Álgebra Lineal II **Soluciones al Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **14 de Mayo de 2024**

1.– *De una forma cuadrática* $w : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *se sabe que:*

a) $B = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$ *es una base de vectores conjugados.*

b) *Es degenerada.*

c) $w(1,0,1) = -w(0,0,1) = 4$.

(i) *Hallar la matriz asociada a* w *respecto de la base canónica.*

Dado que B es una base de vectores conjugados sabemos que la matriz asociada F_B en esa base es diagonal:

$$F_B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

Calcularemos esta matriz y luego la cambiamos a la base canńonica.

Para usar que $w(1,0,1) = -w(0,0,1) = 4$ expresamos los vectores dados en la base B. Tenemos que:

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M_{BC} = M_{CB}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces:

$$M_{BC}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_B, \qquad M_{BC}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B$$

y

$$w(1,0,1) = 4 \quad \Rightarrow \quad w((1,0,0)_B) = 4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 4.$$

$$w(0,0,1) = -4 \quad \Rightarrow \quad w((0,0,1)_B) = .4 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -4 \quad \Rightarrow \quad c = -4.$$

Finalmente como es degenerada $rango(F_B) < 3$ y así $b = 0$. Por tanto:

$$F_B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Finalmente la pasamos a la base canónica:

$$F_C = M_{BC}^t F_B M_{BC} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

(ii) *Indicar el rango y la signatura de* w.

Se tiene que $rango(w) = rango(F_B) = 2$ y $sign(w) = (1,1)$ porque en la forma diagonalizada F_B aparece un signo positivo y otro negativo en la diagonal.

(iii) *Hallar los vectores autoconjugados. Dar el resultado en la base canónica. Si es posible, descomponer el conjunto de vectores autoconjugados como unión de dos planos.*

Dado que es indefinida y de rango 2 sabemos que los autoconjugados pueden descomponerse como unión de dos planos. Para facilitar esa descomposición trabajamos en la base B:

$$autoconj(w) = \{(x', y', z')_B | w((x', y', z')_B) = 0\} = \left\{ (x', y', z')_B | \begin{pmatrix} x' & y' & z' \end{pmatrix} F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \right\} =$$
$$= \{(x', y', z')_B | 4x'^2 - 4z'^2 = 0\} = \{(x', y', z')_B | (2x' - 2y')(2x' + 2z') = 0\} =$$
$$= \{(x', y', z')_B | x' - z' = 0\} \cup \{(x', y', z')_B | x' + z' = 0\} =$$
$$= \mathcal{L}\{(1, 0, 1)_B, (0, 1, 0)_B\} \cup \mathcal{L}\{(1, 0, -1)_B, (0, 1, 0)_B\}.$$

Pasamos los generadores a la base canónica:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}_C, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_C, \qquad M_{CB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_C$$

Por tanto:

$$autoconj(w) = \mathcal{L}\{(1, 0, 2), (1, 1, 0)\} \cup \mathcal{L}\{(1, 0, 0), (1, 1, 0)\}.$$

(iv) *Si f es la forma bilineal asociada a w hallar $f((1, 0, 2), (0, 2, 3))$.*

La matriz asociada a la forma bilineal asociada a w es la misma que la matriz asociada a w. Por tanto:

$$f((1, 0, 2), (0, 2, 3)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -28.$$

2.– *En el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1, $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ se considera la aplicación:*

$$f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \qquad f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

(i) *Demostrar que f es un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar tiene que ser bilineal, simétrica y definida positiva.

Probamos primero la simetría:

$$f(p(x), q(x)) = \int_0^1 p(x)q(x)dx = \int_0^1 q(x)p(x)dx = f(q(x), p(x))$$

Por ser simétrica para la bilinealidad basta comprobar la linealidad en la primera componente:

$$f(ap_1(x) + bp_2(x), q(x)) = \int_0^1 (ap_1(x) + bp_2(x))q(x)dx = \int_0^1 (ap_1(x)q(x) + bp_2(x)q(x))dx =$$
$$= a \int_0^1 p_1(x)q(x)dx + b \int_0^1 p_2(x)q(x)dx = af(p_1(x), q(x)) + bf(p_2(x), q(x)).$$

Finalmente para ver que es definida positiva calcularemos la matriz asociada en la base canónica $C = \{1, x\}$ y veremos que tiene signatura $(2, 0)$:

$$F_C = \begin{pmatrix} f(1,1) & f(1,x) \\ f(x,1) & f(x,x) \end{pmatrix}$$

donde

$$f(1,1) = \int_0^1 1 \cdot 1 dx = 1, \quad f(1,x) = \int_0^1 1 \cdot x dx = 1/2, \quad f(x,x) = \int_0^1 x \cdot x dx = 1/3,$$

y así:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Para comprobar su signatura la diagonalizamos por congruencia:

$$F_C \overset{H_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix}$$

y vemos que $sign(f) = (2,0)$ y por tanto es definida positiva.

