Álgebra Lineal I — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **6 de julio de 2018**

1.– *En una caja de bombones hay 3 unidades de cada uno de los 5 tipos existentes. Los bombones de cada tipo son indistinguibles entre sí.*

(a) *Se sacan de la caja 3 bombones (a la vez). Determinar el número de configuraciones posibles.*

Se trata de contar los grupos de 3 elementos que pueden formarse escogidos entre 5 tipos diferentes, pudiendo repetir y sin importar el orden. Son combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 3 en 3:

$$CR_{5,3} = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3} = 35.$$

(b) *Lo mismo si se sacan 4 bombones.*

En principio es la misma idea que en el apartado anterior; combinaciones con repetición de 5 tipos de elementos tomados de 4 en 4. La única diferencia es que como sólo hay 3 unidades de cada tipo hay que excluir del conteo la posiblidad de los 4 bombones del mismo tipo: cinco opciones (una por cada tipo de bombón). Nos queda:

$$CR_{5,4} - 5 = \binom{5+4-1}{4} - 5 = \binom{8}{4} - 5 = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - 5 = 70 - 5 = 65.$$

(1 punto)

2.– *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define la matriz $A_n \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como:*

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 \ si\ i = j \\ i \ si\ i \neq j \end{cases}$$

(i) *Escribir explícitamente la matriz A_4.*

$$A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Calcular $det(A_4)$.*

Según la fórmula que veremos en el apartado siguiente:

$$det(A_4) = 4!(4-1)(-1)^{4-1} = -72.$$

(iii) *Para $n \geq 2$, calcular traza A_n, $det(A_n)$ y $rango(A_n)$.*

Tenemos:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & \dots & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & 0 & n-1 \\ n & n & n & \dots & n & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$traza(A_n) = 0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + 0 = 0.$$

Para calcular el determinante comenzamos sacando en cada fila un factor común: 2 en la segunda fila, 3 en la tercera, 4 en la cuarta, etctera...

$$|A_n| = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Continuamos sumando todas las filas a la primera y después sacando factor comúna a $n-1$:

$$|A_n| = n! \begin{vmatrix} n-1 & n-1 & n-1 & \ldots & n-1 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix} = n!(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Restamos ahora la primera fila a las demás y concluimos:

$$|A_n| = n!(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 \end{vmatrix} = n!(n-1)(-1)^{n-1}.$$

Para $n > 1$ vemos que el determinante es no nulo y por tanto $rango(A_n) = n$. Para $n = 1$, $A_1 = (0)$ y su rango es 0.

(1.1 puntos)

3.– *Hallar una matriz invertible $X \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$ verificando la ecuación:*

$$X \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Es única?.

La existencia de X inversible tal que $XA = B$ es lo mismo que decir que A y B son equivalentes por filas. Entonces hallamos y comparamos las formas reducidas por filas de ambas matrices:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{31}(-2)} \xrightarrow{H_{41}(-3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(-2)} \xrightarrow{H_{43}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que las formas reducidas canónicas por filas coinciden y por tanto existe la matriz X en las condiciones pedidas. Para hallarla hacemos las mismas operaciones filas en la identidad comenzando con las que nos permitieron llegar de A a la forma reducida y luego las que llevan (su inversa) de la forma reducida a la matriz B.

$$Id \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-2)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{23}(2)} \xrightarrow{H_{43}(1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(2)} \xrightarrow{H_{31}(2)} \xrightarrow{H_{41}(3)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{12}}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = X$$

La solución non es única, podemos cambiar las filas 3 y 4 de la forma reducida (sin que esta se vea realmente modificada), onteniendo así una nueva matriz de paso.

(1.1 puntos)

4.– *Sea V un espacio vectorial que tiene un sistema generador formado por 2018 vectores. Razona la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones.*

(i) V tiene un sistema de 2018 vectores linealmente independientes.

FALSO. Por ejemplo $\mathbb{R}^2$ tiene un sistema generador formado por 2018 vectores:

$$v_1 = (1,0),\ v_2 = (0,2),\ v_3 = (0,3)\ldots,\ v_{2018} = (0,2018)$$

Pero el máximo número de vectores independientes es 2, porque $dim(\mathbb{R}^2) = 2$.

(ii) $dim(V) \geq 2018$.

FALSO. Basta considerar el ejemplo del apartado (i), $V = \mathbb{R}^2$.

(iii) $dim(V) \leq 2018$.

VERDADERO. La dimensión de un espacio vectorial es el menor número de vectores que se necesitan para generarlo; por tanto si tenemos 2018 generadores, $dim(V) \leq 2018$.

