Álgebra Lineal II

TEMA II- Espacios vectoriales euclídeos.

Capítulo 3. Transformaciones ortogonales.

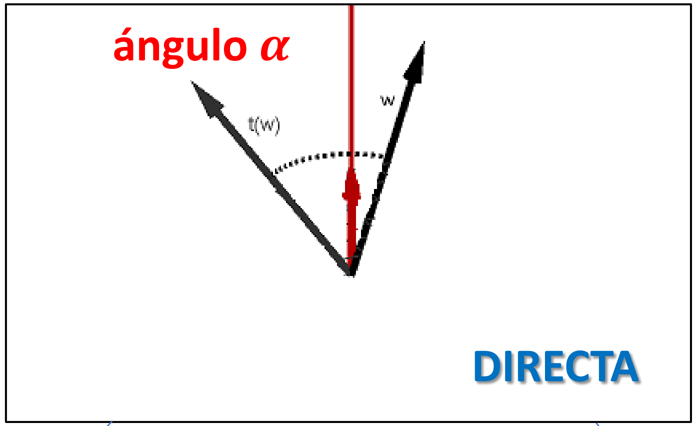
Clasificación de transformaciones ortogonales en el espacio.

Luis Fuentes García (2022).

Clasificación de transformaciones ortogonales en el espacio.

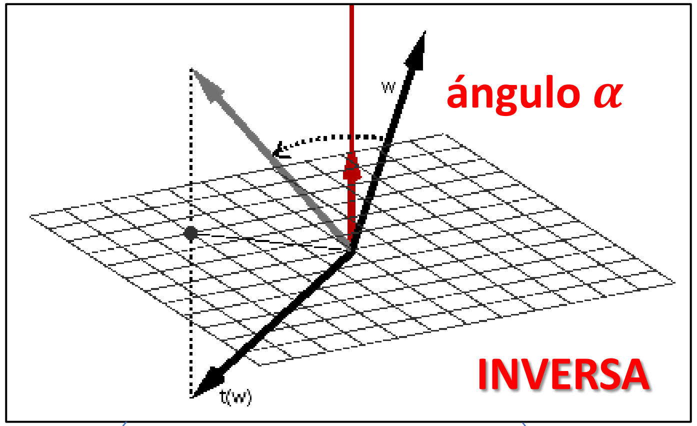
Teorema fundamental: Toda **transformación ortogonal** en R^3 es:

un **giro**

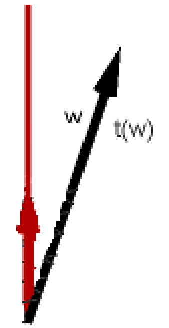


ó

un **giro compuesto** con una **simetría** respecto al **plano perpendicular al eje de giro**

