Álgebra Lineal II

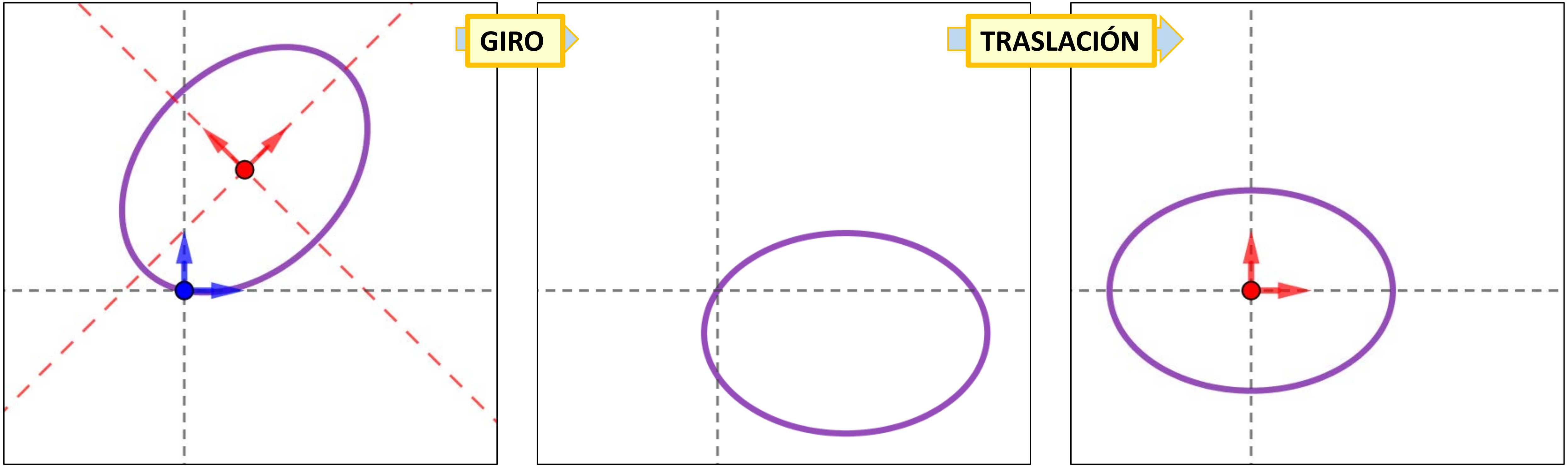
TEMA IV- Cónicas y cuádricas.

Capítulo 1. Cónicas.

Clasificación de cónicas. Ecuación reducida.

Luis Fuentes García (2022).

Idea para clasificar cónicas.



Ecuación en la referencia inicial:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

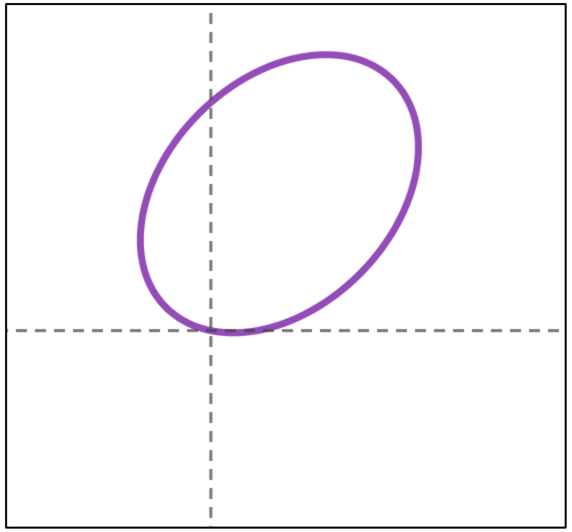
CAMBIO DE REFERENCIA

Ecuación en la nueva referencia:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0$$

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix}$$

Giro o eliminación del término cruzado.



