

1.— En $\mathbb{R}^3$ y para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2ayz - z^2$$

(i) Clasificar w en función de a indicando además su rango y signatura.

Para clasificar la forma cuadrática se diagonaliza su matriz asociada por congruencia, realizando operaciones filas y las mismas en columna. De esta forma se obtendrá la signatura.

Trasladando coeficientes la matriz asociada en la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonalizando:

$$F_C \xrightarrow{H_{21}(-1)\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -a \\ 0 & -a & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(-a)\mu_{32}(-a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + a^2 \end{pmatrix}$$

Distinguimos como varían los signos de la diagonal en función de a . Para organizar la tabla de casos analizamos los puntos susceptibles de cambio de signo, que aparecen cuando para algún valor de a se anula un término de la diagonal:

$$-1 + a^2 = 0 \iff a^2 = 1 \iff a = \pm 1.$$

Queda:

- Si $a < -1$, $\text{sign}(w) = (2, 1)$, $\text{rango}(w) = 3$. Es indefinida, no degenerada.
- Si $a = -1$, $\text{sign}(w) = (1, 1)$, $\text{rango}(w) = 2$. Es indefinida, degenerada.
- Si $-1 < a < 1$, $\text{sign}(w) = (1, 2)$, $\text{rango}(w) = 3$. Es indefinida, no degenerada.
- Si $a = 1$, $\text{sign}(w) = (1, 1)$, $\text{rango}(w) = 2$. Es indefinida, degenerada.
- Si $a > 1$, $\text{sign}(w) = (2, 1)$, $\text{rango}(w) = 3$. Es indefinida, no degenerada.

(ii) Para $a = 1$ calcular el conjunto de vectores autoconjugados. En el caso en que se descomponga en un unión de dos planos, dar sus ecuaciones implícitas en la base canónica.

Para $a = 1$ vimos que la forma cuadrática es indefinida y de rango 2. En ese caso sabemos que los autoconjugados se descomponen en unión de dos planos. Para trabajar más cómodamente, empezamos haciendo los cálculos respecto de la base en la cuál la forma cuadrática tiene matriz asociada diagonal (según vimos en el apartado anterior):

$$F_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En esa base los autoconjugados son:

$$\begin{aligned} \text{autoconj}(w) &= \{(x', y', z')_B \mid (x', y', z')_B F_B (x', y', z')_B^t = 0\} = \{(x', y', z')_B \mid x'^2 - y'^2 = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B \mid (x' + y')(x' - y') = 0\} = \\ &= \{(x', y', z')_B \mid x' + y' = 0\} \cup \{(x', y', z')_B \mid x' - y' = 0\} \end{aligned}$$

Necesitamos cambiar los resultados a la base canónica. Para ello primero calculamos la matriz M_{CB} que se obtiene realizando sobre la identidad las mismas operaciones columna que realizamos sobre F_C en su proceso de diagonalización:

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Se tiene que:

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cambiamos de base las ecuaciones implícitas usando la relación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C$$

Queda:

$$x' + y' = 0 \iff (1 \quad 1 \quad 0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff (1 \quad 1 \quad 0) M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff x + 2y + z = 0$$

$$x' - y' = 0 \iff (1 \quad -1 \quad 0) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}_B = 0 \iff (1 \quad -1 \quad 0) M_{BC} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_C = 0 \iff x - z = 0$$

Y así:

$$autoconj(w) = \{(x, y, z)_C | x + 2y + z = 0\} \cup \{(x, y, z)_C | x - z = 0\}.$$

- (iii) Para $a = 0$ dar un subespacio U de la mayor dimensión posible tal que $w(u) < 0$ para todo vector u no nulo de U .

Para $a = 0$ hemos visto que la signatura es $(1, 2)$. Por tanto la máxima dimensión posible de un subespacio en el cuál la imagen de un vector no nulo es siempre negativa es 2. Para calcularlo trabajamos de nuevo en la base en la cuál la forma cuadrática diagonaliza. Según vimos en el primer apartado:

$$F_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El subespacio buscado está generado entonces por los dos últimos vectores de la base B' . Tal base se obtiene como hemos hecho antes: mismas operaciones columna del proceso de diagonalización en la identidad.

$$Id \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB'}$$

Por tanto:

$$U = \mathcal{L}\{(-1, 1, 0), (0, 0, 1)\}.$$

- (iv) ¿Para qué valores de a la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?