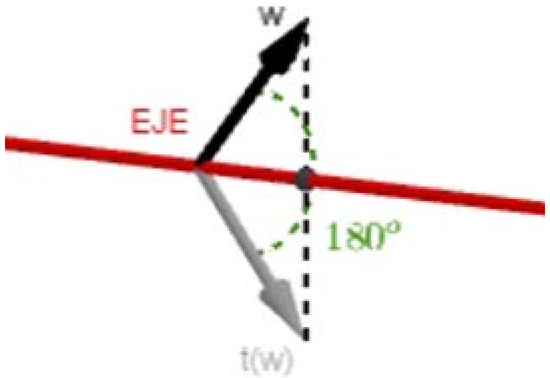


$\alpha = 0^o$



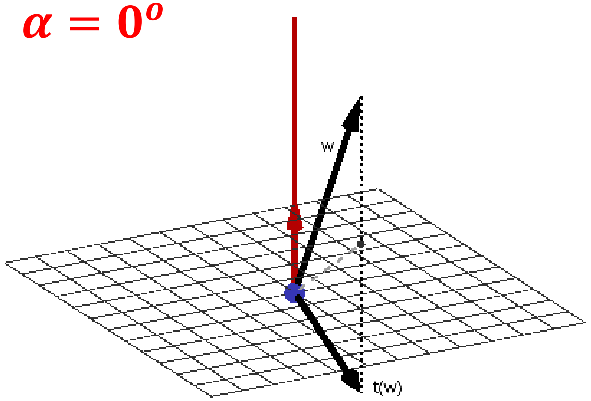
Giro de ángulo 0 = Identidad

$\alpha = 180^o$



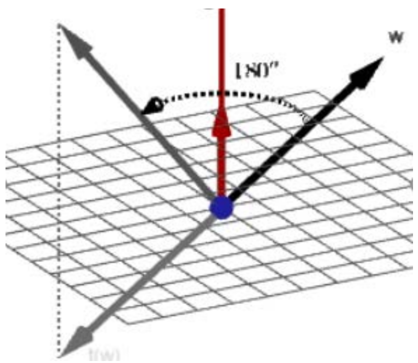
Simetría respecto a una recta.

$\alpha = 0^o$



Simetría respecto a un plano.

$\alpha = 180^o$



Simetría respecto al origen.

Clasificación de transformaciones ortogonales en el espacio: demostración (I).

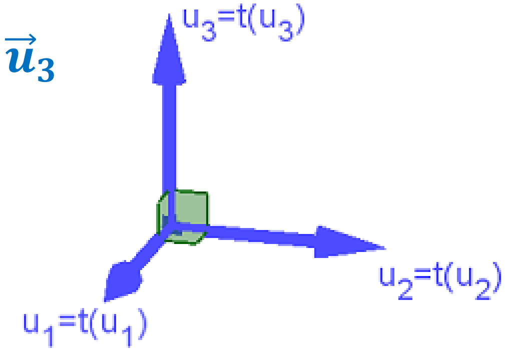
TRES autovalores REALES: $\lambda_1 = \pm 1, \lambda_2 = \pm 1, \lambda_3 = \pm 1$

Base ORTONORMAL de autovectores: $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

CASO 1. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = +1$

$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, t(\vec{u}_2) = \vec{u}_2, t(\vec{u}_3) = \vec{u}_3$

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

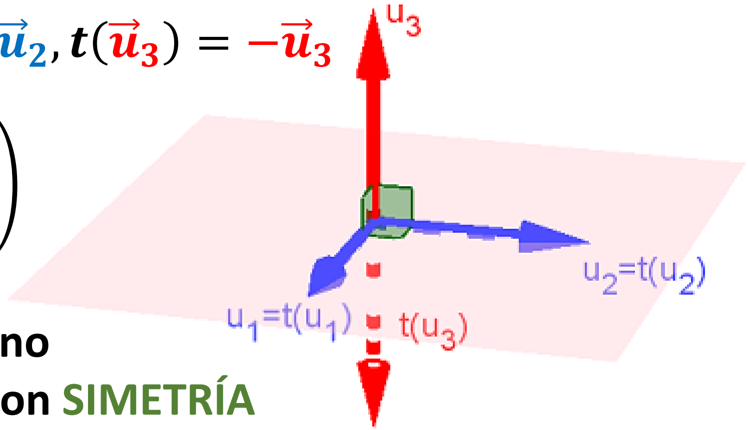


Identidad = GIRO 0º

CASO 2. $\lambda_1, \lambda_2 = +1, \ \lambda_3 = -1$

$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, t(\vec{u}_2) = \vec{u}_2, t(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