Cónica en la referencia inicial: $a_{11}x^2 + \boxed{2a_{12}xy} + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$

"Eliminar el término cruzado"

$$(x \quad y)T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 2(a_{13} \quad a_{23})\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

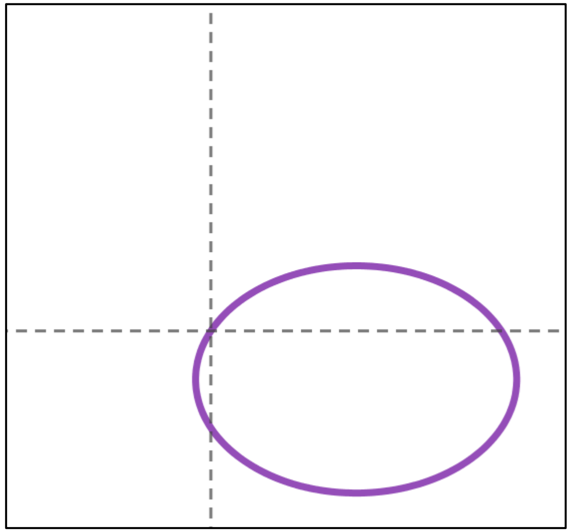
Tª Fundamental: Autovectores de T ortonormales — Autovalores de T

T es **simétrica** $\Leftrightarrow \exists P$ con $\boxed{P^{-1} = P^t}$ | $P^tTP = P^{-1}TP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonal

Cambio de referencia: $\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}}$

Conserva distancias

Importante para NO deformar la cónica



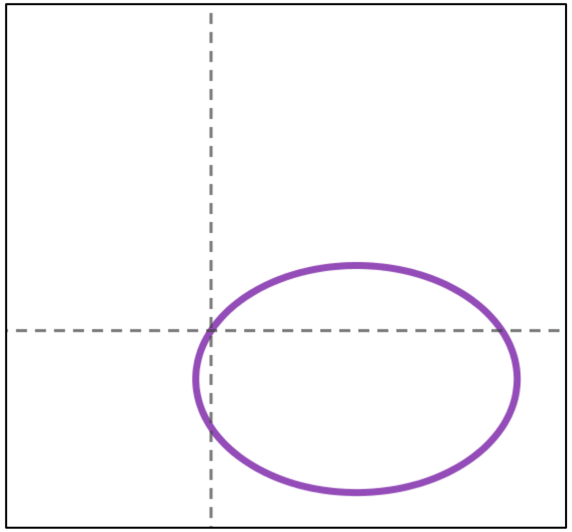
$$(x' \quad y')P^tTP\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{13} \quad a_{23})P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

$$(x' \quad y')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 2(a_{13} \quad a_{23})P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + a_{33} = 0$$

Cónica en nueva referencia: $\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0}$

grado 2

Traslación o eliminación de la parte lineal.



Cambio de referencia:

Conserva distancias

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

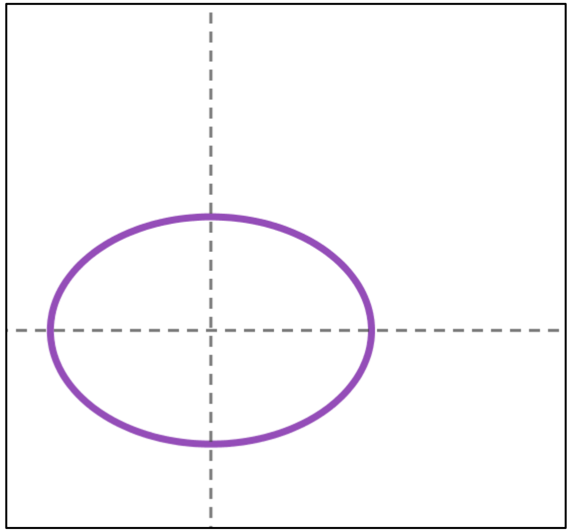
$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0$$

