Álgebra Lineal II — Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **11 de Julio de 2025**

1.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera una forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como:

$$w(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2axz + 2yz$$

(a) Clasificar w en función de a indicando además el rango y la signatura. ¿Para qué valores de a es w un producto escalar?.

(b) Para aquellos valores de a para los cuales w es degenerada, dar un vector autoconjugado que no esté en el núcleo.

(c) Para $a = 0$ dar una base de vectores conjugados.

(1.2 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera un producto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ cumpliendo:

- Los subespacios vectoriales $\mathcal{L}\{(0,0,1)\}$ y $\mathcal{L}\{(1,1,0),(1,0,1)\}$ son ortogonales.
- Los vectores $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.
- Los tres vectores anteriores son unitarios.

(i) Calcular la matriz de Gram del producto escalar respecto de la base canónica.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$ respecto al producto escalar dado.

(1 punto)

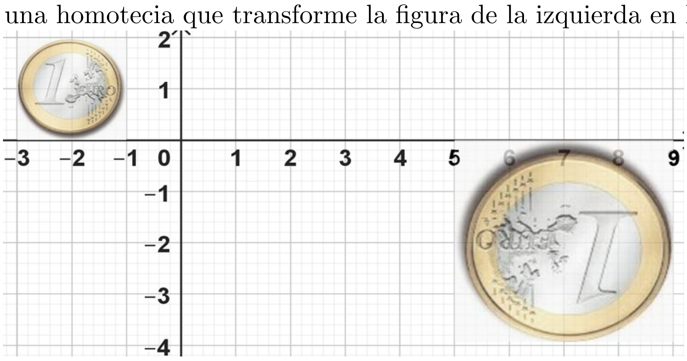
3.– En el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ y dados $a, b, c > 0$ se considera un endomorfismo t de matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

Hallar a, b, c para que t sea una transformación ortogonal. Clasificarla y describirla geométricamente.

(1 punto)

4.– Dar la ecuación de una homotecia que transforme la figura de la izquierda en la de la derecha:



Indica cuál su centro y la razón.

(1 punto)

5.– Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:

(a) Si $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una forma cuadrática degenerada e indefinida, entonces $rango(w) = 2$.

(b) Si $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una forma cuadrática no degenerada e indefinida y F_C es su matriz asociada, entonces $det(F_C) < 0$.

(c) Si G_C es la matriz de Gram de un producto escalar, puede ocurrir que $traza(G_C) = 0$.

(d) Si G_C es la matriz de Gram de un producto escalar, todos sus elementos son positivos.

(1.2 puntos)

6.– En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ se considera el tetraedro de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (2, 1, 0)$.

(i) Hallar el ángulo que forman las caras ABC y ABD.

(ii) Hallar la superficie y el volumen del tetraedro.

(iii) Hallar la proyección ortogonal del vértice D sobre el plano ABC.

(1.5 puntos)

7.– En el plano afín se considera la cónica de ecuación:

$$xy - 2x - y + 1 = 0$$

(i) Clasificar la cónica y hallar su ecuación reducida.

(ii) Hallar su centro, ejes, asíntotas, vértices y excentricidad.

(iii) Sabiendo que $x - 2y + 2 = 0$ es la recta polar de un punto P respecto a esta cónica, hallar las coordenadas de P.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que tiene por vértice el punto $(2, 3)$ y por directriz la recta de ecuación $x + 3y - 1 = 0$.

(1 punto)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 2y + 4 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **11 de xullo 2024**

1.– Para cada $a \in \mathbb{R}$ considérase unha forma cuadrática $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida como:

$$w(x, y, z) = x^2 - ay^2 + 2axz + 2yz$$

(a) Clasificar w en función de a, indicando ademais o rango e a sinatura. Para que valores de a é w un produto escalar?

(b) Para aqueles valores de a para os cales w é dexenerada, dar un vector autoconxugado que non estea no núcleo.

(c) Para $a = 0$ dar unha base de vectores conxugados.

(1.2 puntos)

2.– En $\mathbb{R}^3$ considérase un produto escalar $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que cumpre:

- Os subespazos vectoriais $\mathcal{L}\{(0, 0, 1)\}$ e $\mathcal{L}\{(1, 1, 0), (1, 0, 1)\}$ son ortogonais.

- Os vectores $(1, 1, 0)$ e $(1, 0, 1)$ forman un ángulo de $\pi/3$.

- Os tres vectores anteriores son unitarios.

(i) Calcular a matriz de Gram do produto escalar respecto da base canónica.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1)\}$, calcular unha base do seu subespazo ortogonal $U^\perp$ respecto ao produto escalar dado.

(1 punto)

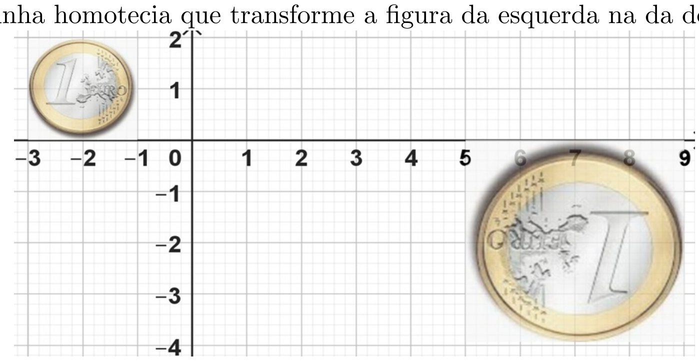
3.– No plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ e dados $a, b, c > 0$ considérase un endomorfismo t de matriz asociada respecto da base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 4/5 \\ b & -c \end{pmatrix}$$

Atopar a, b, c para que t sexa unha transformación ortogonal. Clasificala e describila xeométricamente a transformación.

(1 punto)

4.– Dar a ecuación dunha homotecia que transforme a figura da esquerda na da dereita:



Indica cal é o seu centro e a razón.

(1 punto)

5.– Razoar a veracidade ou falsidade das seguintes cuestións:

(a) Se $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é unha forma cuadrática dexenerada e indefinida, entón $rango(w) = 2$.

(b) Se $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é unha forma cuadrática non dexenerada e indefinida e F_C é a súa matriz asociada, entón $det(F_C) < 0$.

(c) Se G_C é a matriz de Gram dun produto escalar, pode ocorrer que $traza(G_C) = 0$.

(d) Se G_C é a matriz de Gram dun produto escalar, todos os seus elementos son positivos.

(1.2 puntos)

6.– No espazo afín $\mathbb{R}^3$ considérase o tetraedro de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 0, 0)$, $C = (0, 1, 1)$, $D = (2, 1, 0)$.

(i) Atopar o ángulo que forman as caras ABC e ABD.

(ii) Atopar a superficie e o volume do tetraedro.

(iii) Atopar a proxección ortogonal do vértice D sobre o plano ABC.

(1.5 puntos)

7.– No plano afín considérase a cónica de ecuación:

$$xy - 2x - y + 1 = 0$$

(i) Clasificar a cónica e atopar a súa ecuación reducida.

(ii) Atopar o seu centro, eixes, asíntotas, vértices e excentricidade.

(iii) Sabendo que $x - 2y + 2 = 0$ é a recta polar dun punto P respecto desta cónica, atopar as coordenadas de P.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha parábola sabendo que ten por vértice o punto $(2, 3)$ e por directriz a recta de ecuación $x + 3y - 1 = 0$.

(1 punto)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 2y^2 + 2xy + 2xz + 2y + 4 = 0$$

clasificar a superficie e facer un debuxo esquemático da mesma.

(0.6 puntos)