(iv) *Cualquier subconjunto de V formado por 2019 vectores es un sistema de vectores linealmente dependientes.*

VERDADERO. Según vimos en (iii) $dim(V) \leq 2018$. Un espacio vectorial como máximo puede tener tantos vectores independientes como su dimensión; como $2019 > 2018 \geq dim(V)$, no puede haber 2019 vectores independientes.

(1.2 puntos)

5.– *Sea $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ el espacio vectorial real de polinomios de grado menor o igual que 2. Sean:*

$$U = \{p(x) \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) | p(0) = 0,\ p'(0) = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{1+x, 1+x^2, x^2-x\}$$

(i) Demostrar que U es un subespacio vectorial de $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Primero, U es no vacío por que $p_0(x) = 0 \in U$ ya que $p_0'(x) = 0$ y entonces $p_0(0) = p_0'(0) = 0$.

Despúes tenemos que ver que si $p(x), q(x) \in U$ y $a, b \in \mathbb{R}$ entonces $ap(x) + bq(x) \in U$. Como $p(x), q(x) \in U$ sabemos que $p(0) = p'(0) = q(0) = q'(0) = 0$ y entonces:

$$ap(0) + bq(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0, \qquad ap'(0) + bq'(0) = a \cdot 0 + b \cdot 0 = 0$$

y por tanto efectivamente $ap(x) + bq(x) \in U$.

(ii) *Demostrar que U y V son subespacios suplementarios.*

Probaremos que $dim(U) + dim(V) = dim(U + V) = dim(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))) = 3$.

Escribimos las ecuaciones de U respecto de la base canónica $C = \{1, x, x^2\}$. Tenemos en cuenta que si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ entonces $p(x) \equiv (a_0, a_1, a_2)_C$. Además:

$$p'(x) = a_1 + 2a_2x$$

y

$$p(x) = 0 \iff a_0 = 0, \qquad p'(x) = 0 \iff a_1 = 0$$

Concluimos que:

$$U = \{(a_0, a_1, a_2)_C | a_0 = 0, a_1 = 0\} = \mathcal{L}\{(0, 0, 1)_C\}$$

y $dim(U) = 1$. Por otra parte:

$$V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_C, (1, 0, 1)_C, (0, -1, 1)_C\}$$

Analizamos si los generadores son dependientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y entonces:

$$V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_C, (0, -1, 1)_C\}$$

y $dim(V) = 2$. Finalmente:

$$U + V = \mathcal{L}\{(1, 1, 0)_C, (0, -1, 1)_C, (0, 0, 1)_C\}$$

y

$$dim(U + V) = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

(iii) *Calcular la proyección de $1 + x + x^2$ sobre U paralelamente a V.*

Consideramos una base B formada por las bases de V y U:

$$B = \{\underbrace{(1, 1, 0)_C, (0, -1, 1)_C}_{V}, \underbrace{(0, 0, 1)_C}_{U}\}$$

Expresasmo el vector $1 + x + x^2 = (1, 1, 1)_C$ en la base B:

$$M_{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = M_{CB}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$(1, 1, 1)_C = (1, 0, 1)_B = \underbrace{1 \cdot (1, 1, 0)_C + 0 \cdot (0, -1, 1)_C}_{V} + \underbrace{1 \cdot (0, 0, 1)_C}_{U}$$

y así la proyección pedida es:

$$1 \cdot (0, 0, 1)_C = (0, 0, 1)_C = x^2.$$

(1.2 puntos)

6.– *Sea la aplicación lineal:*

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y, z) = (x + y + z, x - y)$$

(i) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Trasladando coeficientes la matriz asociada en las bases canónica es:

$$F_{C'C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

donde $C = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ y $C' = \{(1, 0), (0, 1)\}$.

(ii) *Probar que $B = \{(1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ y $B' = \{(1, 2), (1, 0)\}$ son bases respectivamente de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.*

Para que los vectores formen base basta que el número de vectores coincida con la dimensión del espacio y que el rango de la matriz de coordenadas sea el máximo posible.

En el primer caso tenemos $3 = dim(\mathbb{R}^3)$ vectores y el rango es:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

y en el segundo $2 = dim(\mathbb{R}^2)$ y:

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

(iii) *Hallar las ecuaciones implícitas de $ker(f)$ respecto de la base B.*

Hallamos la matriz asociada $F_{C'B}$ para poder utilizarla para calcular el núcleo y obtener los resultados directamente en la base B:

$$F_{C'B} = F_{C'C} M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El núcleo está entonces definido por las ecuaciónes:

$$F_{C'B} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff 2x' + 2y' + z' = 0,\ x' + z' = 0.$$

que son claramente independientes por no ser proporcionales.

