Álgebra Lineal II

TEMA I- Aplicaciones bilineales.

Capítulo 1. Formas bilineales y formas cuadráticas.

Clasificación de formas cuadráticas.

Luis Fuentes García (2022).

Núcleo y rango de una forma cuadrática.

Definición: Sea una forma cuadrática $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{R}$ asociada a una **forma bilineal simétrica** $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{U} \times \boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{R}$.

Se llama núcleo de $\boldsymbol{\omega}$ a: $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{conj}(\boldsymbol{U})$

Propiedades:

1) $\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\omega})$ es un **subespacio vectorial** de $\boldsymbol{U}$.

2) **Matricialmente.**

$$\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{conj}(\boldsymbol{U}) = \{\vec{\boldsymbol{v}} \in \boldsymbol{U} | \boldsymbol{f}(\vec{\boldsymbol{u}}, \vec{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{0} \text{ para todo } \vec{\boldsymbol{u}} \in \boldsymbol{U}\} = \{(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{U} | (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}}^{t} \underbrace{\boxed{\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{B}}}}_{=\vec{\mathbf{0}}} = \mathbf{0} \text{ para todo } (\boldsymbol{u})_{\boldsymbol{B}}\}$$

$$\boxed{\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\omega}) = \{(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{B}} \in \boldsymbol{U} | \boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{v})_{\boldsymbol{B}} = \vec{\mathbf{0}}\}}$$

3) $\mathbf{dim}\big(\boldsymbol{ker}(\boldsymbol{\omega})\big) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{rango}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}}) = \mathbf{dim}(\boldsymbol{U}) - \boldsymbol{rango}(\boldsymbol{\omega})$

Definición: Dada una forma cuadrática $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{U} \rightarrow \boldsymbol{R}$ se llama $\mathbf{rango}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbf{rango}(\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{B}})$

No depende de la base, porque **matrices asociadas en distintas bases son congruentes** y la **congruencia conserva el rango**.

Clasificación por rango:

$\mathbf{rango}(\boldsymbol{\omega}) = \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{U}) \Leftrightarrow$ **NO DEGENERADA**

$\mathbf{rango}(\boldsymbol{\omega}) < \boldsymbol{dim}(\boldsymbol{U}) \Leftrightarrow$ **DEGENERADA**

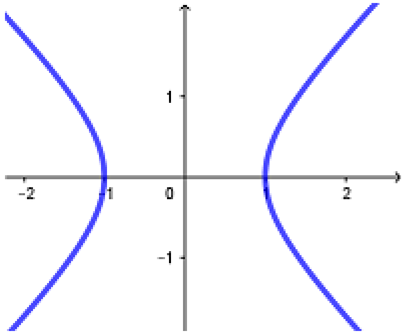
Formas cuadráticas degeneradas y no degeneradas.

Definición: Sea una forma cuadrática $\omega: U \to R$ asociada a una forma bilineal simétrica $f: U \times U \to R$.

Se llama núcleo de ω a: $ker(\omega) = conj(U)$

$$x^2 - y^2 - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

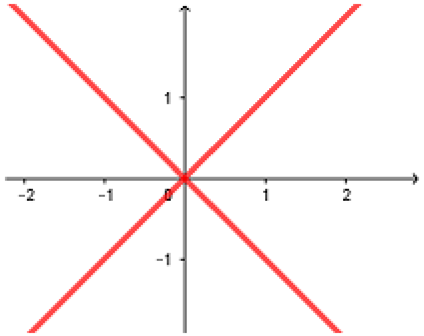
Rango 3



NO DEGENERADA

$$x^2 - y^2 = 0$$
$$(x - y)(x + y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

Rango 2



DEGENERADA

Definición: Dada una forma cuadrática $\omega: U \to R$ se llama $\mathbf{rango}(\omega) = \mathbf{rango}(F_B)$

No depende de la base, porque **matrices asociadas en distintas bases son congruentes** y la **congruencia conserva el rango**.

Clasificación por rango:

$\mathbf{rango}(\omega) = dim(U) \Leftrightarrow$ **NO DEGENERADA**

$\mathbf{rango}(\omega) < dim(U) \Leftrightarrow$ **DEGENERADA**

Diagonalización de formas cuadráticas (I).

Definición: Una forma cuadrática $\boldsymbol{\omega}: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{R}$ es **diagonalizable** si existe una base $\boldsymbol{B}$ tal que $\boldsymbol{F_B}$ es **diagonal**.

1) Las **formas cuadráticas** cambian de base por **congruencia**.

$$F_{B'} = M_{BB'}^t F_B M_{BB'}$$

2) Toda **matriz simétrica** es **diagonalizable por congruencia**.