Completar cuadrados: $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$

$$\lambda_1 x'^2 + 2b_{13}x' = \lambda_1 \left(x'^2 + \frac{2b_{13}}{\lambda_1}x' + \left(\frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)^2 - \left(\frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)^2 \right) = \lambda_1 \left(x' - \left(\frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)\right)^2 - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1}$$

$$\lambda_2 y'^2 + 2b_{23}y' = \lambda_2 \left(y'^2 + \frac{2b_{23}}{\lambda_2}y' + \left(\frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)^2 - \left(\frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)^2 \right) = \lambda_2 \left(y' - \left(\frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)\right)^2 - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2}$$

$$\lambda_1 \left(x' - \left(\frac{b_{13}}{\lambda_1}\right)\right)^2 - \frac{b_{13}^2}{\lambda_1} + \lambda_2 \left(y' - \left(\frac{b_{23}}{\lambda_2}\right)\right)^2 - \frac{b_{23}^2}{\lambda_2}' + a_{33} = 0$$



Cambio de referencia: (traslación)

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - (b_{13}/\lambda_1) \\ y' - (b_{23}/\lambda_2) \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0$$

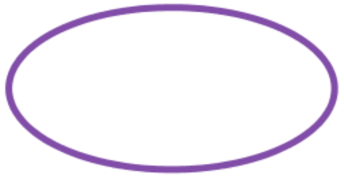
Clasificación de cónicas.

λ_1, λ_2 **autovalores** de T (suponemos **al menos un positivo** $\lambda_1 > 0$; sino cambiaríamos de signo toda la ecuación)

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$ $\quad \lambda_2 > 0$

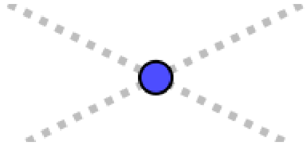
$\boxed{(x'' - \sqrt{-1}y'')(x'' + \sqrt{-1}y'') = 0}$

$d < 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$



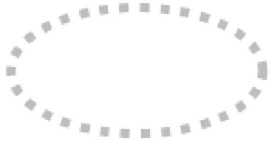
ELIPSE

$d = 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 = 0$



PUNTO = SECANTES IMAGINARIAS

$d > 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 + 1 = 0$



CONJUNTO VACÍO =ELIPSE IMAGINARIA

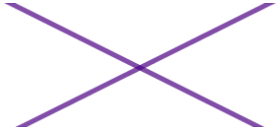
$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$ $\quad \lambda_2 < 0$

$\boxed{(x'' - y'')(x'' + y'') = 0}$

$d < 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 - 1 = 0$

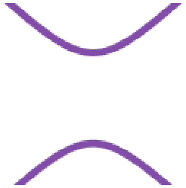
HIPÉRBOLA

$d = 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 = 0$



RECTAS SECANTES

$d > 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 + 1 = 0$



HIPÉRBOLA

<u>**Observación**</u>: **Si** $\lambda_2 = 0$ $\boxed{\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0}$ No se pueden completar cuadrados en y'

$\lambda_1 x'^2 + 2b_{13}x' + 2b_{23}y' + a_{33} = 0$ Hay dos posibilidades

$b_{23} \neq 0$: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2by'' = 0}$

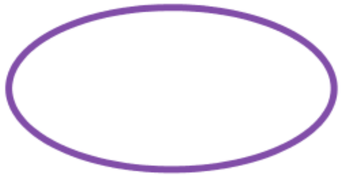
$b_{23} = 0$: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + d = 0}$

Clasificación de cónicas.

λ_1, λ_2 **autovalores** de T (suponemos **al menos un positivo** $\lambda_1 > 0$; sino cambiaríamos de signo toda la ecuación)

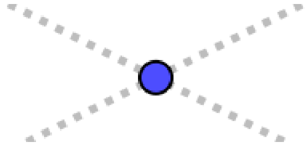
$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0$ $\lambda_2 > 0$ $(x'' - \sqrt{-1}y'')(x'' + \sqrt{-1}y'') = 0$

$d < 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$



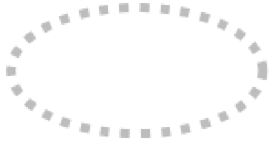
ELIPSE

$d = 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 = 0$



PUNTO = SECANTES IMAGINARIAS

$d > 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 + 1 = 0$



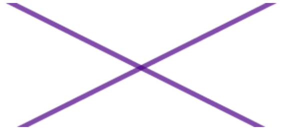
CONJUNTO VACÍO =ELIPSE IMAGINARIA

$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0$ $\lambda_2 < 0$ $(x'' - y'')(x'' + y'') = 0$

