Álgebra Lineal II

TEMA III- Espacios afines.

Capítulo 1. El espacio afín.

Distancias y ángulos entre variedades afines.

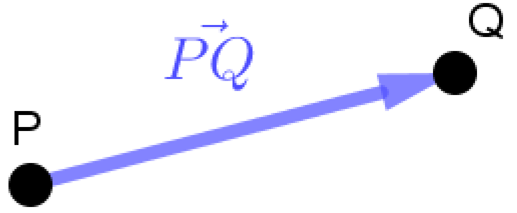
Luis Fuentes García (2022).

Definición de distancia entre dos puntos.

Fijamos un espacio afín euclídeo E asociado a un espacio vectorial V dotado de un producto escalar.

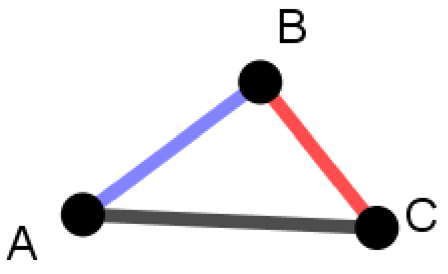
Distancia entre dos puntos $P, Q \in E$

$$\boxed{d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\|}$$



Propiedades:

1) $d(P,Q) \geq 0.$
2) $d(P,Q) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{P} = \mathrm{Q}$
3) $d(P,Q) = d(\mathrm{Q},\mathrm{P})$
4) Desigualdad triangular: $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$



Observación : El cálculo explícito de la distancia depende del producto escalar. $d(P,Q) = \|\overrightarrow{PQ}\| = \sqrt{\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ}}$

Ejemplo. Referencia canónica: $P = (1,1), Q = (2,3).$

1) Con el producto escalar usual.

$$d\big((1,1),(2,3)\big) = \|(2,3) - (1,1)\| = \|(2-1, 3-1)\|$$
$$= \sqrt{(2-1,3-1) \cdot (2-1,3-1)} =$$
$$= \sqrt{(2-1)^2 + (3-1)^2} = \boxed{\sqrt{5}}$$

2) Con un producto escalar NO usual. $G_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$$d\big((1,1),(2,3)\big) = \|(2,3) - (1,1)\| = \|(2-1, 3-1)\|$$
$$= \sqrt{(2-1,3-1) \cdot (2-1,3-1)} =$$
$$= \sqrt{\begin{pmatrix} 2-1 & 3-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-1 \end{pmatrix}} = \boxed{\sqrt{13}}$$

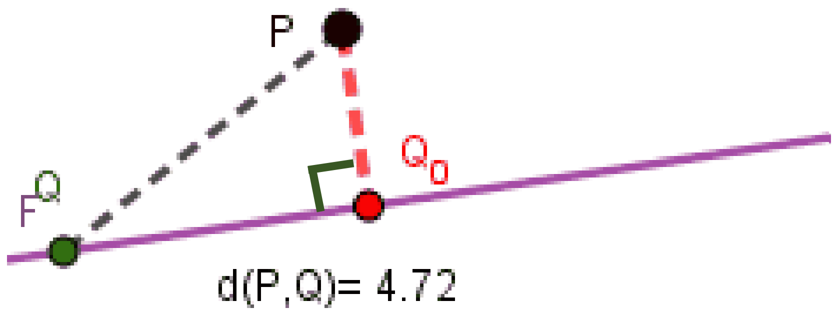
Definición de distancia entre un punto y una variedad.

Fijamos un espacio afín euclídeo E asociado a un espacio vectorial V dotado de un producto escalar.

Distancia entre un punto $P \in E$ y una subvariedad $F \subset E$

Se define la distancia del punto P a F, como la **menor distancia** que puede ser medida del **punto P** a otro **punto** de F

$$\boxed{d(P,F) = \min\{d(P,Q) | Q \in F\}}$$



Observación: La **distancia mínima** se alcanza cuando se mide **perpendicularmente a la subvariedad F.**

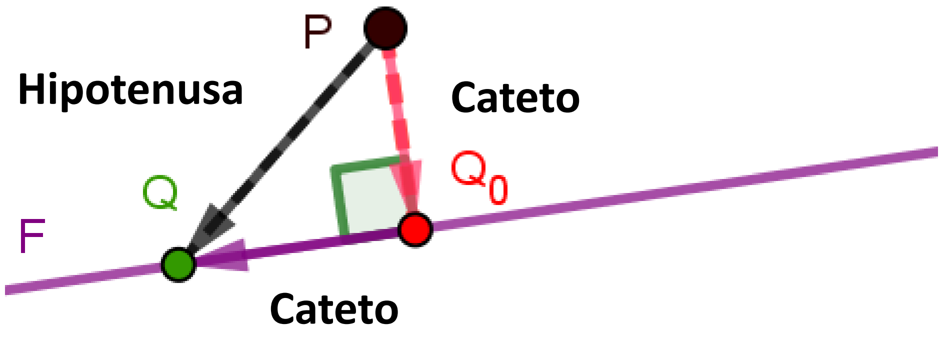
Teorema: $d(P,F) = d(P,Q_0)$, Q_0 **proyección ortogonal de P sobre F:** $\overrightarrow{Q_0P} \perp F$

Prueba:

$$d(P,Q)^2 = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0Q}\right\|^2 =$$
$$= \left\|\overrightarrow{PQ_0}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{Q_0Q}\right\|^2 \geq \left\|\overrightarrow{PQ_0}\right\|^2$$