$\Rightarrow$ **Toda forma cuadrática es diagonalizable.**

Interpretaciones:

Si $F_B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$ es diagonal:

1)

$$\omega(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)_B F_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_B = d_1 x_1^2 + d_2 x_2^2 + \cdots + d_n x_n^2$$

Se expresa como "suma de cuadrados"

2) $\boldsymbol{B} = \{\vec{u_1}, \vec{u_2}, \dots, \vec{u_n}\}$

$\boldsymbol{F_B}$ es **diagonal** $\Leftrightarrow$ $(F_B)_{ij} = 0$ si $i \neq j$ $\Leftrightarrow$ $f(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = 0$ si $i \neq j$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u}_i$ y $\vec{u}_j$ son **conjugados** si $i \neq j$

$\boldsymbol{B}$ se llama una **base de vectores conjugados** si cada pareja de vectores de ella son conjugados entre si.

$\boldsymbol{B}$ es una **base de vectores conjugados** $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{F_B}$ es **diagonal**

Diagonalización de formas cuadráticas (II).

Ejemplo: Dada la forma cuadrática $\omega: R^3 \to R$ definida como $\omega(x,y,z) = x^2 + 2xy + 3z^2 + 2xz + 2yz$ hallar una base de vectores conjugados.

Usaremos que:

B es una **base de vectores conjugados** $\Leftrightarrow F_B$ es diagonal

Las **formas cuadráticas** cambian de base por congruencia.

Diagonalizaremos F_C por congruencia

$$F_C = \begin{array}{cc} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix} \end{array}$$

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1) \quad \mu_{31}(-1)]{H_{21}(-1) \quad H_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = F_B$$

Para hallar B tenemos en cuenta que: $F_B = M_{CB}^t F_C M_{CB}$ **Matriz de paso de la congruencia por columna.**

Hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columna hechas en la congruencia.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1) \quad \mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Base de vectores conjugados

$$B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (-1,0,1)\}$$

En la base B:

$$\omega(x', y', z') = (x' \quad y' \quad z') \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = x'^2 - y'^2 + 2z'^2$$

"suma de cuadrados"

Signatura de una forma cuadrática (I).

Toda **forma cuadrática** $\omega: U \to R$ es **diagonalizable** $\Leftrightarrow \exists B$ tal que F_B es **diagonal**.

$$F_B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Se **diagonaliza** por **congruencia**.

Puede conseguirse que en la **diagonal** solo aparezcan **+1**,**0** ó **-1**

$$F_B = \begin{pmatrix} \overbrace{+ \ \ddots \ +}^{p} & & \\ & \overbrace{- \ \ddots \ -}^{q} & \\ & & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

Definición: Signatura de una forma cuadrática $\omega = \mathbf{sign}(\omega) = (\mathbf{p}, \mathbf{q})$

$\mathbf{p}$ número de signos **+** en la **forma diagonal** F_B

$\mathbf{q}$ número de signos **-** en la **forma diagonal** F_B

Ejemplos: Formas cuadráticas: $\omega: R^2 \to R$

$$\omega((x,y)) = 2xy \qquad F_c = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1/2)]{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{sign} \\ (1, \ 1) \end{array}$$

$$\omega((x,y)) = x^2 + 4xy + 4y^2 \qquad F_c = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-2)]{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{sign} \\ (1, 0) \end{array}$$

$$\omega((x,y)) = x^2 + 2xy + 5y^2 \qquad F_c = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} x & y \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} x \\ y \end{array} \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1)]{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{c} \mathbf{sign} \\ (2, 0) \end{array}$$

Signatura de una forma cuadrática (II).

Toda forma cuadrática $\omega: U \to R$ es **diagonalizable** $\Leftrightarrow \exists B$ tal que F_B es **diagonal**.

$$F_B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Se **diagonaliza** por **congruencia**.

Puede conseguirse que en la **diagonal** solo aparezcan **+1**,**0** ó **-1**

$$F_B = \begin{pmatrix} \overbrace{+ \ \ddots \ +}^{p} & & \\ & \overbrace{- \ \ddots \ -}^{q} & \\ & & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

Definición: Signatura de una forma cuadrática $\omega = \mathbf{sign}(\omega) = (\mathrm{p}, \mathrm{q})$

- **p** número de signos **+** en la **forma diagonal** F_B
- **q** número de signos **-** en la **forma diagonal** F_B