$d < 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 - 1 = 0$

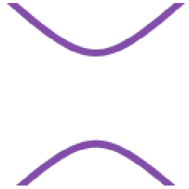
HIPÉRBOLA

$d = 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 = 0$



RECTAS SECANTES

$d > 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 + 1 = 0$



HIPÉRBOLA

$\lambda_2 = 0$

$\lambda_1 x''^2 + 2by'' = 0$

Ej: $x''^2 - y'' = 0$

PARÁBOLA

$\lambda_1 x''^2 + d = 0$

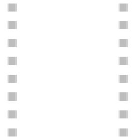
$d < 0$ Ej: $x''^2 - 1 = 0$

RECTAS PARALELAS

$d = 0$ Ej: $x''^2 = 0$

RECTA DOBLE

$d > 0$ Ej: $x''^2 + 1 = 0$



PARALELAS IMAGINARIAS

Cambio de referencia de una cónica.

Ecuación de la cónica en la referencia inicial:

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$X^t A X = 0$$

Fórmula de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}}_{\text{NUEVO ORIGEN}} + \underbrace{M_{CB}}_{\text{CAMBIO DE BASE}} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_{CB} & & r \\ & & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$X = QX''$$

Aplicamos del cambio de referencia:

$$X^t A X = 0 \Leftrightarrow X''^t Q^t A Q X'' = 0 \Leftrightarrow X''^t A'' X'' = 0 \qquad \begin{cases} A'' = Q^t A Q \\ T'' = M_{CB}{}^t T M_{CB} \end{cases}$$

¡CONGRUENTES!

<u>**Teorema**</u>: Las **matrices asociadas** a <u>**una misma**</u> **cónica** respecto a **diferentes referencias** son **congruentes**.

Las **matrices de términos cuadráticos** de <u>**una misma**</u> **cónica** respecto a **diferentes referencias** son **congruentes**.

<u>**Consecuencias:**</u>

A, A'' **matrices asociadas**

T, T'' **matrices de términos cuadráticos**

$$\boxed{\begin{aligned} signo(\det(A)) &= signo(\det(A'')) \\ signo(\det(T)) &= signo(\det(T'')) \end{aligned}}$$

<u>**Si el cambio de referencia conserva las distancias:**</u> M_{CB} **t.ortogonal** $\Rightarrow det(M_{CB}) = \pm 1 \Rightarrow det(Q) = \pm 1$

$$det(A'') = det(Q^t) det(A) det(Q) = det(A) det(Q)^2 = det(A)$$

$$det(T'') = det(M_{CB}{}^t) det(T) det(M_{CB}) = det(T) det(M_{CB})^2 = det(T)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \det(A) &= \det(A'') \\ \det(T) &= \det(T'') \end{aligned}}$$

Clasificación de cónicas (II).

λ_1, λ_2 autovalores de T $\quad (\lambda_1 > 0)$

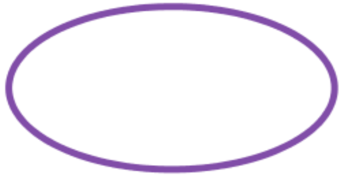
$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot d \qquad T = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \qquad det(T) = \lambda_1 \cdot \lambda_2$$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$ $\quad \lambda_2 > 0$

