

**1.**— Comprobar cuáles de las siguientes forma bilineales son productos escalares:

(a)  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y), (x', y')) = xx' + 3xy' - yx' + 2yy'$

(b)  $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$

(c)  $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + 3yz' + zx' + 3zy' + 9zz'$

(d)  $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

**2.**— Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b)  $(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)$ .

(c)  $\|(1, 0, 1)\|$ .

(d) El ángulo que forman los vectores  $(1, 0, 1)$  y  $(1, 1, 1)$ .

---

**3.**— Para el producto escalar del apartado (d) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b)  $\langle 1 - x, x - x^2 \rangle$ .

(c)  $\|1 - x\|$ .

(d) El ángulo que forman los vectores (polinomios)  $1 - x$  y  $x - x^2$ .

---

**4.**— Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1:

(a) Comprobar si los vectores  $(1, 0, 0)$  y  $(2, -1, -1)$  son ortogonales.

(b) Calcular una base de  $\mathbb{R}^3$  ortogonal.

(c) Calcular una base de  $\mathbb{R}^3$  ortonormal.

---

**5.**— Con el producto escalar usual de  $\mathbb{R}^3$  y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

---

**6.**— Con el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1 y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

---

**7.**— Con el producto escalar usual calcular la proyección del vector  $(2, 1, 0)$  sobre el subespacio vectorial  $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

---

8.— Con el producto escalar usual calcular la matriz asociada en la base canónica a la aplicación proyección sobre el subespacio  $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

9.— Dada la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ .

- (a) Calcular los autovalores de  $A$ .
- (b) Calcular los autovectores de  $A$ .
- (c) Calcular una base ortonormal de autovectores de  $A$ .
- (d) Calcular una matriz  $P$  ortogonal, es decir, cumpliendo  $P^t = P^{-1}$  tal que  $D = P^{-1}AP$  sea una matriz diagonal.

---

Soluciones.

---

1. (a) No (no es simétrico). (b) No (no es simétrico). (c) Si. (d) Si.

2. (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ . (b) 16. (c)  $2\sqrt{3}$ . (d)  $\arccos \frac{4\sqrt{66}}{33}$ .

3. (a)  $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$ . (b)  $\frac{1}{12}$ . (c)  $\frac{1}{\sqrt{3}}$ . (d)  $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$ .

4. (a) Si. (b)  $\{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, -2, 1)\}$ . (c)  $\{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})\}$ .

5. Base ortogonal:  $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ . Base ortonormal:  $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$ .

6. Base ortogonal:  $\{(1, 0, 1), (-\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$ . Base ortonormal:  $\{(\frac{\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{\sqrt{3}}{6}), (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})\}$ .

7.  $(1, 1, 1)$ .

8.  $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$ .

9. (a)  $\lambda_1 = 2$ ,  $m.a. = 2$ ,  $\lambda_2 = -2$ ,  $m.a. = 1$ .

(b)  $S_2 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ ,  $S_{-2} = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$ .

(c)  $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$ .

(d)  $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .