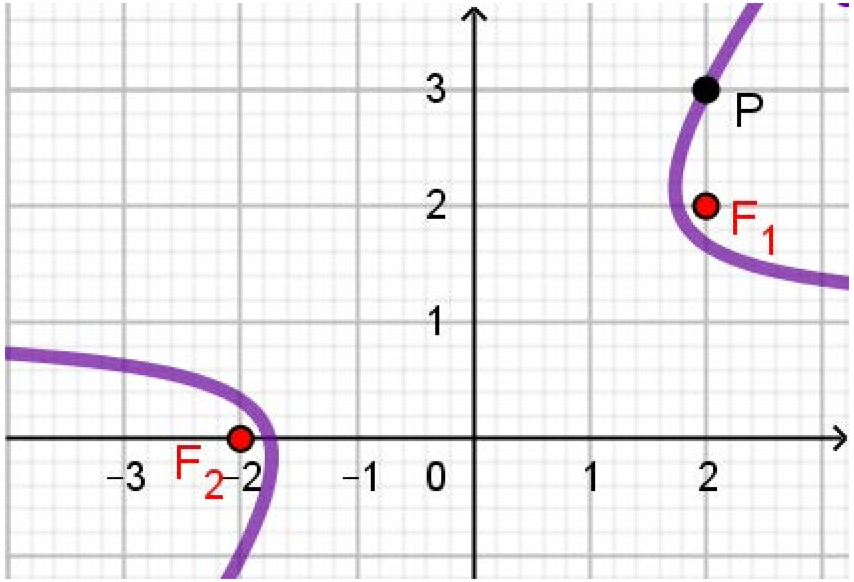
Un **rayo** que va hacia un **foco** de la **hipérbola** se **refleja** en ella hacia el **otro foco**.



Ejemplo: hipérbola conocidos focos y un punto.

Ecuación de una hipérbola de focos $F_1=(2,2)$, $F_2=(-2,0)$ y que pasa por el punto $P=(2,3)$.

1) Hipérbola como lugar geométrico: $|d(X,F_1)-d(X,F_2)|=2a$ cte



2) Imponemos que pase por $P=(2,3)$.

$$2a=|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=$$

$$=|\sqrt{(2-2)^2+(3-2)^2}-\sqrt{(2-(-2))^2+(3-0)^2}=4$$

1) Hipérbola como lugar geométrico: $d(X,F_1)-d(X,F_2)=\pm 2a$

$$d\big((x,y),(2,2)\big)-d\big((x,y),(-2,0)\big)=4\Rightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-2)^2}=4+\sqrt{(x+2)^2+y^2}\qquad\Rightarrow\qquad (x-2)^2+(y-2)^2=\left(4+\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2$$

Operando y simplificando: $\quad 2\sqrt{(x+2)^2+y^2}=3+2x+y\quad\Rightarrow\quad\left(2\sqrt{(x+1)^2+y^2}\right)^2=(3+2x+y)^2$

$$\boxed{4xy-3y^2-4x+6y-7=0}$$

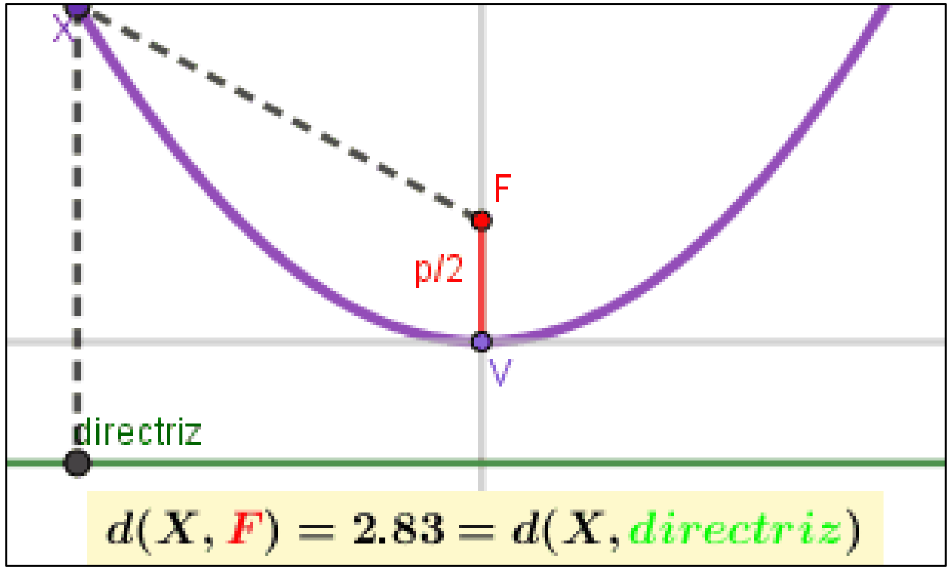
Focos, directrices y excentricidad de una parábola.