Interpretación:

$$B = \{\overrightarrow{\mathrm{u}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}_p}, \overrightarrow{\mathrm{u}_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}_{p+q}}, \overrightarrow{\mathrm{u}_{p+q+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}_n}\} \qquad \vec{x} = (x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}, x_{p+q+1}, \ldots, x_n)_B \neq 0$$

$$\omega(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n) F_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2$$

$U_+ = L\{\overrightarrow{\mathrm{u}_1}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}_p}\}$	$\vec{x} \in U_+ \Rightarrow \vec{x} = (x_1, \ldots, x_p, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 > 0$	**POSITIVO**
$U_- = L\{\overrightarrow{u_{p+1}}, \ldots, \overrightarrow{u_{p+q}}\}$	$\vec{x} \in U_- \Rightarrow \vec{x} = (0, \ldots, 0, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}, 0, \ldots, 0) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = -x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 < 0$	**NEGATIVO**
$U_o = L\{\overrightarrow{\mathrm{u}_{p+q+1}}, \ldots, \overrightarrow{\mathrm{u}_n}\}$	$\vec{x} \in U_0 \Rightarrow \vec{x} = (0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, x_{p+q+1}, \ldots, x_n) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = 0$	**NULO**

La **signatura** de una **forma cuadrática** da **información** sobre el **signo** de la imagen de los vectores.

Clasificación de formas cuadráticas (I).

Base $\quad B = \{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}, \overrightarrow{u_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{u_{p+q}}, \overrightarrow{u_{p+q+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$ $\quad F_B$ es **diagonal**.

$U_+ = L\{\overrightarrow{u_1}, \dots, \overrightarrow{u_p}\}$	$\vec{x} \in U_+ \ \Rightarrow \omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 > 0$	**POSITIVO**
$U_- = L\{\overrightarrow{u_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{u_{p+q}}\}$	$\vec{x} \in U_- \ \Rightarrow \omega(\vec{x}) = -x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 < 0$	**NEGATIVO**
$U_o = L\{\overrightarrow{u_{p+q+1}}, \dots, \overrightarrow{u_n}\}$	$\vec{x} \in U_0 \ \Rightarrow \omega(\vec{x}) = 0$	**NULO**

$$F_B = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} + & & \\ & \ddots & \\ & & + \end{matrix}}^{p} & & \\ & \overbrace{\begin{matrix} - & & \\ & \ddots & \\ & & - \end{matrix}}^{q} & \\ & & \begin{matrix} 0 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}$$

Sea U un espacio vectorial con $\dim(U) = n$, $\omega: U \to R$ una forma cuadrática y B una base tal que F_B es **diagonal**.

ω es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow \ \text{sign}(\omega) = (n, 0) \ \Leftrightarrow \ \omega(\vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$

ω es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow \ \text{sign}(\omega) = (0, n) \ \Leftrightarrow \ \omega(\vec{x}) < 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$

ω es **SEMIDEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow \ \text{sign}(\omega) = (p, 0), \quad p < n \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \omega(\vec{x}) \geq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \ \vec{y} \neq 0 \end{cases}$

ω es **SEMIDEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow \ \text{sign}(\omega) = (0, q), \quad q < n \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \omega(\vec{x}) \leq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \ \vec{y} \neq 0 \end{cases}$

ω es **INDEFINIDA** $\Leftrightarrow \ \text{sign}(\omega) = (p, q), \quad q, p \geq 1 \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} \omega(\vec{x}) > 0, & \text{para algún } \ \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) < 0, & \text{para algún } \ \vec{y} \neq 0 \end{cases}$

Clasificación de formas cuadráticas (II).

ω es **DEFINIDA POSITIVA**	$\Leftrightarrow$	$\text{sign}(\omega) = (n, 0)$		$\Leftrightarrow$ $\omega(\vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
ω es **DEFINIDA NEGATIVA**	$\Leftrightarrow$	$\text{sign}(\omega) = (0, n)$		$\Leftrightarrow$ $\omega(\vec{x}) < 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
ω es **SEMIDEFINIDA POSITIVA**	$\Leftrightarrow$	$\text{sign}(\omega) = (p, 0),$	$p < n$	$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \omega(\vec{x}) \geq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$
ω es **SEMIDEFINIDA NEGATIVA**	$\Leftrightarrow$	$\text{sign}(\omega) = (0, q),$	$q < n$	$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \omega(\vec{x}) \leq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$
ω es **INDEFINIDA**	$\Leftrightarrow$	$\text{sign}(\omega) = (p, q),$	$q, p \geq 1$	$\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \omega(\vec{x}) > 0, & \text{para algún } \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) < 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$