Para que sea un producto escalar tiene que ser definida positiva y esto no se da para ningún valor de a .

(1.2 puntos)

2.— Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado de un producto escalar. Se sabe que la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es ortonormal. Dado $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$:

(i) Hallar la matriz de Gram del producto escalar en la base canónica.

Dado que B es una base ortonormal se sabe que $G_B = Id$. Por tanto sólo hay que hacer el cambio de base:

$$G_C = M_{BC}^t G_B M_{BC} = M_{BC}^t M_{BC}$$

donde

$$M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Queda:

$$G_C = M_{BC}^t M_{BC} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Encontrar una base ortonormal de U .

Calculamos los generadores de U , pasando de implícitas a paramétricas y luego el método de Gram-Schmidt para hallar una base ortogonal. Finalmente normalizaremos los vectores obtenidos dividiéndolos por su módulo.

$$x + y + z = 0 \iff z = -x - y$$

Por tanto las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a - b$$

y así $U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.

Aplicamos el método de ortogonalización de Gram-Schmidt:

$$v_1 = (1, 0, -1).$$

$$v_2 = (0, 1, -1) + c(1, 0, -1)$$

Imponemos que sean ortogonales $v_1 \cdot v_2 = 0$. De donde:

$$c = \frac{-(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)}$$

siendo

$$(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3$$

Se obtiene:

$$c = \frac{-(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)} = \frac{-2}{3}$$

y

$$v_2 = (0, 1, -1) + (-2/3)(1, 0, -1) = \left(-\frac{2}{3}, 1, \frac{-1}{3}\right).$$

Calculamos los módulos de los vectores:

$$\|v_1\| = \sqrt{v_1 \cdot v_1} = \sqrt{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)} = \sqrt{3}$$

$$\|v_2\| = \sqrt{v_2 \cdot v_2} = \sqrt{(-2/3, 1, -1/3) \cdot (-2/3, 1, -1/3)} = \sqrt{(-2/3 \quad 1 \quad -1/3) G_C \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1 \\ -1/3 \end{pmatrix}} = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

Finalmente la base ortonormal queda:

$$\left\{ \frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|} \right\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, 0, \frac{-1}{\sqrt{3}} \right), \left(\frac{-2}{\sqrt{42}}, \frac{3}{\sqrt{42}}, \frac{-1}{\sqrt{42}} \right) \right\}.$$

(iii) Dar las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.

$U^\perp$ está formado por los vectores (x, y, z) que son ortogonales a los generadores de U , es decir cumpliendo:

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0, \quad (x, y, z) \cdot (0, 1, -1) = 0$$

Operando:

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, -1) = 0 \iff (x \quad y \quad z) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 2z = 0$$

$$(x, y, z) \cdot (0, 1, -1) = 0 \iff (x \quad y \quad z) G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + 3y - 3z = 0$$

De la primera ecuación $x = 2z$ y sustituyendo en la segunda:

$$-2z + 3y - 3z = 0 \iff 3y = 5z \iff y = 5z/3$$

de donde:

$$U^\perp = \mathcal{L}\{(2, 5/3, 1)\} = \mathcal{L}\{(6, 5, 3)\}.$$

Las paramétricas serían:

$$x = 6\mu, \quad y = 5\mu, \quad z = 3\mu.$$

(iv) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

El ángulo que forman es:

$$\arccos \left(\frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 1, 0)\|} \right)$$

Aunque podemos hacer los productos escalares como usualmente usando la matriz G_C , notamos que por definición de matriz asociada $(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)$ es el término en la fila 1 columna 2 de G_C y $(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)$ los dos primeros términos de la diagonal.