Tª de Pitágoras

$d(P,Q_0) \leq d(P,Q)$ **para cualquier $Q \in F$**



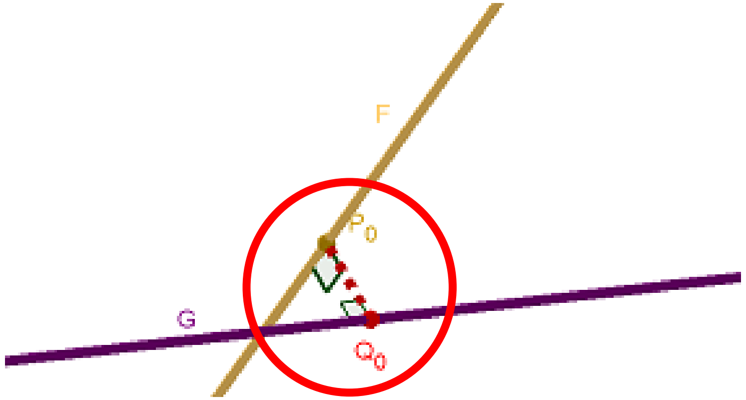
Definición de distancia entre dos variedades.

Fijamos un espacio afín euclídeo E asociado a un espacio vectorial V dotado de un producto escalar.

Distancia entre un **dos subvariedad** $F, G \subset E$

Se define la distancia del punto F a G, como la **menor distancia** que puede ser medida de un **punto de F** a otro **punto** de G

$$\boxed{d(F,G) = \min\{d(P,Q) | P \in F, Q \in G\}}$$



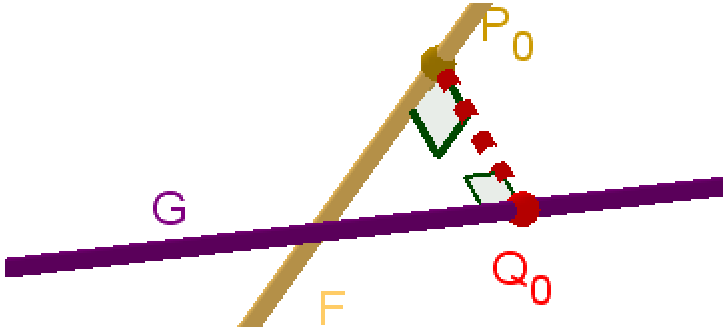
Observación: La **distancia mínima** se alcanza cuando se mide **perpendicularmente a las DOS subvariedades** F y G.

Teorema: $d(F,G) = d(P_0, Q_0)$, $\quad P_0 \in F, Q_0 \in G$ **tales que:** $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp F$, $\quad \overrightarrow{Q_0P_0} \perp G$

Prueba:

$$d(F,G) = d(P_0,Q_0) = d(F,Q_0) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{Q_0P_0} \perp F$$

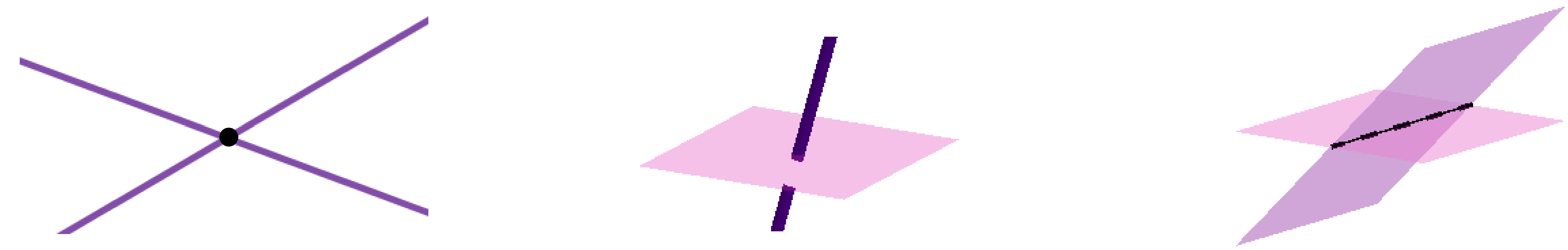
$$d(F,G) = d(P_0,Q_0) = d(P_0,G) \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{Q_0P_0} \perp G$$



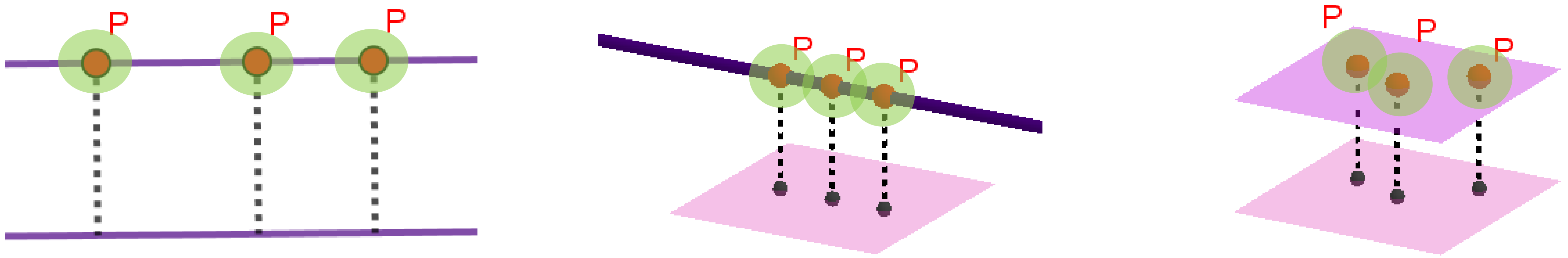
Distancia entre variedades secantes y parelelas.