Ejemplos: Formas cuadráticas: $\omega: R^2 \to R$

INDEFINIDA

$$\omega\big((x,y)\big) = 2xy \qquad F_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1/2)]{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{sign} \\ (1,1) \end{matrix} \quad \begin{cases} \omega(1,1) = 2 > 0 \\ \omega(1,-1) = -2 < 0 \end{cases}$$

$$\omega\big((x,y)\big) = x^2 + 4xy + 4y^2 \qquad F_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-2)]{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{sign} \\ (1,0) \end{matrix}$$

SEMIDEFINIDA POSITIVA $\begin{cases} \omega(1,0) = 1 > 0 \\ \omega(2,-1) = 0 \end{cases}$

$$\omega\big((x,y)\big) = x^2 + 2xy + 5y^2 \qquad F_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1)]{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} \text{sign} \\ (2,0) \end{matrix}$$

DEFINIDA POSITIVA $\left\{ \omega(2,-1) = 5 > 0 \right.$

Ley de Inercia de Sylvester.

Toda forma cuadrática $\omega: U \to R$ es diagonalizable $\Leftrightarrow \exists B$ tal que F_B es diagonal.

$$F_B = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$$

Se **diagonaliza** por **congruencia**.

Se escoge una base

Puede conseguirse que en la **diagonal** solo aparezcan **+1**,**0** ó **-1**

$$F_B = \begin{pmatrix} \overbrace{+1 \ \ddots \ +1}^{p} & & \\ & \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{q} & \\ & & 0 \ \ddots \ 0 \end{pmatrix}$$

Definición: Signatura de una forma cuadrática $\omega = \mathrm{sign}(\omega) = (\mathrm{p}, \mathrm{q})$

p número de signos **+** en la **forma diagonal** F_B

q número de signos **-** en la **forma diagonal** F_B

Ley de Inercia de Sylvester: La signatura de una forma cuadrática **NO depende de la base**.

Idea de la prueba:

$U_+ = L\{\vec{u_1}, \dots, \vec{u_p}\}$	$\vec{x} \in U_+ \Rightarrow \vec{x} = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 > 0$	POSITIVO
$U_- = L\{\overrightarrow{u_{p+1}}, \dots, \overrightarrow{u_{p+q}}\}$	$\vec{x} \in U_- \Rightarrow \vec{x} = (0, \dots, 0, x_{p+1}, \dots, x_{p+q}, 0, \dots, 0) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = -x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2 < 0$	NEGATIVO
$U_o = L\{\overrightarrow{u_{p+q+1}}, \dots, \vec{u_n}\}$	$\vec{x} \in U_0 \Rightarrow \vec{x} = (0, \dots, 0, 0, \dots, 0, x_{p+q+1}, \dots, x_n) \Rightarrow \omega(\vec{x}) = 0$	NULO

p número de signos **+** = **Dimensión** del **subespacio más grande posible** donde ω toma **valores positivos**

q número de signos **-** = **Dimensión** del **subespacio más grande posible** donde ω toma **valores negativos**

Criterio de Sylvester.

Dada una matriz simétrica $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ llamamos $\begin{cases} F_1 = (a_{11}), \quad F_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \text{y así sucesivamente hasta } F_n = F \end{cases}$

F es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow$ $\det(F_1) > 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) > 0 \quad , \dots , \quad \det(F_n) > 0$

F es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \det(F_1) < 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) < 0 \quad , \dots , \quad (-1)^n \det(F_n) > 0 \\ \text{Cambian alternativamente de signo empezando en NEGATIVO.} \end{cases}$

Ejemplos: Formas cuadráticas: $\omega : R^2 \to R$

$\omega\left((x, y)\right) = 2xy \qquad F_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1/2)]{H_{21}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} \text{sign} \\ (1, 1) \end{matrix}$ **INDEFINIDA**

$F_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad F_1 = (0) \qquad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\det(F_1) = 0 \qquad \det(F_2) = -1 < 0$

Criterio de Sylvester. $\Rightarrow$

NO es DEFINIDA POSITIVA

NO es DEFINIDA NEGATIVA

NO DECIDE $\begin{cases} \text{¿semidefinida positiva o negativa?} \\ \text{¿indefinida?} \end{cases}$

Criterio de Sylvester.