Entonces:

$$(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0) = -1, \quad \|(1, 0, 0)\| = \sqrt{(1, 0, 0) \cdot (1, 0, 0)} = 1, \quad \|(0, 1, 0)\| = \sqrt{(0, 1, 0) \cdot (0, 1, 0)} = \sqrt{2}.$$

y

$$\arccos \left(\frac{(1, 0, 0) \cdot (0, 1, 0)}{\|(1, 0, 0)\| \|(0, 1, 0)\|} \right) = \frac{-1}{\sqrt{2}} = 135^\circ$$

(1.5 puntos)

- 3.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual dar la matriz asociada respecto a la base canónica de una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$.

Construimos una base auxiliar formada por el eje de simetría $u_1 = (1, 0, 1)$ y dos vectores más perpendiculares a él u_2, u_3 . Éstos han de cumplir:

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 1) = 0 \iff x + z = 0.$$

Pasando a paramétricas $z = -x$:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a$$

tomamos $u_3 = (1, 0, -1)$ y $u_2 = (0, 1, 0)$.

La base auxiliar es entonces:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, 1)}_{eje}, \underbrace{(0, 1, 0), (1, 0, -1)}_{eje^\perp}\}$$

En esa base sabemos que la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente la cambiamos a la base canónica:

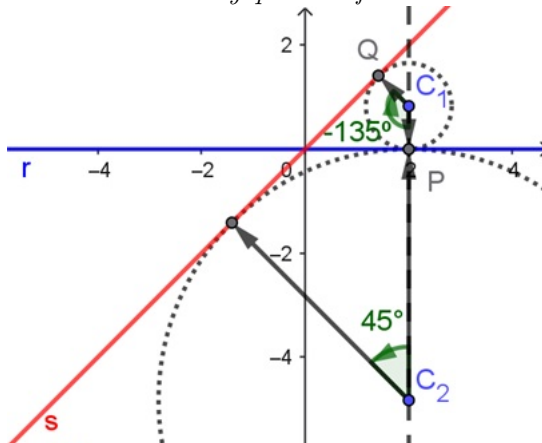
$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde} \quad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(1 punto)

- 4.— En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ dadas las rectas $r \equiv y = 0$ y $s \equiv x - y = 0$ dar la ecuaciones de un giro con centro en algún punto de la recta $x = 2$ y que transforme la recta r en la recta s . ¿Es único?



Si el centro de giro está en la recta $x = 2$ entonces es de la forma $C = (2, b)$. Además si un giro lleva una recta en otra, como un giro conserva distancias y el centro queda fijo, la distancia del centro a las dos rectas debe de ser la misma:

$$d(C, r) = d(C, s) \iff \frac{|b|}{1} = \frac{|2 - b|}{\sqrt{2}}$$

Para quitar el valor absoluto hay dos casos:

$$\text{i) } \sqrt{2}b = 2 - b \iff b = \frac{2}{1 + \sqrt{2}} = 2\sqrt{2} - 2.$$

$$\text{ii) } -\sqrt{2}b = 2 - b \iff b = \frac{2}{1 - \sqrt{2}} = -2\sqrt{2} - 2.$$

Aunque hay dos soluciones como sólo nos pide una trabajamos con el centro de giro $(2, 2\sqrt{2} - 2)$.

Falta calcular el ángulo de giro. Para ello usamos que el giro debe de llevar el vector que une el centro con la proyección de éste sobre r en la proyección del mismo sobre s .

La proyección de C sobre la recta $y = 0$ se obtiene tomando la perpendicular a $y = 0$ pasando por C e intersecándola con r . La perpendicular tiene como vector director el normal de $y = 0$, es decir, $(0, 1)$. Es por tanto una recta vertical $x = 2$. Intersecada con $y = 0$ da el punto $P = (2, 0)$.

La proyección de C sobre la recta $x - y = 0$ se obtiene tomando la perpendicular a $x - y = 0$ pasando por C e intersecándola con s . La perpendicular tiene como vector director el normal de $x - y = 0$, es decir, $(1, -1)$. Es por tanto la recta:

$$\frac{x - 2}{1} = \frac{y - 2\sqrt{2} + 2}{-1} \iff x + y - 2\sqrt{2} = 0.$$

La intersecamos con s :

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 2\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

resolviendo se obtiene $Q = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Entonces el giro debe de llevar el vector $\vec{CP} = P - C = (0, 2 - 2\sqrt{2})$ en el vector $\vec{CQ} = Q - C = (\sqrt{2} - 2, 2 - \sqrt{2})$.