Fijamos un espacio afín euclídeo ***E*** asociado a un espacio vectorial ***V*** dotado de un producto escalar.

Subvariedades $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ que se **cortan**: **distancia** es **NULA**.



Subvariedades $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}$ **paralelas:** su **distancia** se calcula como distancia de **punto** a **variedad** $d(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{G}) = d(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{G})$



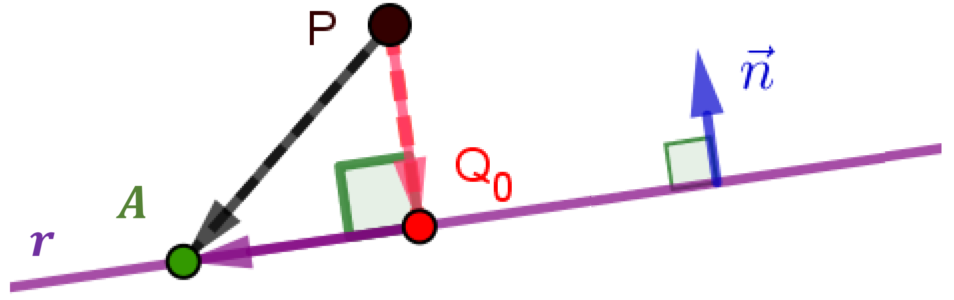
Distancia de un punto a una recta en el plano R^2.

<u>Datos</u>: Punto P y recta r.

Recta r : Punto A y vector normal, $\vec{n}$

<u>Teorema</u>: $d(P,r) = d(P,Q_0) = \|\overrightarrow{PQ_0}\|$

Q_0 <u>proyección ortogonal</u> de P sobre r: $\overrightarrow{Q_0P} \perp r$



NULO

$\cdot\vec{n}$

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0A} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{PQ_0}\cdot\vec{n} + \overrightarrow{Q_0A}\cdot\vec{n} \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n} = \overrightarrow{PQ_0}\cdot\vec{n} = \|\overrightarrow{PQ_0}\|\,\|\vec{n}\|\underbrace{\cos(\alpha)}_{1} \quad \Rightarrow \quad |\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}| = \|\overrightarrow{PQ_0}\|\|\vec{n}\| \;\Rightarrow\; \|\overrightarrow{PQ_0}\| = \frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

<u>Datos:</u> $r \equiv \mathrm{a}x + \mathrm{b}y + \mathrm{c} = 0,\;\; P = (x_0, y_0)$ $\quad\vec{n} = (\mathrm{a,b})$ (¡OJO!. Si la base es ORTONORMAL)

$$A = (x_1, y_1) \in r \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}y_1 + \mathrm{c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}y_1 = -\mathrm{c}$$

$$\overrightarrow{PA} = (x_1, y_1) - (x_0, y_0)$$

$$|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}| = |(x_1,y_1)\cdot(a,b) - (x_0,y_0)\cdot(a.b)| = |\,\mathrm{a}x_1 + \mathrm{b}y_1 - \mathrm{a}x_0 - \mathrm{b}y_0| = |-\mathrm{a}x_0 - \mathrm{b}y_0 - c| = |\mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c}|$$

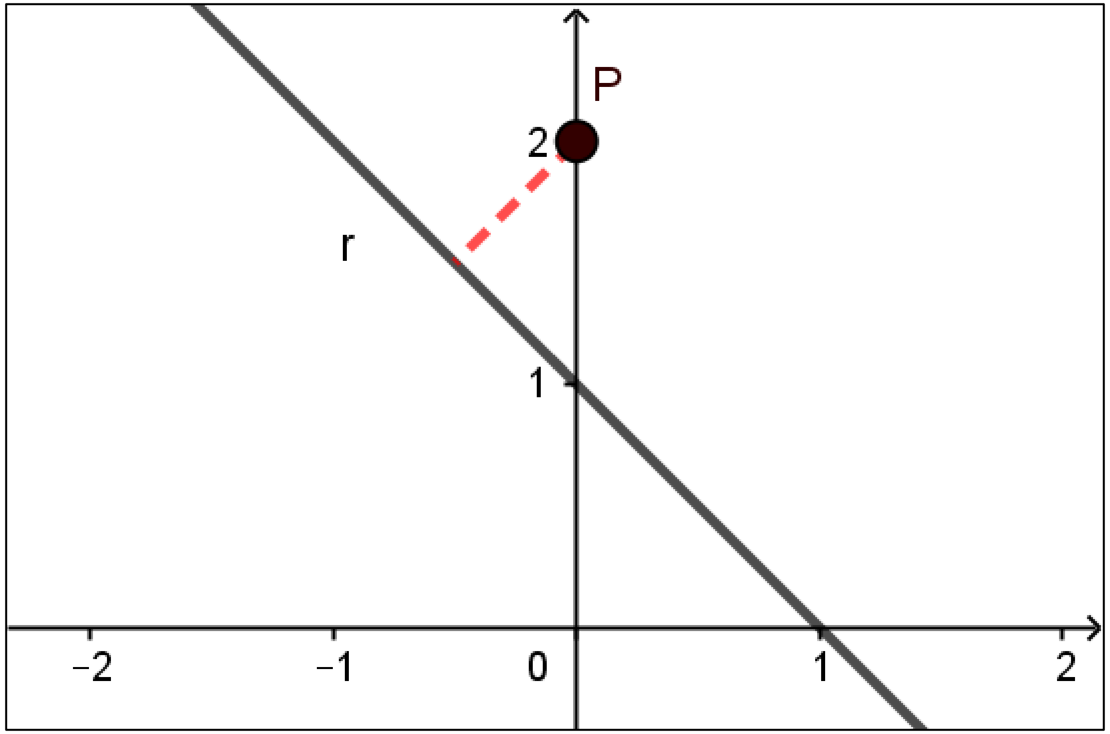
$$d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c}|}{\|(a,b)\|}$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + \mathrm{c}|}{\|(a,b)\|}}$$