$d < 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 - 1 = 0$

$|T| > 0$

$|A| < 0$

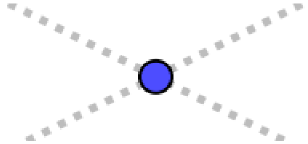


ELIPSE

$d = 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 = 0$

$|T| > 0$

$|A| = 0$

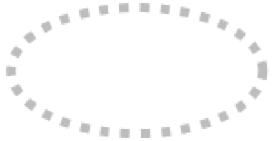


PUNTO = SECANTES IMAGINARIAS

$d > 0$ Ej: $x''^2 + y''^2 + 1 = 0$

$|T| > 0$

$|A| > 0$



CONJUNTO VACÍO =ELIPSE IMAGINARIA

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$ $\quad \lambda_2 < 0$

$d < 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 - 1 = 0$

$|T| < 0$

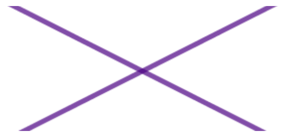
$|A| > 0$

HIPÉRBOLA

$d = 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 = 0$

$|T| < 0$

$|A| = 0$

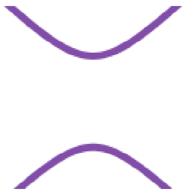


RECTAS SECANTES

$d > 0$ Ej: $x''^2 - y''^2 + 1 = 0$

$|T| < 0$

$|A| < 0$



HIPÉRBOLA

$\lambda_2 = 0$

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + 2by'' = 0}$

Ej: $x''^2 - y'' = 0$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \quad |T| = 0 \quad |A| < 0$$

PARÁBOLA

$\boxed{\lambda_1 x''^2 + d = 0}$

LOS SIGNOS NO DECIDEN

$d < 0$ Ej: $x''^2 - 1 = 0$

$|T| = 0$

$|A| = 0$

$rg(A) = 2$

RECTAS PARALELAS

$d = 0$ Ej: $x''^2 = 0$

$|T| = 0$

$|A| = 0$

$rg(A) = 1$

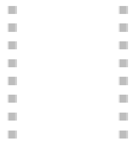
RECTA DOBLE

$d > 0$ Ej: $x''^2 + 1 = 0$

$|T| = 0$

$|A| = 0$

$rg(A) = 2$



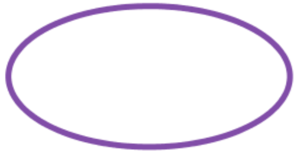
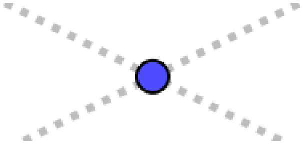
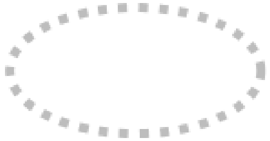
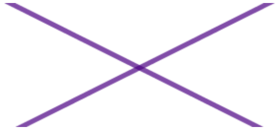
PARALELAS IMAGINARIAS

Clasificación de cónicas (III).

A **matriz asociada**

T **matriz de términos cuadráticos**

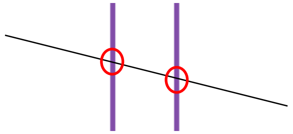
Suponemos algún elemento de la diagonal de T **positivo**.
En caso contrario **cambiaríamos de signo toda la ecuación**.

	NO DEGENERADAS $\|A\| < 0$	DEGENERADAS $\|A\| = 0$	NO DEGENERADAS $\|A\| > 0$
TIPO ELÍPITICO $\|T\| > 0$	 **ELIPSE**	 **PUNTO=SECANTES IMAGINARIAS**	 **ELIPSE IMAGINARIA**
TIPO PARABÓLICO $\|T\| = 0$	 **PARÁBOLA**	$rg(A) = 2$ **(*)** $\begin{cases} \text{RECTAS PARALELAS} \\ \text{RECTAS PARALELAS IMAGINARIAS} \end{cases}$ $rg(A) = 1$ **RECTA DOBLE**	
TIPO HIPERBÓLICO $\|T\| < 0$	 **HIPÉRBOLA**	 **RECTAS SECANTES**	 **HIPÉRBOLA**

(*)¿Reales o imaginarias?

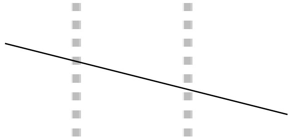
Cortamos con una recta cualquiera.

Reales



DOS puntos de corte

Imaginarias



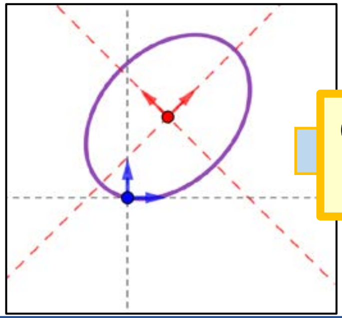
NO CORTA

Forma rápida de cálculo de ecuación reducida

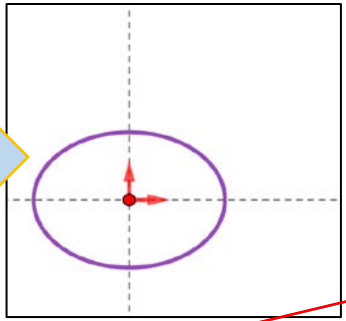
A matriz asociada

T matriz de términos cuadráticos

Suponemos algún elemento de la diagonal de T positivo.
En caso contrario **cambiaríamos de signo toda la ecuación**.