(iv) *Hallar la matriz asociada a f respecto de las bases B y B'.*

Aplicamos la fórmula de cambio de base:

$$F_{B'B} = M_{B'C'} F_{C'B} = M_{C'B'}^{-1} F_{C'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 3/2 & 2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(1.3 puntos)

7.– *De una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ se sabe que $f(1, 2) = (1, 3)$ y $(0, 1) \in ker(f)$. Calcular $f(10, 7)$.*

Como $(0, 1) \in ker(f)$, $f(0, 1) = (0, 0)$. Además por la linealidad:

$$f(1, 0) = f((1, 2) - (0, 2)) = f((1, 2) - 2 \cdot (0, 1)) = f(1, 2) - 2f(0, 1) = (1, 3).$$

Finalmente:

$$f(10, 7) = f(10(1, 0) + 7(0, 1)) = 10f(1, 0) + 7f(0, 1) = (10, 30).$$

(0.7 puntos)

8.– *Para cada número $a \in \mathbb{R}$ se define la matriz:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(i) *Estudiar los valores de a para los cuales A es diagonalizable por semejanza.*

Para que diagonalice por semejanza la suma de multipliciades algebraicas de los autovalores de A debe de ser 4 y las multiplicidades algebraicas y geométricas deben de coincidir.

Comenzamos entonces calculando el polinomio característico; sus raíces son los autovalores de A.

$$|A - \lambda Id| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 & a \\ 2 & 1-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & 0 & a-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 0 & a-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^3(a-\lambda).$$

Vemos que los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

$\lambda_2 = a$ con multipliciadd algebraica 1.

Distinguimos el caso particular $a = 1$ en cuyo caso simplemente tendríamos:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 4.

En cualquier caso la suma de algebraicas es 4 y la matriz triangulariza por semejanza. Veamos que ocurre con las multiplicidades geométricas.

Si $a \neq 1$, para $\lambda_2 = a$, la multiplicidad algebraica es 1 y por tanto la geométrica también.

Para $\lambda_1 = 1$:

$$mg(1) = 4 - rango(A - 1Id) = 4 - rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 2 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= 4 - rango\begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix} = 4 - rango\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & a-1 \end{pmatrix} =$$
$$= 4 - rango\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{cases} 4-3 = 1 \text{ si } a \neq 0 \\ 4-1 = 3 \text{ si } a = 0 \end{cases}$$

Vemos que las geométricas y las algebraicas coinciden cuando $a = 0$.

Si $a = 1$, entonces exactamente con el mismo razonamiento que antes vemos que:

$$mg(1) = 4 - 3 = 1 \neq 4 = ma(1)$$

y por tanto NO diagonaliza.

Resumiendo, diagonaliza si y sólo si $a = 0$.

(ii) *Hallar a para que $traza(A^4) = 19$.*

La traza se conserva por semejanza y por tanto es igual a la suma de los autovalores; queda:

$$19 = traza(A^4) = 3 \cdot \lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 3 + a^2 \Rightarrow a^2 = 16.$$

por tanto $a = \pm 2$.

(iii) *Para $a = 0$:*

(a) *Calcular los autovectores de A.*

Vimos que para $a = 0$ los autovalores son:

$\lambda_1 = 1$ con multiplicidad algebraica 3.

$\lambda_2 = 0$ con multipliciadd algebraica 1.

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1$:

$$(A - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0.$$

Por tanto:

$$S_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - z = 0\} = \mathcal{L}\{(1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}.$$

Calculamos los autovectores asociados a $\lambda_2 = 0$:

$$(A - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0, \quad 2x + y - 2z = 0, \quad t = 0.$$

Por tanto:

$$S_0 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x = 0, \quad 2x + y - 2z = 0, \quad t = 0.\} = \mathcal{L}\{(0, 2, 1, 0)\}.$$

(b) *Hallar una matriz inversible P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1}AP = D$.*

La matriz diagonal es la formada por los autovalores repetidos tantas veces como indica su multiplicidad:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

y la matriz P aquella cuyas columnas son los correspondientes autovectores:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1.4 puntos)

9.– *Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, hallar los valores de x e y para que A y B sean congruentes. Para tales valores dar una matriz P tal que $P^tAP = B$.*

Dado que B es simétrica, para que sean congruentes A también tiene que ser simétrica, ya que la congruencia conserva la simetría. Por tanto $x = 1$.

Además son congruentes si y sólo si al ser diagonalizadas por congruencia tenemos los mismos signos en la diagonal:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

y teniendo en cuenta que ya sabemos que $x = 1$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & y \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & y-1 \end{pmatrix}$$

Deducimos que son congruentes si y sólo si $x = y = 1$.

La matriz P verificando $P^t AP = B$ es la matriz de paso por columnas de A hacia B. Realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columnas para llegar de A a la forma diagonal y de ésta a a la matriz B:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = P.$$

(1 puntos)