¡OJO!. Si la base es ORTONORMAL.

Distancia de un punto a una recta en el plano R^2: Ejemplo 1.

Ejemplo 1. Producto escalar usual. Distancia entre el punto $P = (0, 2)$ y la recta $r \equiv \mathbf{x} + \mathbf{y} - \mathbf{1} = 0$,



Producto escalar usual ⇒ Base canónica ortonormal.

$$\boxed{d(P, r) = \frac{|\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0 + \mathbf{c}|}{\|(a, b)\|}}$$

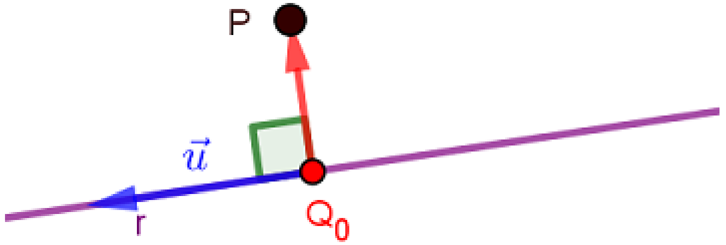
$$d(P, r) = \frac{|\mathbf{a}x_0 + \mathbf{b}y_0 + \mathbf{c}|}{\|(a, b)\|} = \frac{|1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 - 1|}{\|(1, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Producto escalar usual

Distancia de un punto a una recta en el plano R^2: Ejemplo 2.

Ejemplo 2. Producto escalar NO usual, $G_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Distancia entre el punto $P = (0, 2)$ y la recta $r \equiv \mathrm{x} + \mathrm{y} - 1 = 0$,

Producto escalar NO usual ⇒ **Base canónica NO ortonormal.**



NO vale la fórmula: $\cancel{d(P, r) = \dfrac{|ax_0 + by_0 + c|}{\|(a, b)\|}}$

Idea: Buscamos $Q_0 \in \mathbf{r}$ tal que $\overrightarrow{Q_0P} \perp \mathbf{r}$. La distancia buscada es $\|\overrightarrow{PQ_0}\|$

Pasos: **1)** De **implícitas** pasamos a **paramétricas**.

1.1) El **vector director** $\vec{u}$ serán los coeficientes del **parámetro** τ.

1.2) El **punto** Q_0 se expresa entonces en función de τ.

2) Imponemos que $\overrightarrow{Q_0P} \cdot \vec{u} = 0$ y hallamos τ y de ahí Q_0. La **distancia buscada** es $\|\overrightarrow{Q_0P}\|$.

1) $r \equiv \mathrm{x} + \mathrm{y} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{x} = 1 - \mathrm{y} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = \tau \end{cases}$

1.1) $\vec{u} = (-1, 1)$

1.2) $Q_0 = (1 - \tau, \tau)$

2) $\overrightarrow{Q_0P} = (0, 2) - (1 - \tau, \tau) = (-1 + \tau, 2 - \tau)$

$\overrightarrow{Q_0P} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (-1 + \tau, 2 - \tau) \cdot (-1, 1) = 0$

$(-1 + \tau \quad 2 - \tau) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2 - \tau = 0$

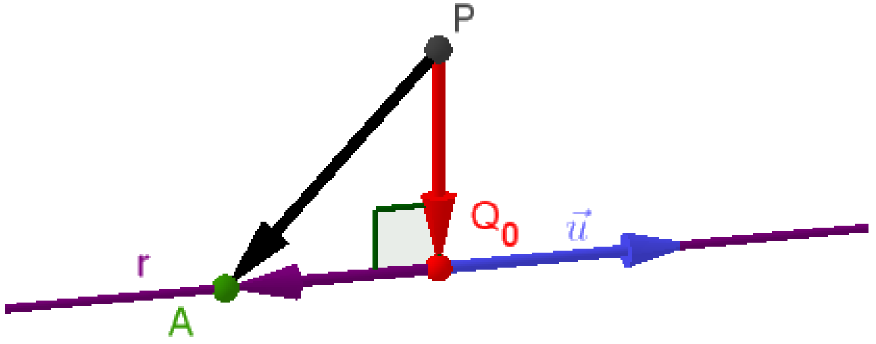
$\boxed{\tau = 2}$

$\overrightarrow{Q_0P} = (-1 + 2, 2 - 2)$

$$d(P, r) = \|\overrightarrow{Q_0P}\| = \sqrt{(1\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

Distancia de un punto a una recta en el espacio R^3.