El ángulo que forman es:

$$\pm \arccos \frac{\vec{CP} \cdot \vec{CQ}}{\|\vec{CP}\| \|\vec{CQ}\|} = \pm \arccos \frac{8 - 6\sqrt{2}}{12 - 8\sqrt{2}} = \pm \arccos \frac{-1}{\sqrt{2}} = \pm 135^\circ$$

El signo coincide con la orientación de la base que forman el vector original y el girado, es decir, con el signo del determinante de la matriz formado por ambos:

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 - 2\sqrt{2} \\ \sqrt{2} - 2 & 2 - \sqrt{2} \end{vmatrix} = 8 - 6\sqrt{2} < 0$$

En definitiva el ángulo es -135° y las ecuaciones del giro:

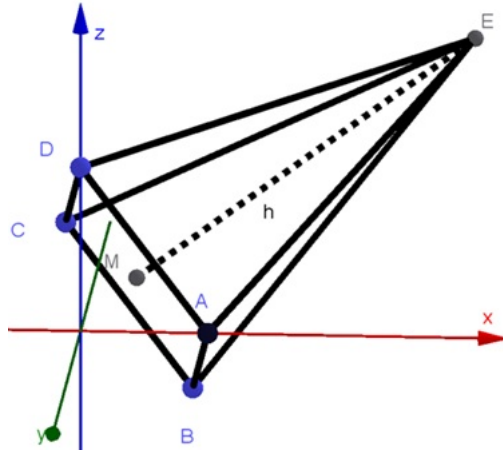
$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(-135^\circ) & -\sin(-135^\circ) \\ \sin(-135^\circ) & \cos(-135^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

es decir:

$$t \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2\sqrt{2} - 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y + 2 - 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(1 punto)

5. En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera una pirámide regular contenida en el semiespacio $z \geq 0$, de base cuadrada $ABCD$ y vértice E . Se sabe que $A = (3, 0, 0)$, $B = (3, 5, 0)$, el vértice D está en el plano $x = 0$ y su volumen es $250/3$. Hallar las coordenadas de todos los vértices.



Dado que el vértice D está en el plano $x = 0$ sus coordenadas son de la forma $D = (0, y, z)$.

Como $ABCD$ es un cuadrado sus aristas son perpendiculares y miden lo mismo y así:

$$AD \cdot AB = 0, \quad \|AD\| = \|AB\|$$

de donde

$$(-3, y, z) \cdot (0, 5, 0) = 0 \Rightarrow 5y = 0 \Rightarrow y = 0$$

y

$$\|AB\| = \|(0, 5, 0)\| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5 \Rightarrow$$

$$5 = \|AD\| = \sqrt{(-3)^2 + y^2 + z^2} \Rightarrow 25 = 9 + y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = 16 \Rightarrow z = \pm 4.$$

Como $z \geq 0$ nos quedamos con $z = 4$. Y $D = (0, 0, 4)$.

Dado que las aristas AB y DC son paralelas (de hecho el mismo vector):

$$C - D = B - A \Rightarrow C = D + B - A = (0, 0, 4) + (3, 5, 0) - (3, 0, 0) = (0, 5, 4).$$

Para hallar el vértice E usaremos que el vector que los une con el punto medio M de la cara $ABCD$ es perpendicular a ella y su longitud la altura de la pirámide. Para hallar la altura usamos el dato del volumen:

$$V = \frac{\text{área base} \cdot h}{3} \Rightarrow h = \frac{3V}{\|AB\|^2} = \frac{250}{25} = 10.$$

Un vector perpendicular a la cara $ABCD$ se obtiene como el producto vectorial de dos de sus aristas:

$$w = AB \times AD = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 5 & 0 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20e_1 + 15e_3 = (20, 0, 15)$$

Ajustamos su norma para que coincida con la altura h :

$$u = \frac{w}{\|w\|} \cdot h = \frac{(20, 0, 15)}{\sqrt{20^2 + 0^2 + 15^2}} \cdot 10 = \frac{(20, 0, 15)}{25} \cdot 10 = (8, 0, 6)$$

