Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **6 de julio de 2018**

1.– En una caja de bombones hay 3 unidades de cada uno de los 5 tipos existentes. Los bombones de cada tipo son indistinguibles entre sí.

(a) Se sacan de la caja 3 bombones (a la vez). Determinar el número de configuraciones posibles.

(b) Lo mismo si se sacan 4 bombones.

(1 punto)

2.– Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ i \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir explícitamente la matriz A_4.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.

(1.1 puntos)

3.– Hallar una matriz invertible $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ verificando la ecuación:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es única?. (1.1 puntos)

4.– Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.

(i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

(iv) Cualquier subconjunto de V formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.

(1.2 puntos)

5.– Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(0) = 0,\, p'(0) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1 + x, 1 + x^2, x^2 - x\}$$

(i) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.

(iii) Calcular la proyección de $1 + x + x^2$ sobre U paralelamente a V.

(1.2 puntos)

6.– Sea la aplicación lineal:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$$

(i) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(1, 2), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Hallar las ecuaciones implícitas de $ker(f)$ respecto de la base B.

(iv) Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.

(1.3 puntos)

7.– De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1, 2) = (1, 3)$ y $(0, 1) \in ker(f)$. Calcular $f(10, 7)$.

(0.7 puntos)

8.– Para cada número $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar los valores de a para los cuales A es diagonalizable por semejanza.

(ii) Hallar a para que $traza(A^4) = 19$.

(iii) Para $a = 0$:

(a) Calcular los autovectores de A.

(b) Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(1.4 puntos)

9.– Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x e y para que A y B sean congruentes. Para tales valores dar una matriz P tal que $P^t AP = B$.

(1 puntos)

Álxebra Lineal I — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **6 de xullo de 2018**

1.– Nunha caixa de bombóns hai 3 unidades de cada un dos 5 tipos existentes. Os bombóns de cada tipo son indistinguibles entre si.

(a) Sácanse da caixa 3 bombóns (á vez). Determinar o número de configuracións posibles.

(b) O mesmo se agora se sacan 4 bombóns.

(1 punto)

2.– Para cada $n \in \mathbb{N}$ defínese a matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ si } i = j \\ i \text{ si } i \neq j \end{cases}$$

(i) Escribir explícitamente a matriz A_4.

(ii) Calcular $det(A_4)$.

(iii) Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ e $rango(A_n)$.

(1.1 puntos)

3.– Atopar unha matriz invertible $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ verificando a ecuación:

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

É única?.

(1.1 puntos)

4.– Sexa V un espazo vectorial que ten un sistema xerador formado por 2018 vectores. Razona a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións.

(i) V ten un sistema de 2018 vectores linealmente independentes.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

(iv) Calquera subconxunto de V formado por 2019 vectores é un sistema de vectores linealmente dependentes.

(1.2 puntos)

5.– Sexa $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ o espazo vectorial real de polinomios de grao menor ou igual que 2. Sexan:

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(0) = 0,\, p'(0) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1 + x, 1 + x^2, x^2 - x\}$$

(i) Demostrar que U é un subespazo vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(ii) Demostrar que U e V son subespazos suplementarios.

(iii) Calcular a proxección de $1 + x + x^2$ sobre U paralelamente a V.

(1.2 puntos)

6.– Sexa a aplicación lineal:

$$f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y,z) = (x+y+z, x-y)$$

(i) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^2$.

(ii) Probar que $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $B' = \{(1,2),(1,0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

(iii) Atopar as ecuacións implícitas de $ker(f)$ respecto da base B.

(iv) Atopar a matriz asociada a f respecto das bases B e B'.

(1.3 puntos)

7.– Dunha aplicación lineal $f:\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1,2) = (1,3)$ e $(0,1) \in ker(f)$. Calcular $f(10,7)$.

(0.7 puntos)

8.– Para cada número $a \in \mathbb{R}$ defínese a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar os valores de a para os cales A é diagonalizable por semellanza.

(ii) Atopar a para que $traza(A^4) = 19$.

(iii) Para $a = 0$:

(a) Calcular os autovectores de A.

(b) Atopar unha matriz inversible P e unha matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.

(1.4 puntos)

9.– Dadas as matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, atopar os valores de x e y para que A e B sexan congruentes. Para tales valores dar unha matriz P tal que $P^tAP = B$.

(1 puntos)