Datos: Punto P y recta r.



Teorema: $d(P,r) = d(P,Q_0) = \|\overrightarrow{PQ_0}\|$

Q_0 **proyección ortogonal** de P sobre r: $\overrightarrow{Q_0P} \perp r$

$\times \vec{u}$

NULO

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0A} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA} \times \vec{u} = \overrightarrow{PQ_0} \times \vec{u} + \overrightarrow{Q_0A} \times \vec{u}$$

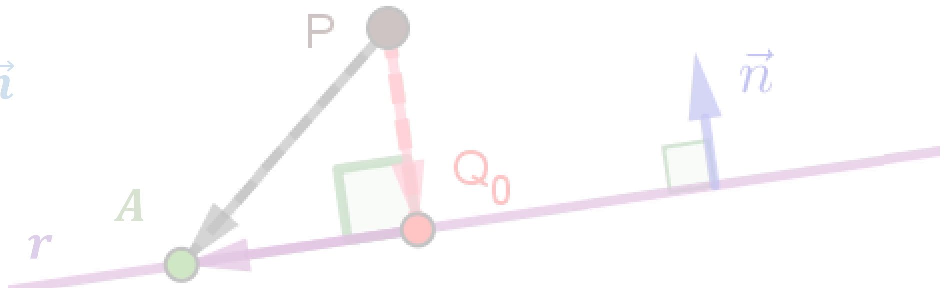
$$\|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\| = \|\overrightarrow{PQ_0} \times \vec{u}\| = \|\overrightarrow{PQ_0}\|\,\|\vec{u}\|\underbrace{|\sin(\alpha)|}_{1} \Rightarrow \quad \|\overrightarrow{PQ_0}\| = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

$$\boxed{d(P,r) = \frac{\|\overrightarrow{PA} \times \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$$

Lo que hacíamos en el plano

Datos: Punto P y recta r.

Recta r : Punto A y vector normal, $\vec{n}$



Teorema: $d(P,r) = d(P,Q_0) = \|\overrightarrow{PQ_0}\|$

Q_0 **proyección ortogonal** de P sobre r: $\overrightarrow{Q_0P} \perp r$

$\cdot \vec{n}$

NULO

$$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PQ_0} + \overrightarrow{Q_0A} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PQ_0} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{Q_0A} \cdot \vec{n} \quad \Rightarrow$$

$$\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{PQ_0} \cdot \vec{n} = \|\overrightarrow{PQ_0}\|\,\|\vec{n}\|\underbrace{\cos(\alpha)}_{1} \qquad |\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}| = \|\overrightarrow{PQ_0}\|\|\vec{n}\| \Rightarrow \|\overrightarrow{PQ_0}\| = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

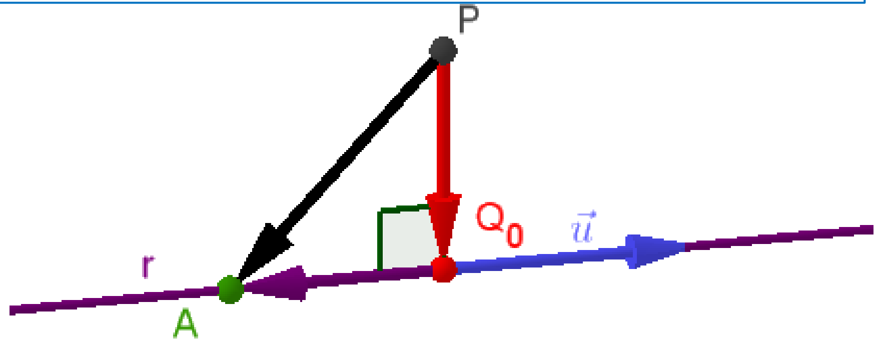
$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Distancia de un punto a una recta en el espacio R^3.

Producto escalar usual. Distancia entre el **punto** $P=(1,0,1)$ y la **recta** $r \equiv \begin{cases} 2x+z-6=0 \\ 3x-y-1=0 \end{cases}$

Producto escalar usual ⇒ **Base canónica ortonormal.**

$$d(P,r)=\frac{\|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$



Necesitamos el **punto** A y el **vector director** $\vec{u}$

De **implícitas** a **paramétricas**:

$$r\equiv\begin{cases}2x+z-6=0\\3x-y-1=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}z=-2x+6\\y=3x-1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=\mu=0+1\cdot\mu\\y=3\mu-1=-1+3\cdot\mu\\z=-2\mu+6=6-2\cdot\mu\end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l}\vec{u}=(1,3,-2)\\A=(0,-1,6)\end{array}$$

PARAMÉTRICAS

Aplicamos la fórmula:

$$\overrightarrow{PA}=A-P=(0,-1,6)-(1,0,1)=(-1,-1,5)$$

$$\overrightarrow{PA}\times\vec{u}=\begin{Vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\-1&-1&5\\1&3&-2\end{Vmatrix}=-13\vec{e}_1+3\vec{e}_2-2\vec{e}_3=(-13,3,-2)$$