El punto medio del cuadrado $ABCD$ es el punto medio de dos de sus vértices opuestos:

$$M = \frac{A + C}{2} = \frac{(3, 0, 0) + (0, 5, 4)}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right)$$

Finalmente el vértice E es $M + u$ ó $M - u$. Como el enunciado dice que la pirámide está contenida en el semiespacio $z \geq 0$ tomamos:

$$E = M + u = \left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 2\right) + (8, 0, 6) = \left(\frac{19}{2}, \frac{5}{2}, 8\right)$$

(1 punto)

6.— Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

- (a) En $\mathbb{R}^3$ la composición de un giro y una simetría respecto a una recta es un giro.

VERDADERO. Una simetría respecto a una recta en $\mathbb{R}^3$ equivale a un giro de 180° . La composición de dos giros de matrices asociadas T_1, T_2 vuelve a ser un giro porque la matriz asociada a la composición es el producto de éstas y por tanto:

$$\det(T_1 \cdot T_2) = \det(T_1)\det(T_2) = 1 \cdot 1 = 1$$

(usamos que una transformación ortogonal es un giro si y sólo si el determinante de su matriz asociada es 1).

- (b) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio y $\text{traza}(T) + \det(T) = 0$ entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.

FALSO. Por ejemplo si consideramos un giro $|T| = 1$. Para que se cumpla la hipótesis $\text{traza}(T) + \det(T) = 0$ necesitamos que $\text{traza}(T) = -1$ y eso ocurre cuando $1 + 2\cos(\alpha) = -1$, es decir, cuando $\alpha = 180^\circ$. Entonces un giro de 180° cumple $\text{traza}(T) + \det(T) = 0$ y no es una simetría respecto a un plano.

- (c) En el espacio $\mathbb{R}^2$, si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal y $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es un giro.

VERDADERO. La única opción para que no sea un giro es que sea una simetría respecto a una recta.

Pero en ese caso la traza es 0 porque su matriz asociada en una base adecuada es $T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ (y la traza no depende de la base).

- (d) En el espacio $\mathbb{R}^3$, si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal y $\vec{u} \neq 0$ es un autovector asociado al -1 , entonces se trata de un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular a $\vec{u}$.

FALSO. Por ejemplo:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de un giro de 180° y $(0, 1, 0)$ es un autovector asociado al -1 .

(1.2 puntos)

7.— En el plano afín se define la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica y calcular su centro, asíntotas, ejes, vértices, focos y excentricidad.

Clasificamos la cónica en función del determinante de la matriz asociada A y de la matriz de términos cuadráticos T . Son:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

de donde $|A| = 1 - 4 - 1 = -4$ y $|T| = 0$. Se trata por tanto de una parábola.

Inmediatamente sabemos que:

- No tiene centro.
- No tiene asíntotas.
- La excentricidad es 1.

Su único eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo. Como es una parábola uno de sus autvalores siempre es $\lambda_2 = 0$ y como ambos suman la traza de T , el otro es $\lambda_1 = \text{traza}(T) = 2$.

Calculamos su autovector asociado:

$$(T - 2 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff -x + y = 0$$

Tomamos un vector cumpliendo esa ecuación. Por ejemplo $u_1 = (1, 1)$.

El eje es su recta polar:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y - 2 = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

El vértice es la intersección del eje y de la cónica. Se obtiene resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de uno y otra:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0. \end{cases}$$

Despejando en la primera $y = 1 - x$. Sustituyendo en la segunda:

$$\begin{aligned} x^2 + 2x(1 - x) + (1 - x)^2 - 4x + 1 &= 0 \\ \iff x^2 + 2x - 2x^2 + 1 + x^2 - 2x - 4x + 1 &= 0 \iff 4x = 2 \iff x = 1/2. \end{aligned}$$

Y por tanto $y = 1 - x = 1 - 1/2 = 1/2$ y el vértice queda $V = (1/2, 1/2)$.