Cambio de referencia



Si el cambio de referencia conserva las distancias:

$$\det(A) = \det(A'')$$
$$\det(T) = \det(T'')$$

ELIPSE ó HIPÉRBOLA:

Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$

λ_1, λ_2 autovalores de T

$$\boxed{d = \frac{\det(A)}{\det(T)}}$$

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & d \end{pmatrix} \qquad \det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot d = \det(T) \cdot d$$

Ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

CENTRO

Autovectores de T **normalizados**

PARÁBOLA:

Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 - 2by'' = 0}$

λ_1 autovalor no nulo de T

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \qquad \det(A) = -\lambda_1 \cdot b^2$$

$$\boxed{b = \sqrt{\frac{-\det(A)}{\lambda_1}}}$$

Ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

VÉRTICE

Autovectores de T **normalizados**

Detalles sobre el orden y elección de los autovalores y autovectores.

ELIPSE ó HIPÉRBOLA:

Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0}$

λ_1, λ_2 **autovalores de** T

$$d = \frac{\det(A)}{\det(T)}$$

Ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

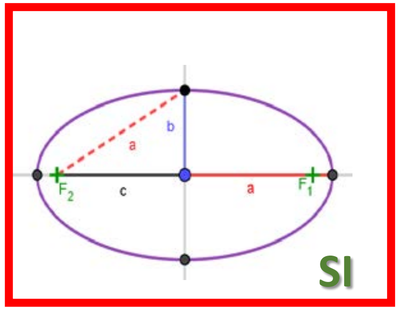
CENTRO

Autovectores de T **normalizados**

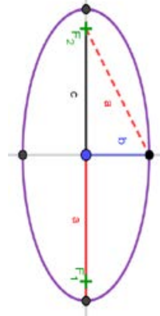
ELIPSE

$\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$

$\boxed{\lambda_1 \leq \lambda_2}$



SI

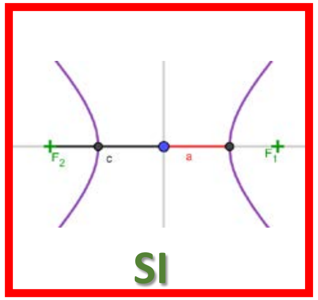


NO

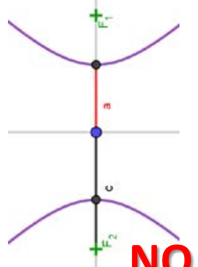
HIPÉRBOLA:

λ_1, λ_2 signos opuestos

$\boxed{signo(\lambda_1) = det(A)}$



SI



NO

PARÁBOLA:

Ecuación reducida: $\boxed{\lambda_1 x''^2 - .2by'' = 0}$

λ_1 **autovalor no nulo de** T

$$b = \sqrt{\frac{-\det(A)}{\lambda_1}}$$

Ecuación de cambio de referencia:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix} + M_{CB} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

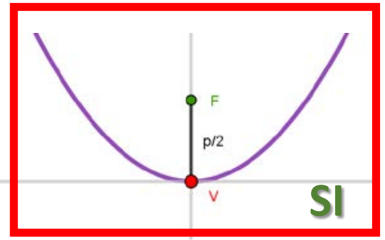
VÉRTICE

Autovectores de T **normalizados**

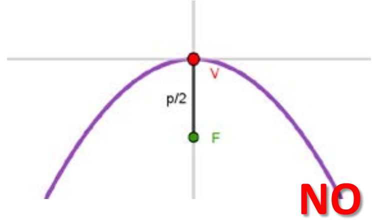
(n, m) **autovector de** T asociado al **CERO**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{13} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} < 0$$



SI



NO