

1.— En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, comprobar cuáles de las siguientes aplicaciones lineales son transformaciones ortogonales:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + 2y, y)$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-y, x)$

(c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = \left(\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y, \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y\right)$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (x + y, x - y)$.

2.— Comprobar cuáles de las siguientes bases de $\mathbb{R}^3$ tienen la misma orientación que la base canónica.

(a) $B = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$.

(b) $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 2), (1, 1, 1)\}$.

(c) $B = \{(2, 3, 1), (1, -1, 0), (2, 0, 0)\}$.

3.— En $\mathbb{R}^2$ comprobar cuáles de los siguientes pares de bases tienen la misma orientación:

(a) $B = \{(1, 2), (0, 1)\}$ y $B' = \{(2, 3), (1, 1)\}$.

(b) $B = \{(1, 1), (3, 0)\}$ y $B' = \{(-1, -1), (-3, 0)\}$.

(c) $B = \{(2, 0), (1, 3)\}$ y $B' = \{(2, 3), (1, 5)\}$.

4.— Decidir si las siguientes transformaciones ortogonales de $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, son directas o inversas.

(a) Aquella cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(b) Aquella cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$.

(c) Aquella cuya matriz asociada en la base canónica es $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.— En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica dar la matriz asociada a un giro de 120° .

6.— En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica dar la matriz asociada a una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(1, 2)\}$.

7.— En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica dar la matriz asociada a un giro de 30° respecto al semieje $\mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$.

8.— En $\mathbb{R}^3$, con el producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica dar la matriz asociada a una simetría respecto al plano $\mathcal{L}\{(0, 1, 2), (1, 0, 0)\}$.

9.— En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar usual y considerando como orientación positiva la dada por la base canónica, clasificar las transformaciones ortogonales del ejercicio (4).

Soluciones.

1. (a) No. (b) Si. (c) Si. (d) No.

2. (a) No. (b) No. (c) Si.

3. (a) No. (b) Si. (c) Si.

4. (a) Directa. (b) Directa. (c) Inversa.

5. $\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

6. $\begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3/5 & 4/5 \\ 0 & 4/5 & 3/5 \end{pmatrix}$.

9. (a) Es un giro de 90 grados.

(b) Es un giro de ángulo $+\arccos(3/5)$.

(c) Es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(1, 1)\}$.