Para hallar el foco necesitamos calcular la ecuación reducida canónica y las ecuaciones de cambio de referencia,

La ecuación reducida es de la forma $\lambda_1 x''^2 - 2dy' = 0$ donde λ_1 es el autovalor no nulo y $d = \sqrt{-|A|/\lambda_1}$. En nuestro caso queda:

$$2x''^2 - 2\sqrt{2}y'' = 0$$

De ahí pasamos a la reducida canónica despejando x''^2 :

$$x''^2 = 2\frac{\sqrt{2}}{2}y''$$

El parámetro p es $p = \sqrt{2}/2$ y por tanto en la nueva referencia el foco es $F = (0, \sqrt{2}/4)_B$. Para pasarlo a la referencia de partida necesitamos las ecuaciones de cambio de referencia.

El nuevo origen es el vértice que ya hemos calculado. Y la nueva base la formada por los autovectores de T normalizados. Nos falta calcular el asociado al 0:

$$(T - 0 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + y = 0$$

Tomamos el vector $(1, -1)$ ó $(-1, 1)$. Entre los dos escogemos el que multiplicado por los dos primeros elementos de la tercera fila de A dé negativo:

$$(1, -1) \cdot (-2, 0) = -2 < 0$$

Nos quedamos con $(1, -1)$.

Dividimos los autovectores por sus normas:

$$\frac{(1, 1)}{\|(1, 1)\|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}), \quad \frac{(1, -1)}{\|(1, -1)\|} = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

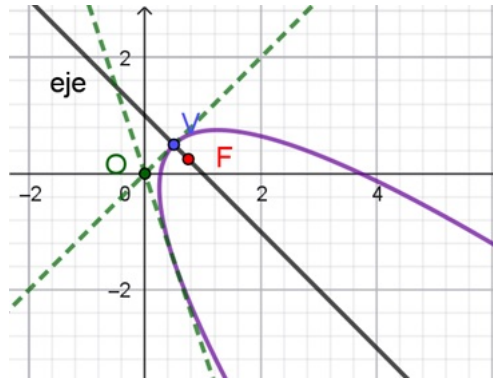
La ecuación de cambio de referencia queda:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

Se la aplicamos al foco $F = (0, \sqrt{2}/4)_B$ y queda:

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2}/4 \end{pmatrix} = (3/4, 1/4)$$

El foco es $F = (3/4, 1/4)$.



(ii) Hallar las rectas tangentes a la cónica que pasan por el origen.

El origen no pertenece a la cónica porque no cumple su ecuación $x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$,

$$0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 0 + 0^2 - 4 \cdot 0 + 1 = 1 \neq 0.$$

Por tanto para hallar las tangentes exteriores a la cónica que pasan por él, hallaremos su recta polar r_O . Ésta corta a la cónica en dos puntos P, Q . Las tangentes buscadas serán las rectas OP y OQ .

La recta polar del origen es:

$$(1 \quad 1 \quad 0) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -2x + 1 = 0 \iff x = 1/2.$$

La cortamos con la cónica:

$$\begin{cases} x = 1/2 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0. \end{cases}$$

Sustituyendo en la segunda ecuación queda:

$$1/4 + y + y^2 - 2 + 1 = 0 \iff 4y^2 + 4y - 3 = 0.$$

Resolviendo:

$$y = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-1 \pm 2}{2} = -3/2 \text{ ó } 1/2.$$

Los puntos de corte son $P = (1/2, -3/2)$ y $Q = (1/2, 1/2)$.

Las tangentes buscadas son:

- La recta que une $O = (0, 0)$ y $P = (1/2, -3/2)$: $\frac{x}{1/2} = \frac{y}{-3/2}$, es decir, $3x + y = 0$.

- La recta que une $O = (0, 0)$ y $Q = (1/2, 1/2)$: $\frac{x}{1/2} = \frac{y}{1/2}$, es decir, $x - y = 0$.