P.ESCALAR USUAL

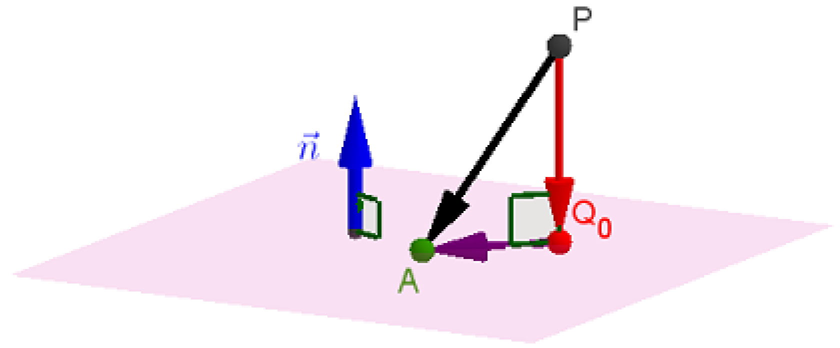
$$d(P,r)=\frac{\|\overrightarrow{PA}\times\vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}=\frac{\|(-13,3,-2)\|}{\|(1,3,-2)\|}=\frac{\sqrt{(-13)^2+(3)^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+3^2+(-2)^2}}=\boxed{\sqrt{13}}$$

Distancia de un punto a un plano en el espacio R^3.

Datos: Punto P y plano π

Plano π : Punto A y vector normal, $\vec{n}$ $\Rightarrow$

$$d(P,\pi) = \frac{|\vec{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Punto $P = (x_0, y_0, z_0)$

Plano $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$

$\vec{n} = (\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c})$ ¡OJO!. Si la base es ORTONORMAL

$$d(P,\pi) = \frac{|\mathrm{a}x_0 + \mathrm{b}y_0 + cz_0 + d|}{\|(a,b,c)\|}$$

Lo que hacíamos en el plano

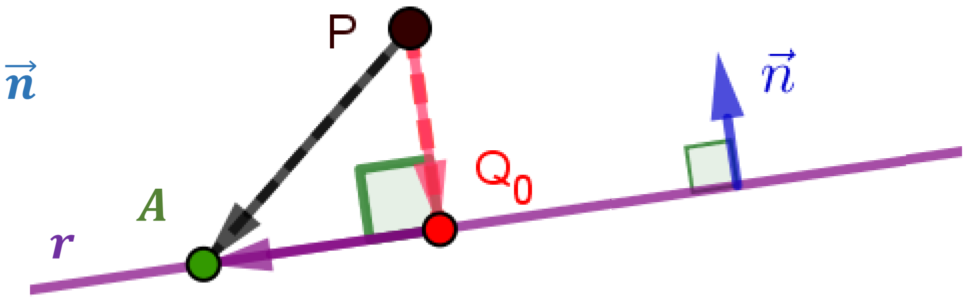
Datos: Punto P y recta r.

Recta r : Punto A y vector normal, $\vec{n}$

Teorema: $d(P,r) = d(P,Q_0) = \|\vec{PQ_0}\|$

Q_0 proyección ortogonal de P sobre r: $\vec{Q_0P} \perp r$

NULO



$$\vec{PA} = \vec{PQ_0} + \vec{Q_0A} \xrightarrow{\cdot\vec{n}} \vec{PA}\cdot\vec{n} = \vec{PQ_0}\cdot\vec{n} + \vec{Q_0A}\cdot\vec{n}$$

$$\vec{PA}\cdot\vec{n} = \vec{PQ_0}\cdot\vec{n} = \|\vec{PQ_0}\|\,\|\vec{n}\|\underbrace{\cos(\alpha)}_{1}$$

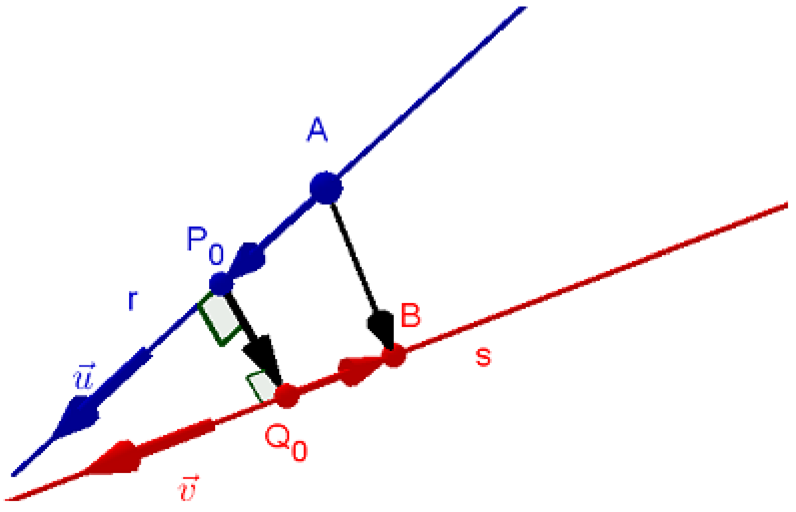
$$|\vec{PA}\cdot\vec{n}| = \|\vec{PQ_0}\|\|\vec{n}\| \Rightarrow \|\vec{PQ_0}\| = \frac{|\vec{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

$$d(P,r) = \frac{|\vec{PA}\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio R^3.

Dos rectas en R^3 **se cruzan** si NO se cortan NI son paralelas.