Dada una matriz simétrica $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ llamamos $\begin{cases} F_1 = (a_{11}), \quad F_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \text{y así sucesivamente hasta } F_n = F \end{cases}$

F es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow$ $\det(F_1) > 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) > 0 \quad , \dots , \quad \det(F_n) > 0$

F es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \det(F_1) < 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) < 0 \quad , \dots , \quad (-1)^n \det(F_n) > 0 \\ \text{Cambian alternativamente de signo empezando en NEGATIVO.} \end{cases}$

Ejemplos: Formas cuadráticas: $\omega: R^2 \to R$

$\omega\left((x, y)\right) = x^2 + 4xy + 4y^2$ $\quad F_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-2)]{H_{21}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underset{(1, 0)}{\text{sign}}$ **SEMIDEFINIDA POSITIVA**

$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad F_1 = (1)$ $\quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

$\det(F_1) = 1 > 0$ $\quad \det(F_2) = 0$

$\xrightarrow{\text{Criterio de Sylvester.}}$ NO es **DEFINIDA POSITIVA**

NO es **DEFINIDA NEGATIVA**

NO DECIDE $\begin{cases} \text{¿semidefinida positiva o negativa?} \\ \text{¿indefinida?} \end{cases}$

Criterio de Sylvester.

Dada una matriz simétrica $F = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ llamamos $\begin{cases} F_1 = (a_{11}), \quad F_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ \text{y así sucesivamente hasta } F_n = F \end{cases}$

F es **DEFINIDA POSITIVA** $\Leftrightarrow$ $\det(F_1) > 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) > 0 \quad , \ldots , \quad \det(F_n) > 0$

F es **DEFINIDA NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \det(F_1) < 0, \quad \det(F_2) > 0, \quad \det(F_3) < 0 \quad , \ldots , \quad (-1)^n \det(F_n) > 0 \\ \text{Cambian alternativamente de signo empezando en NEGATIVO.} \end{cases}$

Ejemplos: Formas cuadráticas: $\omega : R^2 \to R$

$\omega\big((x, y)\big) = x^2 + 2xy + 5y^2$ $\quad F_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mu_{21}(-1)]{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad$ sign $(2, 0)$ $\quad$ **DEFINIDA POSITIVA**

$F_c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad F_1 = (1)$ $\quad F_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

$\det(F_1) = 1 > 0$ $\quad \det(F_2) = 4 > 0$

$\xrightarrow{\text{Criterio de Sylvester.}}$ **SI** es **DEFINIDA POSITIVA**

Como calcular los vectores autoconjugados.

ω es DEFINIDA POSITIVA	$\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (n, 0)$		$\Leftrightarrow$	$\omega(\vec{x}) > 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
ω es DEFINIDA NEGATIVA	$\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (0, n)$		$\Leftrightarrow$	$\omega(\vec{x}) < 0, \quad \forall \vec{x} \neq 0$
ω es SEMIDEFINIDA POSITIVA	$\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (p, 0)$,	$p < n$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \omega(\vec{x}) \geq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$
ω es SEMIDEFINIDA NEGATIVA	$\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (0, q)$,	$q < n$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \omega(\vec{x}) \leq 0, & \forall \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) = 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$
ω es INDEFINIDA	$\Leftrightarrow$ $\mathrm{sign}(\omega) = (p, q)$,	$q, p \geq 1$	$\Leftrightarrow$	$\begin{cases} \omega(\vec{x}) > 0, & \text{para algún } \vec{x} \neq 0 \\ \omega(\vec{y}) < 0, & \text{para algún } \vec{y} \neq 0 \end{cases}$

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \; 0 \end{pmatrix}$$

$\omega(\vec{x}) = x_1^2 - x_2^2$

$x_1^2 - x_2^2 = 0 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$

$\boxed{x_1 - x_2 = 0}$ ó $\boxed{x_1 + x_2 = 0}$

Forma cuadrática $\omega: U \to R$

$\vec{u}$ es **AUTOCONJUGADO** respecto de ω, si $f(\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \omega(\vec{u}) = 0$.

$$\boxed{autoconj(\omega) = \{\vec{u} \in U | \omega(\vec{u}) = 0\}}$$

Ejemplo: $\omega: R^2 \to R \qquad \omega\big((x, y)\big) = x^2 + 2xy + 5y^2$

$$autoconj(\omega) = \{(x, y) \in R^2 | x^2 + 2xy + 5y^2 = 0\}$$

Ecuación de **segundo grado** en varias variables.

ω es **DEFINIDA POSITIVA ó NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $autoconj(\omega) = \{\vec{0}\}$

ω es **SEMIDEFINIDA POSITIVA ó NEGATIVA** $\Leftrightarrow$ $autoconj(\omega) = \ker(\omega) = \{(u)_C | F_C (u)_C = (0)\}$

ω es **INDEFINIDA** $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} rango(\omega) = 2 \Leftrightarrow \text{Se descompone en dos } \textbf{hiperplanos} \\ rango(\omega) > 2 \Leftrightarrow \text{No se puede simplificar más algebraicamente} \end{cases}$