

1.− En $\mathbb{R}^3$ y para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ se considera la forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2ayz - z^2$$

- (i) Clasificar w en función de a indicando además su rango y signatura.
- (ii) Para $a = 1$ calcular el conjunto de vectores autoconjugados. En el caso en que se descomponga en un unión de dos planos, dar sus ecuaciones implícitas en la base canónica.
- (iii) Para $a = 0$ dar un subespacio U de la mayor dimensión posible tal que $w(u) < 0$ para todo vector u no nulo de U .
- (iv) ¿Para qué valores de a la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.

(1.2 puntos)

2.− Consideramos el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado de un producto escalar. Se sabe que la base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ es ortonormal. Dado $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$:

- (i) Hallar la matriz de Gram del producto escalar en la base canónica.
- (ii) Encontrar una base ortonormal de U .
- (iii) Dar las ecuaciones paramétricas de $U^\perp$.
- (iv) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

(1.5 puntos)

3.− En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual dar la matriz asociada respecto a la base canónica de una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$.

(1 punto)

4.− En el plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ dadas las rectas $r \equiv y = 0$ y $s \equiv x - y = 0$ dar la ecuaciones de un giro con centro en algún punto de la recta $x = 2$ y que transforme la recta r en la recta s . ¿Es único?

(1 punto)

5.− En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se consider una pirámide regular contenida en el semiespacio $z \geq 0$, de base cuadrada $ABCD$ y vértice E . Se sabe que $A = (3, 0, 0)$, $B = (3, 5, 0)$, el vértice D está en el plano $x = 0$ y su volumen es $250/3$. Hallar las coordenadas de todos los vértices.

(1 punto)

6.− Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

- (a) En $\mathbb{R}^3$ la composición de un giro y una simetría respecto a una recta es un giro.
- (b) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal en el espacio y $\text{traza}(T) + \det(T) = 0$ entonces la transformación es una simetría respecto a un plano.
- (c) En el espacio $\mathbb{R}^2$, si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal y $\text{traza}(T) = -1$ entonces T es un giro.
- (d) En el espacio $\mathbb{R}^3$, si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal y $\vec{u} \neq 0$ es un autovector asociado al -1 , entonces se trata de un giro compuesto con una simetría respecto a un plano perpendicular a $\vec{u}$.

(1.2 puntos)

7.− En el plano afín se define la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar la cónica y calcular su centro, asíntotas, ejes, vértices, focos y excentricidad.
- (ii) Hallar las rectas tangentes a la cónica que pasan por el origen.

(1.5 puntos)

8.− Hallar la ecuación de una cónica de excentricidad $e = 1/2$ sabiendo que un foco es el punto $F = (0, 0)$ y un eje es la recta $2x + y - 5 = 0$.

(1 punto)

9.− Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2xy + 4yz + 2x - 6y - 6z + 3 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

1.— En $\mathbb{R}^3$ e para cada valor de $a \in \mathbb{R}$ considérase a forma cuadrática:

$$w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad w(x, y, z) = x^2 + 2xy - 2ayz - z^2$$

- (i) Clasificar w en función de a indicando ademais o seu rango e signatura.
- (ii) Para $a = 1$ calcular o conxunto de vectores autoconxugados. No caso de que se descompoña nunha unión de dous planos, dar as súas ecuacións implícitas na base canónica.
- (iii) Para $a = 0$ dar un subespazo U da maior dimensión posible tal que $w(u) < 0$ para todo vector u non nulo de U .
- (iv) Para que valores de a a forma bilineal asociada a w é un produto escalar?.

(1.2 puntos)

2.— Consideramos o espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ dotado dun produto escalar. Sábese que a seguinte base $B = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ é ortonormal. Dado $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$:

- (i) Atopar a matriz de Gram do produto escalar na base canónica.
- (ii) Atopar unha base ortonormal de U .
- (iii) Dar as ecuacións paramétricas de $U^\perp$.
- (iv) Calcular o ángulo que forman os vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

(1.5 puntos)

3.— No espazo euclídeo $\mathbb{R}^3$ co produto escalar usual dar a matriz asociada respecto da base canónica dunha simetría respecto da recta $\mathcal{L}\{(1, 0, 1)\}$.

(1 punto)

4.— No plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ dadas as rectas $r \equiv y = 0$ e $s \equiv x - y = 0$ dar as ecuacións dun xiro con centro nalgún punto da recta $x = 2$ e que transforme a recta r na recta s . É único?

(1 punto)

5.— No espazo afín $\mathbb{R}^3$ considérase unha pirámide regular contida no semiespazo $z \geq 0$, de base cadrada $ABCD$ e vértice E . Sábese que $A = (3, 0, 0)$, $B = (3, 5, 0)$, o vértice D está no plano $x = 0$ e o seu volume é $250/3$. Atopar as coordenadas de todos os vértices.

(1 punto)

6.− Razoa a veracidade ou falsidade das seguintes cuestións:

- (a) En $\mathbb{R}^3$ a composición dun xiro e unha simetría respecto dunha recta é un xiro.
- (b) Se T é a matriz asociada a unha transformación ortogonal no espazo e $\text{traza}(T) + \det(T) = 0$ entón a transformación é unha simetría respecto dun plano.
- (c) No espazo $\mathbb{R}^2$, se T é a matriz asociada a unha transformación ortogonal e $\text{traza}(T) = -1$ entón T é un xiro.
- (d) No espazo $\mathbb{R}^3$, se T é a matriz asociada a unha transformación ortogonal e $\vec{u} \neq 0$ é un autovector asociado a -1 , entón trátase dun xiro composto cunha simetría respecto dun plano perpendicular a $\vec{u}$.

(1.2 puntos)

7.− No plano afín defínese a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4x + 1 = 0$$

- (i) Clasificar a cónica e calcular o seu centro, asíntotas, eixos, vértices, focos e excentricidade.
- (ii) Atopar as rectas tanxentes á cónica que pasan pola orixe.

(1.5 puntos)

8.− Atopar a ecuación dunha cónica de excentricidade $e = 1/2$ sabendo que un foco é o punto $F = (0, 0)$ e un eixo é a recta $2x + y - 5 = 0$.

(1 punto)

9.− Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - y^2 - 2z^2 - 2xy + 4yz + 2x - 6y - 6z + 3 = 0$$

clasificar a superficie e facer un bosquexo da mesma.

(0.6 puntos)