Datos: $r \equiv \begin{cases} \text{Punto } A \\ \text{Vector director } \vec{u} \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} \text{Punto } B \\ \text{Vector director } \vec{v} \end{cases}$



Teorema: $d(r,s) = d(P_0, Q_0)$

$P_0 \in r, Q_0 \in s$ tales que: $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp r$, $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp s$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP_0} + \overrightarrow{P_0Q_0} + \overrightarrow{Q_0B} \qquad \boxed{\cdot\, \vec{u} \times \vec{v}}$$

NULO

$$\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = \overrightarrow{AP_0} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \overrightarrow{P_0Q_0} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) + \overrightarrow{Q_0B} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right| = \left|\overrightarrow{P_0Q_0} \cdot (\vec{u} \times \vec{v})\right| = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| \underbrace{|\cos(\alpha)|}_{1}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right| = \left\|\overrightarrow{P_0Q_0}\right\| \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|$$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right]\right|}{\left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\|}}$$

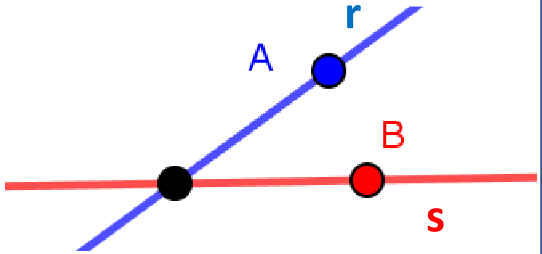
Observación: ¿Y si no hemos comprobado previamente si las rectas se cruzan?

1) Si se cortan.

$\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}$ son coplanarios

$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}\right] = 0 \;\Rightarrow\; d(r,s) = 0$

LA FÓRMULA FUNCIONA

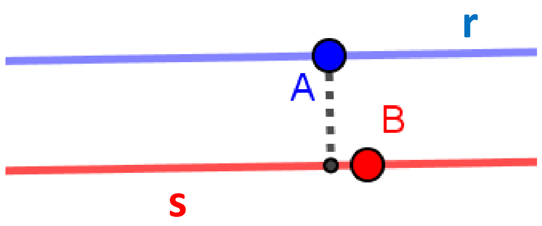


2) Si son paralelas.

$\vec{u} \,||\, \vec{v} \;\Rightarrow\; \left\|\vec{u} \times \vec{v}\right\| = 0$

LA FÓRMULA NO APLICA

$d(r,s) = d(A,s)$



Distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio R^3. Ejemplo (M.1)

Ejemplo. Producto escalar usual. **Distancia** entre las **rectas** $\begin{cases} r \equiv (x,y,z) = (0,1,2) + \alpha(2,0,-1) \\ s \equiv (x,y,z) = (3,4,2) + \beta(0,1,-1) \end{cases}$

$$\boxed{d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}}$$

Las **fórmulas usuales** de los **productos mixto** y **vectorial** sólo son válidas en una **base ortonormal**.

Producto escalar usual $\Rightarrow$ Base canónica ortonormal

Podemos usar la fórmula:

$$r \equiv (x,y,z) = (0,1,2) + \alpha(2,0,-1) \quad \Rightarrow \quad A = (0,1,2), \quad \vec{u} = (2,0,-1)$$

$$s \equiv (x,y,z) = (3,4,2) + \beta(0,1,-1) \quad \Rightarrow \quad B = (3,4,2), \quad \vec{v} = (0,1,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (3,4,2) - (0,1,2) = (3,3,0)$$

$$\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\right| = \left\|\begin{matrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right\| = |9| = 9$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left\|\begin{matrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{matrix}\right\| = 1 \cdot \vec{e}_1 + 2 \cdot \vec{e}_2 + 2 \cdot \vec{e}_3 = (1,2,2)$$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\overrightarrow{AB}, \vec{u}, \vec{v}]\right|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|} = \frac{|9|}{\|(1,2,2)\|} = \frac{|9|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 3$$

P.ESCALAR USUAL

Distancia entre dos rectas que se cruzan en el espacio R^3. Ejemplo (M.2)

Ejemplo. Producto escalar usual. **Distancia** entre las **rectas** $\begin{cases} r \equiv (x,y,z) = (0,1,2) + \alpha(2,0,-1) \\ s \equiv (x,y,z) = (3,4,2) + \beta(0,1,-1) \end{cases}$

Idea: Hallar los puntos $P_0 \in r$, $Q_0 \in s$ tales que $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp r$, $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp s$.

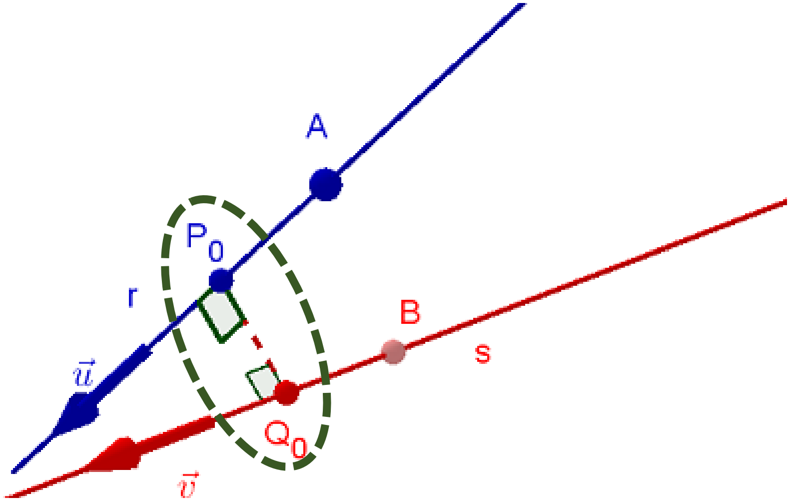
Por tanto $d(r,s) = \|\overrightarrow{Q_0P_0}\|$

Pasos: 1) Expresamos P_0 en función de α y Q_0 en función de β.