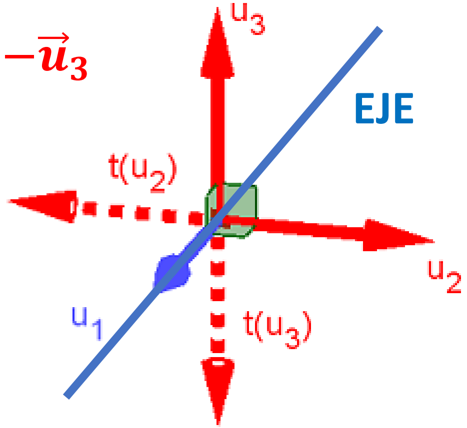
Simetría respecto plano

GIRO 0º compuesto con SIMETRÍA

CASO 3. $\lambda_1, = +1, \ \lambda_2, \lambda_3 = -1$

$t(\vec{u}_1) = \vec{u}_1, t(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2, t(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



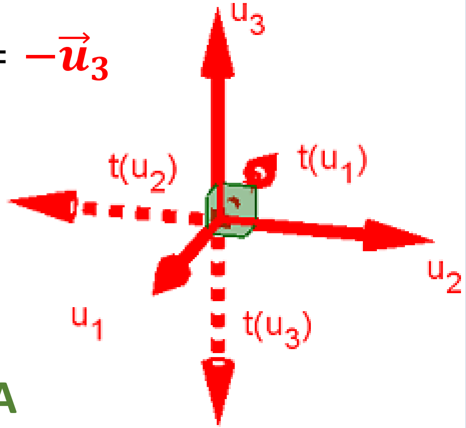
SIMETRÍA respecto RECTA

GIRO 180º

CASO 4. $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 = -1$

$t(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1, t(\vec{u}_2) = -\vec{u}_2, t(\vec{u}_3) = -\vec{u}_3$

$$T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$



-Id = Simetría origen

GIRO 180º compuesto con SIMETRÍA

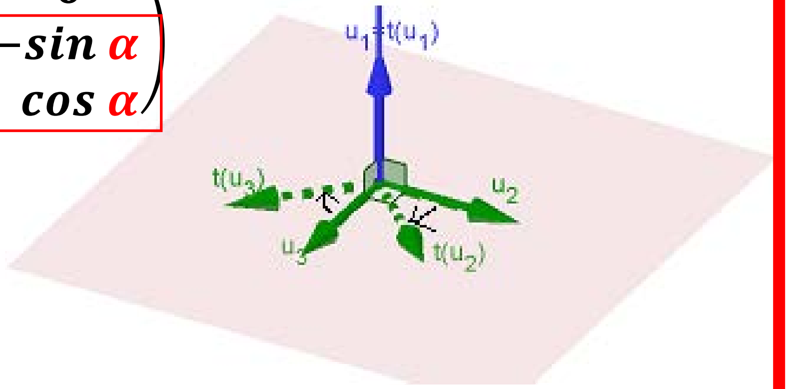
Clasificación de transformaciones ortogonales en el espacio: demostración (II).

UN autovalor REAL: $\lambda_1 = \pm 1$ y dos COMPLEJOS

Base ORTONORMAL $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ $\vec{u}_1$ autovector

CASO 5. $\lambda_{1,} = +1$ $\qquad t(u_1) = u_1$

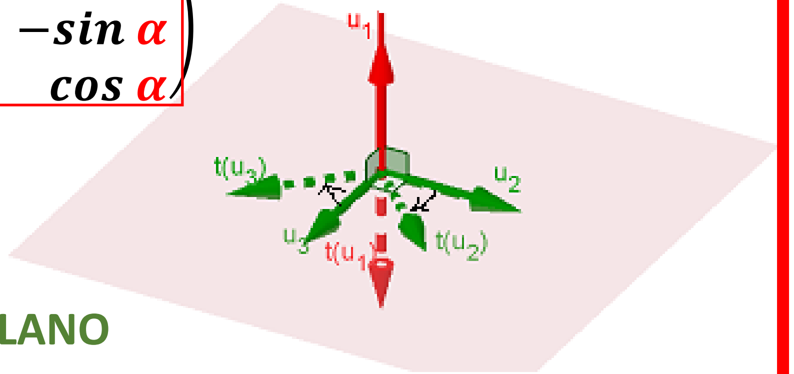
$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



