

1.— Comprobar cuáles de las siguientes forma bilineales son productos escalares:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y), (x', y')) = xx' + 3xy' - yx' + 2yy'$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_2y_1$

(c) $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + xy' + xz' + yx' + 2yy' + 3yz' + zx' + 3zy' + 9zz'$

(d) $f : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$

2.— Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b) $(1, 0, 1) \cdot (1, 1, 1)$.

(c) $\|(1, 0, 1)\|$.

(d) El ángulo que forman los vectores $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

3.— Para el producto escalar del apartado (d) del ejercicio 1, calcular:

(a) La matriz de Gram del producto escalar.

(b) $\langle 1 - x, x - x^2 \rangle$.

(c) $\|1 - x\|$.

(d) El ángulo que forman los vectores (polinomios) $1 - x$ y $x - x^2$.

4.— Para el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1:

(a) Comprobar si los vectores $(1, 0, 0)$ y $(2, -1, -1)$ son ortogonales.

(b) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ ortogonal.

(c) Calcular una base de $\mathbb{R}^3$ ortonormal.

5.— Con el producto escalar usual de $\mathbb{R}^3$ y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

6.— Con el producto escalar del apartado (c) del ejercicio 1 y usando el método de Gram-Schmidt, calcular una base ortogonal y otra ortonormal del subespacio:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$$

7.— Con el producto escalar usual calcular la proyección del vector $(2, 1, 0)$ sobre el subespacio vectorial $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

8.— Con el producto escalar usual calcular la matriz asociada en la base canónica a la aplicación proyección sobre el subespacio $U = \mathcal{L}\{(1, 0, 1), (1, 1, 1)\}$

9.— Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

- (a) Calcular los autovalores de A .
 - (b) Calcular los autovectores de A .
 - (c) Calcular una base ortonormal de autovectores de A .
 - (d) Calcular una matriz P ortogonal, es decir, cumpliendo $P^t = P^{-1}$ tal que $D = P^{-1}AP$ sea una matriz diagonal.
-

Soluciones.

1. (a) No. (b) No. (c) Si. (d) Si.

2. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$. (b) 16. (c) $2\sqrt{3}$. (d) $\arccos \frac{4\sqrt{66}}{33}$.

3. (a) $\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 \end{pmatrix}$. (b) $\frac{1}{12}$. (c) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. (d) $\arccos \frac{\sqrt{10}}{4}$.

4. (a) Si. (b) $\{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (1, -2, 1)\}$. (c) $\{(1, 0, 0), (-1, 1, 0), (\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2})\}$.

5. Base ortogonal: $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$. Base ortonormal: $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0)\}$.

6. Base ortogonal: $\{(1, 0, 1), (-\frac{1}{3}, 1, -\frac{1}{3})\}$. Base ortonormal: $\{(\frac{\sqrt{3}}{6}, 0, \frac{\sqrt{3}}{6}), (-\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{2}, -\frac{\sqrt{6}}{6})\}$.

7. $(1, 1, 1)$.

8. $\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.

9. (a) $\lambda_1 = 2$, $m.a. = 2$, $\lambda_2 = -2$, $m.a. = 1$.

(b) $S_2 = \mathcal{L}\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$, $S_{-2} = \mathcal{L}\{(1, -1, 0)\}$.

(c) $\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\}$.

(d) $P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.