

# Álgebra Lineal II

**TEMA IV- Cónicas y cuádricas.**

**Capítulo 1. Cónicas.**

## **Introducción a las cuádricas.**

*Luis Fuentes García (2022).*



# Matriz asociadas a una cuádrica.

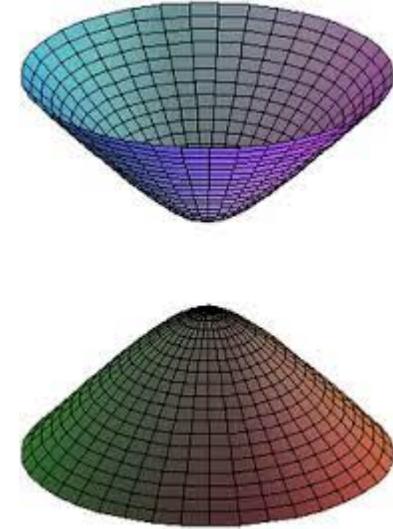
**Cuádrica** = Superficie en el espacio definida por una **ecuación de grado 2**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}$$

**Matriz asociada** a la cuádrica.

$$T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

**Matriz de términos cuadráticos**



$$(a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{12}, a_{13}, a_{23}) \neq (0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

$$\overbrace{a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz}^{\text{grado 2}} + \overbrace{2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z}^{\text{grado 1}} + \overbrace{a_{44}}^{\text{grado 0}} = 0$$

Ecuación matricial (I):

$$(x \ y \ z \ 1)A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Notación abreviada:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X^t A X = 0$$



# Método para clasificar una cuádrlica.

Fórmula de **cambio de referencia**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{CB} & r \\ 0 & s \\ 0 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

NUEVO ORIGEN
CAMBIO DE BASE

$X = QX''$

Ecuación en la **referencia inicial**:

$$X^t A X = 0$$

Ecuación en la **nueva referencia**:

$$X''^t A'' X'' = 0$$

**Teorema.** Las **matrices asociadas** a **una misma CUÁDRICA** respecto a **diferentes referencias** son **congruentes**:  $A'' = Q^t A Q$

Para **clasificar** una cuádrlica **diagonalizamos** su **matriz asociada** por **congruencia**.

**Restricciones:**

La **CUARTA** fila (y columna) **NO** puede ser **sumada** a las demás.

La **CUARTA** fila (y columna) **NO** puede ser **cambiada de posición**.

La **CUARTA** fila (y columna) **NO** puede ser **multiplicada por un número**.

**Consecuencia:** a **veces** sólo pueden diagonalizarse las **tres primeras filas y columnas**.

Signatura A	A SI diagonaliza.
+, +, +; +	Elipsoide imaginario
+, +, +; 0	Cono imaginario
+, +, +; -	Elipsoide real
+, +, -; +	Hiperboloide de 2 hojas
+, +, -; 0	Cono real
+, +, -; -	Hiperboloide de 1 hoja
+, +, 0; +	Cilindro elíptico imaginario
+, +, 0; 0	Planos imaginarios que se cortan
+, +, 0; -	Cilindro elíptico real
+, -, 0; +	Cilindro hiperbólico
+, -, 0; 0	Planos reales que se cortan
+, 0, 0; +	Planos paralelos imaginarios
+, 0, 0; 0	Plano doble
+, 0, 0; -	Planos paralelos reales

Una vez **diagonalizada**:

Puede **cambiarse toda la matriz de signo**.

Pueden **reordenarse los tres primeros signos**.

Signatura T	A NO diagonaliza.
+, +, 0	Paraboloide elíptico
+, -, 0	Paraboloide hiperbólico
+, 0, 0	Cilindro parabólico