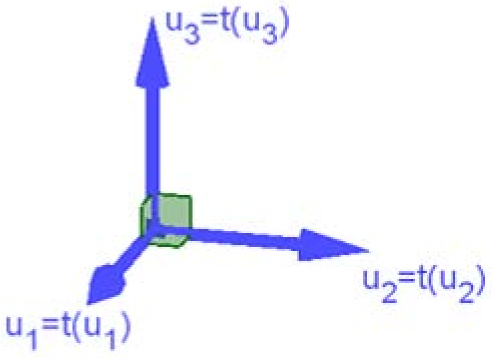
GIRO de ángulo α

CASO 6. $\lambda_1 = -1$ $\qquad t(\vec{u}_1) = -\vec{u}_1$

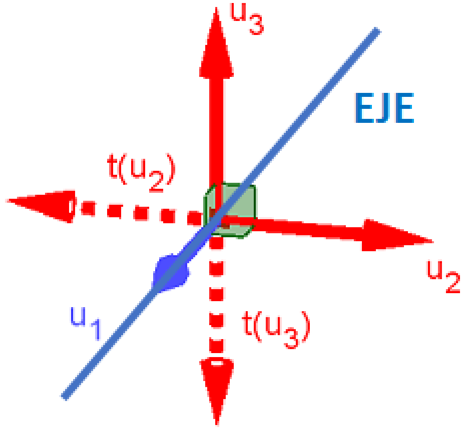
$$T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$



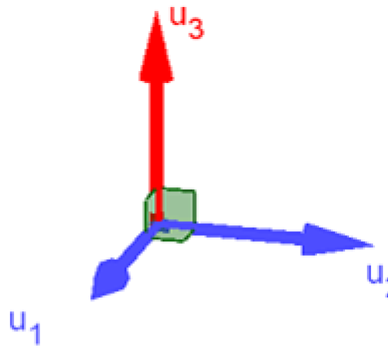
GIRO de ángulo α
compuesto con
SIMETRÍA respecto PLANO



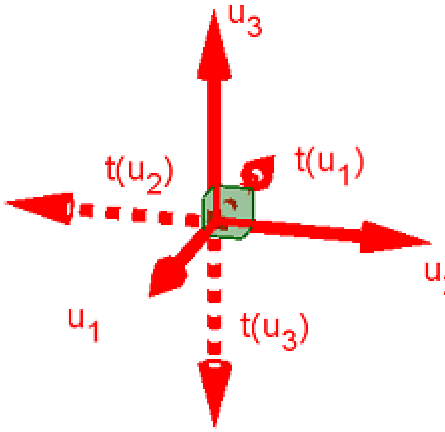
GIRO 0º
Identidad



GIRO 180º
SIMETRÍA respecto RECTA



Simetría respecto plano
GIRO 0º comp. SIMETRÍA



-Id = Simetría origen
GIRO 180º comp. SIMETRÍA

Método rápido de clasificación de transformaciones ortogonales en R^3.

Dato: T_C

Usamos que: $T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}$ $\quad det(T_B) = det(T_C)$ $\quad traza(T_B) = traza(T_C)$

GIRO de ángulo α	
$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\alpha = 0^o$ $\cos\alpha = 1$ $traza = 3$
$det = 1$ $traza = 1 + 2\cos\alpha$	$\alpha = 180^o$ $\cos\alpha = -1$ $traza = -1$

GIRO compuesto con Simetría	
$T_B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$	$\alpha = 0^o$ $\cos\alpha = 1$ $traza = 1$
$det = -1$ $traza = -1 + 2\cos\alpha$	$\alpha = 180^o$ $\cos\alpha = -1$ $traza = -3$

