Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (2 horas 45 minutos) **2 de xuño de 2020**

1.– Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ se define a forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w(x, y, z) = x^2 + 2kxy - z^2 + 2yz$$

(i) Clasificar w en función dos valores de k, indicando o seu rango e a súa signatura. (0.6 puntos)

(ii) Para $k = 1$ atopar ls vectores autoconxugados. Expresar o resultado do xeito máis sinxelo posible e con respecto á base canónica. (1 punto).

(iii) Dar un vector que sexa autoconxugado para calquera valor de k. (0.3 puntos)

(iv) Calcular k para que os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$ sexan conxugados. (0.3 puntos)

(v) Existe algún valor de k para o cal non existan vectores autoconxugados non nulos?. (0.3 puntos)

(2.5 puntos)

2.– Razoa a falsedade ou veracidade das seguintes cuestions:

(i) En $\mathbb{R}^2$ pode definirse un producto escalar tal que $(1, 0)$ e $(1, 1)$ sexan ortogonais. (0.5 puntos)

(ii) Se T é a matriz dunha transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ e $traza(T) = 1$ entón T é un xiro. (0.5 puntos)

(iii) Se T é a matriz dun xiro en $\mathbb{R}^2$ entón non ten autovalores reais. (0.5 puntos)

(iv) Se consideramos ó espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ coas condicións usuais, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ é a matriz dunha simetría respecto ó plano $x - y = 0$. (0.5 puntos)

(v) No espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ (condiciones usuais) se da unha transformación ortogonal t. Gauss sostén que é un xiro de 90 graos e Euler que é un xiro de -90 grados. Poden estar os dous no cierto?. (0.5 puntos)

Nota: As condicións usuais son: producto escalar usual e orientación positiva dada pola base canónica.

(2.5 puntos)

3.– No espazo afín $\mathbb{R}^3$ se considera un triángulo isósceles ABC con ángulo desigual no vértices C. Se sabe que está contenido no plano de ecuación $x + y + z = 1$, $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, -1, 2)$ e ten un área de $4\sqrt{3}$.

(i) Calcular as coordenadas do vértice C. (1 punto)

(ii) Calcular o volumen da pirámide triangular que ten como base o triángulo ABC e vértice a orixe. (0.5 puntos)

(iii) Atopar as ecuacións dunha simetría respecto a unha recta que transforme o punto A no punto B e deixe C fixo. (1 punto)

(2.5 puntos)

4.– No plano afín se considera a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0$$

(i) Clasificar a cónica e atopar a súa ecuación reducida. (0.6 puntos)

(ii) Atopar a súa excentricidade, asínotas, e la distancia entre un foco e o vértice máis cercano a él. (0.4 puntos)

(iii) Calcular as tanxentes á cónica que pasan polo punto $(-1, 2)$. (0.5 puntos)

(iv) Calcular a ecuación dunha cónica que ten as mesmas tanxentes que a curva dada nos puntos $(0, -1)$ e $(2, 1)$ e pasa pola orixe. (1 punto)

(2.5 puntos)

Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (2 horas 45 minutos) **2 de junio de 2020**

1.– Para cada valor de $k \in \mathbb{R}$ se define la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad w(x, y, z) = x^2 + 2kxy - z^2 + 2yz$$

(i) Clasificar w en función de los valores de k, indicando su rango y signatura. (0.6 puntos)

(ii) Para $k = 1$ hallar los vectores autoconjugados. Expresar el resultado de la manera más sencilla posible y con respecto a la base canónica. (1 punto).

(iii) Dar un vector que sea autoconjugado para cualquier valor de k. (0.3 puntos)

(iv) Calcular k para que los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ sean conjugados. (0.3 puntos)

(v) ¿Existe algún valor de k para el cuál no existan vectores autoconjugados no nulos?. (0.3 puntos)

(2.5 puntos)

2.– Razona la falsedad o veracidad de las siguiente cuestiones:

(i) En $\mathbb{R}^2$ puede definirse un producto escalar tal que $(1, 0)$ y $(1, 1)$ sean ortogonales. (0.5 puntos)

(ii) Si T es la matriz de una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^2$ y $traza(T) = 1$ entonces T es un giro. (0.5 puntos)

(iii) Si T es la matriz de un giro en $\mathbb{R}^2$ entonces no tiene autovalores reales. (0.5 puntos)

(iv) Si consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con las condiciones usuales, $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz de una simetría respecto al plano $x - y = 0$. (0.5 puntos)

(v) En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ (condiciones usuales) se da una transformación ortogonal t. Gauss sostiene que es un giro de 90 grados y Euler que es un giro de -90 grados. ¿Pueden estar ambos en lo cierto?. (0.5 puntos)

Nota: Las condiciones usuales son: producto escalar usual y orientación positiva dada por la base canónica.

(2.5 puntos)

3.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera un triángulo isósceles ABC con ángulo desigual en el vértices C. Se sabe que está contenido en el plano de ecuación $x + y + z = 1$, $A = (2, -1, 0)$, $B = (0, -1, 2)$ y tiene un área de $4\sqrt{3}$.

(i) Calcular las coordenadas del vértice C. (1 punto)

(ii) Calcular el volumen de la pirámide triangular que tiene como base el triángulo ABC y vértice el origen. (0.5 puntos)

(iii) Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que transforme el punto A en el punto B y deje C fijo. (1 punto)

(2.5 puntos)

4.– En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x - 1 = 0$$

(i) Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida. (0.6 puntos)

(ii) Hallar su excentricidad, asínotas, y la distancia entre un foco y el vértice más cercano a él. (0.4 puntos)

(iii) Calcular las tangentes a la cónica que pasan por el punto $(-1, 2)$. (0.5 puntos)

(iv) Calcular la ecuación de una cónica que tiene las mismas tangentes que la curva dada en los puntos $(0, -1)$ y $(2, 1)$ y pasa por el origen. (1 punto)

(2.5 puntos)