Ecuación reducida canónica

$x^2 = 2py, \qquad p > 0$

$p/2$ distancia **foco-vértice**
p distancia **foco-directriz**

La **parábola NO** tiene **centro**.



Foco y **directriz**:

$F = \left(0, \frac{p}{2}\right) \quad \rightarrow \quad dir \equiv y = -\frac{p}{2}$

Excentricidad: $e = 1$

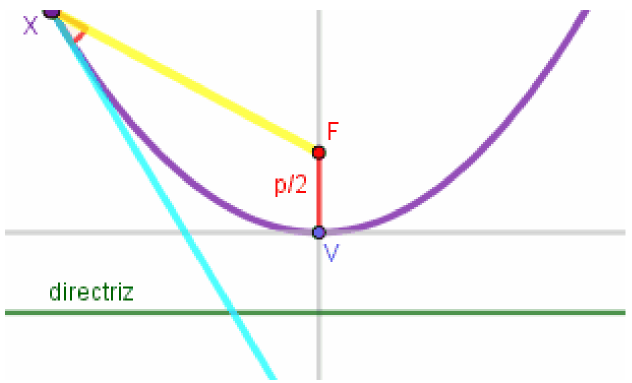
$$\frac{d((x,y), F)}{d((x,y), dir)} = 1$$

<u>Parábola como lugar geométrico</u>: La **parábola** es el **lugar geométrico** de puntos que **<u>equidistan</u>** de un punto (**un foco**) y una recta (la **directriz**).

$$d((x,y), F) = d((x,y), dir)$$

<u>Propiedad de reflexión</u>:

Un **rayo** que paralelo al eje de la **parábola** se **refleja** en ella hacia el **foco**.

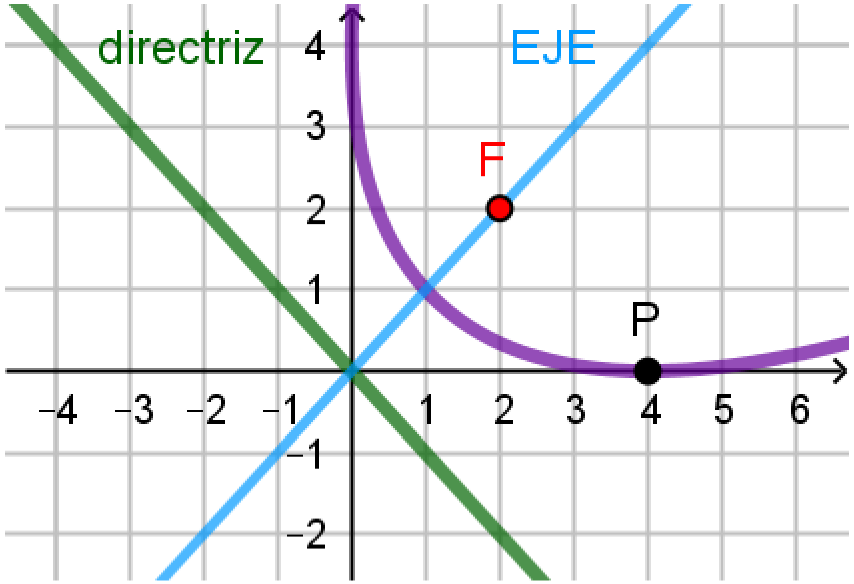


Ejemplo: parábola conocida directriz, eje y un punto.

Ecuación de una parábola de directriz $x + y = 0$, eje $x - y = 0$ y que pasa por el punto $P = (4, 0)$.

1) Parábola como lugar geométrico:

$$\boxed{d\big((x,y),F\big) = d\big((x,y),dir\big)}$$



2) El foco $F = (a, b)$ pertenece al eje $x - y = 0$.

$$a - b = 0 \quad \Rightarrow \quad a = b \quad \Rightarrow \quad F = (a, a)$$

3) Imponemos que pasa por el punto $P = (4, 0)$

$$d\big((4,0),(a,a)\big) = d\big((4,0), x + y = 0\big)$$

$$\sqrt{(4-a)^2 + (0-a)^2} = \frac{|4+0|}{\sqrt{1^2+1^2}} \quad \Rightarrow \quad a^2 - 4a + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2}$$

1) Parábola como lugar geométrico:

$$d\big((x,y),(2,2)\big) = d\big((x,y), x + y = 0\big) \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x+y|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

Elevando al cuadrado:

$$2\left((x-2)^2 + (y-2)^2\right) = (x+y)^2$$

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2xy - 8x - 8y + 16 = 0}$$