2) Imponemos que $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp r$, $\overrightarrow{Q_0P_0} \perp s$, es decir,

$\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \vec{u}=0$ y $\overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \vec{v}=0$

3) $d(r,s) = \|\overrightarrow{Q_0P_0}\|$



$P_0 = (2\alpha, 1, 2-\alpha)$ $\quad\quad \vec{u} = (2,0,-1)$

$Q_0 = (3, 4+\beta, 2-\beta)$ $\quad\quad \vec{v} = (0,1,-1)$

$\overrightarrow{Q_0P_0} = Q_0 - P_0 = (3, 4+\beta, 2-\beta) - (2\alpha, 1, 2-\alpha) = (3-2\alpha, 3+\beta, -\beta+\alpha) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{Q_0P_0} = (1,2,2)}$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \vec{u}=0 \quad \Rightarrow (3-2\alpha, 3+\beta, -\beta+\alpha) \cdot (2,0,-1) = 0 \Rightarrow -5\alpha + \beta + 6 = 0 \\ \overrightarrow{Q_0P_0} \cdot \vec{v}=0 \quad \Rightarrow (3-2\alpha, 3+\beta, -\beta+\alpha) \cdot (0,1,-1) = 0 \Rightarrow -\alpha + 2\beta + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\alpha = 1, \beta = -1}$$

$d(r,s) = \|\overrightarrow{P_0Q_0}\| = \|(1,2,2)\| \underset{\text{P.ESCALAR USUAL}}{=} \sqrt{1^2+2^2+2^2} = 3$

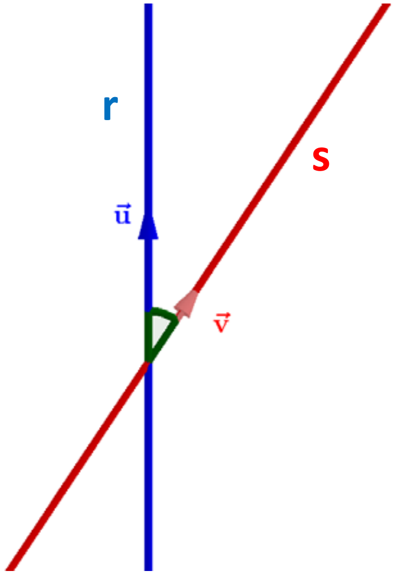
1) Método válido para **CUALQUIER** producto escalar.
2) **Además** de la **distancia** se hallan P_0 y Q_0

Ángulo entre dos variedades.

Fijamos un espacio afín euclídeo ***E*** asociado a un espacio vectorial ***V*** dotado de un producto escalar.

Ángulo entre **dos vectores**: $\angle(\vec{u},\vec{v}) = arcos\left(\dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$

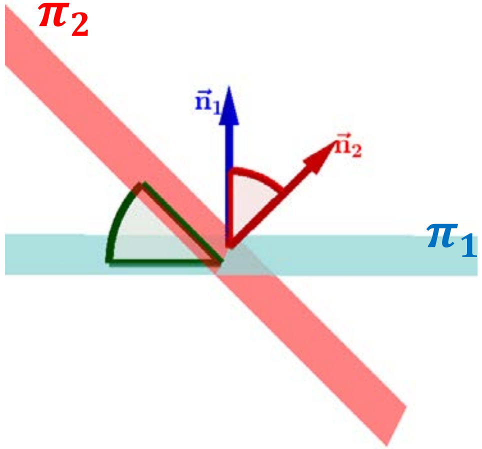
Ángulo entre dos rectas



$$\angle(r,s) = \angle(\vec{u},\vec{v})$$

$$\angle(r,s) = arccos\left(\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}\right)$$

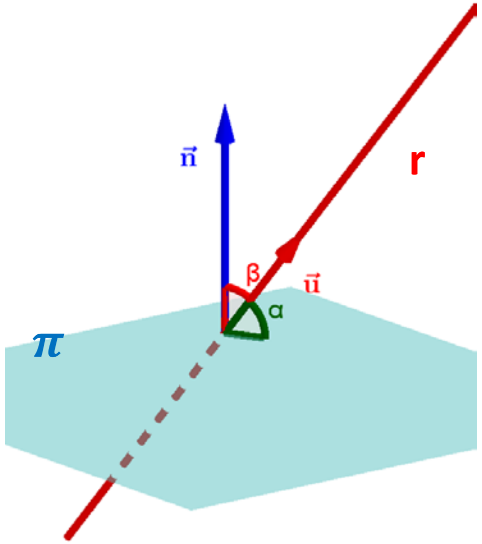
Ángulo entre dos planos



$$\angle(\pi_1,\pi_2) = \angle(\vec{n}_1,\vec{n}_2)$$

$$\angle(\pi_1,\pi_2) = arccos\left(\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\,\|\vec{n}_2\|}\right)$$

Ángulo entre recta y plano



$$\angle(\pi,r) = 90^o - \angle(\vec{n},\vec{u})$$

$$\angle(\pi,r) = arcsin\left(\frac{\vec{n}\cdot\vec{u}}{\|\vec{n}\|\,\|\vec{u}\|}\right)$$