DIRECTA $det(T_C) = +1$	GIRO de ángulo α $\alpha = \pm\arccos((traza(T_C - 1))/2)$ Semieje: $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ autovector asociado a **+1**	**Casos Particulares** $traza = 3$ GIRO 0º $traza = -1$ GIRO 180º
INVERSA $det(T_C) = -1$	GIRO de ángulo α compuesto con Simetría respecto al plano ortogonal al eje $\alpha = \pm\arccos((traza(T_C + 1))/2)$ Semieje: $L\{\vec{u}_1\}, \vec{u}_1$ autovector asociado a **-1** Plano de simétría $\{\vec{u}_1\}^{\perp}$	**Casos Particulares** $traza = 1$ (GIRO 0º) Simetría respecto plano $traza = -3$ (GIRO 180º) Simetría respecto origen

SIGNO del ángulo

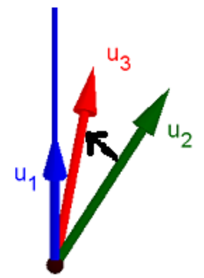
$signo(\alpha) = signo(|M_{CD}|)$

$D = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$\vec{u}_1$ semieje

$\vec{u}_2$ (no paralelo a $\vec{u}_1$)

$\vec{u}_3 = T_C \vec{u}_2$



Ejemplo 1. En $\boldsymbol{R}^3$ en las **condiciones usuales**, se considera el endomorfismo $\boldsymbol{t}$ de matriz asociada en la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Probar que es una **transformación ortogonal**. **Clasificarla** y **describirla geométricamente**.

1. C es **ortonormal**, porque el **producto escalar es el usual** $\Rightarrow$ $\boxed{\text{t es ortogonal} \Leftrightarrow T_C T_C^t = Id}$ ✓

2. **Determinante de T_C**: **1**, **GIRO** ó **-1 GIRO compuesto con SIMETRÍA** $\quad det(T_C) = +1 \Rightarrow$ $\boxed{\text{GIRO}}$

3. Calculamos el **ángulo α** :

$$\alpha = \pm arcos\left(\frac{tr(T_C)-1}{2}\right) = arcos\left(\frac{1-1}{2}\right) = arcos(0) = \pm 90^o$$

4. Calculamos el **semieje de giro** generado por el **autovector $\vec{u}_1$ asociado al 1**.

$$(T_C - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -x - \frac{1}{\sqrt{2}}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{\sqrt{2}}z = 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \quad \boxed{\vec{u}_1 = (0,1,1)}$$

Se trata de un GIRO de +90º y semieje generado por el vector (0,1,1).

5. **Signo del ángulo**:

i) **Semieje**: $\vec{u}_1 = (0,1,1)$

ii) **Vector cualquiera** independiente de $\vec{u}_1$:

iii) $\vec{u}_3 = T_C\, \vec{u}_2 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^t$

$D = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$

$$\det(M_{CD}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{SIGNO +}$$

Ejemplo 2. En R^3 en las **condiciones usuales**, se considera el endomorfismo t de matriz asociada en la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Probar que es una **transformación ortogonal**. **Clasificarla** y **describirla geométricamente**.

1. C es **ortonormal**, porque el **producto escalar es el usual** $\Rightarrow$ **t es ortogonal** $\Leftrightarrow T_C T_C^t = Id$ ✓

2. **Determinante de T_C**: **1**, **GIRO** ó **-1 GIRO compuesto con SIMETRÍA** $\quad det(T_C) = -1 \Rightarrow$ **GIRO compuesto con SIMETRÍA**

3. Calculamos el **ángulo α** :

$$\alpha = \pm arcos\left(\frac{tr(T_C)+1}{2}\right)$$

Como el ángulo es nulo. NO HAY GIRO. Es simplemente una SIMETRÍA respecto a un PLANO.

4. Calculamos el **plano de simetría** como los **autovectores asociados al 1.**

$$(T_C - Id)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x - y - z = 0}$$

Se trata de una SIMETRÍA respecto al PLANO de ecuación implícita $x - y - z = 0$