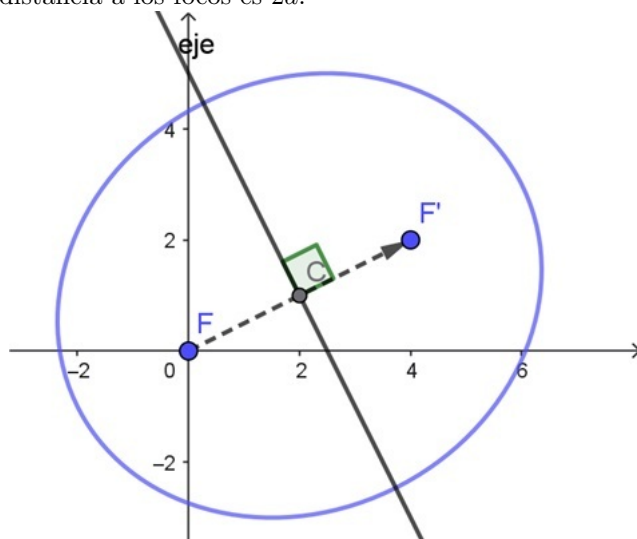
(1.5 puntos)

8. Hallar la ecuación de una cónica de excentricidad $e = 1/2$ sabiendo que un foco es el punto $F = (0, 0)$ y un eje es la recta $2x + y - 5 = 0$.

Como la excentricidad es < 1 se trata de una elipse. Calcularemos el segundo foco como el simétrico del primero respecto del eje de simetría. Después sabemos que la distancia del centro al foco es $c = d(F, F')/2$ y de ahí:

$$e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = \frac{c}{e} = 2c = d(F, F').$$

Finalmente usaremos la caracterización de la elipse como lugar geométrico: el conjunto de puntos del plano cuya suma de distancia a los focos es $2a$.



Comenzamos entonces calculando el foco $F' = (p, q)$ simétrico de $F = (0, 0)$ respecto del eje $2x + y - 5 = 0$. Cumple dos condiciones:

- $\frac{F + F'}{2} \in \text{eje}$, es decir, $(p/2, q/2)$ cumple la ecuación $2x + y - 5 = 0$, de donde, $2p + q - 10 = 0$.
- $\vec{FF'}$ es perpendicular al eje, o equivalentemente paralelo a su vector normal $(2, 1)$. Esto significa que $\frac{p}{2} = \frac{q}{1}$, es decir, $p = 2q$.

Resolviendo el sistema se obtiene $F' = (4, 2)$.

Ahora vimos que:

$$a = d(F, F') = \sqrt{(4-0)^2 + (2-0)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Aplicamos la caracterización de la elipse como lugar geométrico:

$$d((x, y), (0, 0)) + d((x, y), (4, 2)) = 2 \cdot 2\sqrt{5}$$

Es decir:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 4\sqrt{5} \iff \sqrt{(x-4)^2 + (y-2)^2} = 4\sqrt{5} - \sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando ambos términos al cuadrado y desarrollando los binomios queda:

$$x^2 - 8x + 16 + y^2 - 4y + 4 = 80 + x^2 + y^2 - 8\sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Operando y simplificando:

$$-2x - y - 15 = -2\sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}$$

Elevando de nuevo ambos términos al cuadrado y desarrollando el cuadrado del trinomio:

$$4x^2 + y^2 + 225 + 4xy + 60x + 30y = 20x^2 + 20y^2$$

Y agrupando términos:

$$16x^2 + 19y^2 - 4xy - 60x - 30y - 225 = 0.$$

(1 punto)

9.− Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2xy + 4yz + 2x - 6y - 6z + 3 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

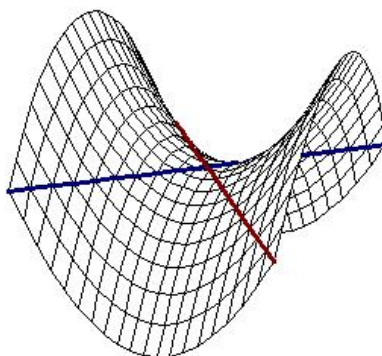
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 1 & -3 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{32}(1)} \xrightarrow{H_{42}(-1)} \xrightarrow{\mu_{32}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin sumar la cuarta fila a otra. Por tanto es uno de los tres casos en los que la matriz no puede diagonalizarse por completo. En ese caso decide la signatura de la matriz de términos cuadráticos que es $(+, -, 0)$. Se trata de un paraboloides hiperbólico.



(0.6 puntos)