(ii) *Respecto al producto escalar definido por f:*

(ii.a) *Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.*

Una baes ortonormal B se caracteriza por que la matriz asociada del producto escalar en esa base es la identidad. Entonces continuamos la diagonalización iniciada en el apartado anterior hasta llegar a Id:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/12 \end{pmatrix} \overset{H_2(\sqrt{12})}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(\sqrt{12})}{\longrightarrow} Id.$$

Hacemos las mismas operaciones columna realizadas en el proceso de diagonalización sobre la identidad:

$$Id \overset{\mu_{21}(-1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(\sqrt{12})}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} = M_{CB}.$$

Así la base pedida es:

$$B = \{(1,0), (-\sqrt{3}, 2\sqrt{3})\} = \{1, -\sqrt{3} + 2\sqrt{3}x\}.$$

(ii.b) *Calcular la proyección ortogonal del polinomio $1+x$ sobre $U = \mathcal{L}\{1-x\}$*

La proyección de $p(x) = 1 + x = (1,1)_C$ sobre $U = \mathcal{L}\{(1,-1)_C\}$ es un vector de la forma:

$$q(x) = a(1-x) = (a, -a)_C$$

Además tiene que cumplirse que $p(x) - q(x) = (1-a, 1+a)_C \perp U$, es decir:

$$(1-a, 1+a) \cdot (1,-1) = 0 \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 1-a \\ 1+a \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \quad \iff \quad \frac{2}{3} - \frac{a}{3} = 0.$$

Deducimos que $a = 2$ y así la proyección pedida es:

$$q(x) = 2 - 2x.$$

3.– *Sea el espacio euclídeo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual hallar la matriz asociada de una simetría respecto a un plano, que lleve el vector* $(3,0,4)$ *en el vector* $(5,0,0)$.

En una simetría respecto a un plano la diferencia entre el vector original y su simétrico es un vector ortogonal al plano de simetría. Por tanto la simetría pedida necesariamente tiene que ser respecto a un plano ortogonal a:

$$(5,0,0)-(3,0,4)=(2,0,-4)$$

Además dado que los dos vectores tienen la misma norma ($\|(5,0,0)\| = \sqrt{5^2+0^2+0^2} = 4$ y $\|(3,0,4)\| = \sqrt{3^2+0^2+4^2} = 5$) tal simetría existe.

Para consturir su matriz asociada consideramos una base B formada por el vector normal del plano de simetría y dos vectores ortogonales a él que lo generen.

El vector normal es $(2,0,-4)$ o por simplificar $(1,0,-2)$. Los vectores (x,y,z) ortogonales a él cumplen:

$$(x,y,z)\cdot(1,0,-2)=0 \iff x-2z=0 \iff (x,y,z)\in\mathcal{L}\{(2,0,1),(0,1,0)\}.$$

Consideramos por tanto la base $B=\{(2,0,1),(0,1,0),(1,0,-2)\}$. En esta base la matriz de la simetría es:

$$T_B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

Finalmente lo cambiamos a la base canónica:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix}3/5&0&4/5\\0&1&0\\4/5&0&-3/5\end{pmatrix}$$

donde

$$M_{CB}=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad M_{CB}=M_{CB}^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}2&0&1\\0&1&0\\1&0&-2\end{pmatrix}.$$

(1.2 puntos)

4.– *En el plano afín* $\mathbb{R}^2$ *se consideran dos triángulos homotéticos de vértices* A,B,C *y* A',B',C' *respectivamente. Sabiendo que* $A=(1,0)$, $B=(0,1)$, $C=(1,2)$, $A'=(3,0)$ *y* $area(A'B'C')=4area(ABC)$:

(a) *Hallar las ecuaciones de una homotecia que lleve el primer triángulo en el segundo. ¿Es única?.*

La ecuación de la homotecia es:

$$t(x,y)=(a,b)+k((x,y)-(a,b))$$

donde (a,b) es el centro de la homotecia y k es la razón.

Si la razón de la homotecia es k, entonces transforma las áreas multiplicándolas por k^2. Por tanto si $area(A'B'C')=4area(ABC)$, entonces $k^2=4$ y $k=\pm 2$.

Como $t(A)=A'$ entonces $t(1,0)=(3,0)$ y así:

$$(3,0)=t(1,0)=(a,b)+k((1,0)-(a,b)) \quad\Rightarrow\quad (3-k,0)=(1-k)(a,b) \quad\Rightarrow\quad (a,b)=\frac{1}{1-k}(3-k,0).$$

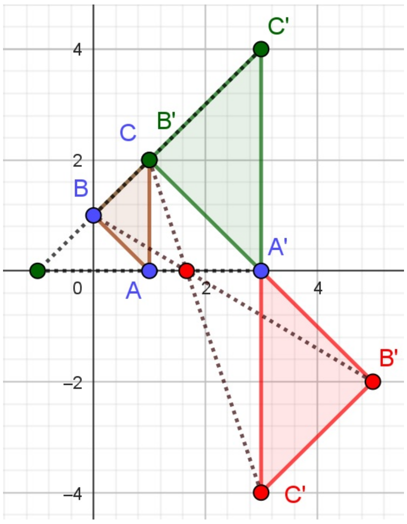
- Si $k=2$ entonces $(a,b)=\dfrac{1}{1-2}(3-2,0)=(-1,0)$. La homotecia queda:

$$t(x,y)=(-1,0)+2((x,y)-(-1,0)) \iff t(x,y)=(2x+1,2y)$$

- Si $k=-2$ entonces $(a,b)=\dfrac{1}{1+2}(3+2,0)=(5/3,0)$. La homotecia queda:

$$t(x,y)=(5/3,0)-2((x,y)-(5/3,0)) \iff t(x,y)=(5-2x,-2y)$$

Hay dos posibles homotecias, la solución no es única.



(b) *Hallar las coordenadas de B' y C'.*

Simplemente aplicamos la fórmula de la homotecia a los vértices originales B y C.

- Si $k=2$:

$$B'=t(B)=t(0,1)=(2\cdot 0+1,2\cdot 1)=(1,2)$$
$$C'=t(C)=t(1,2)=(2\cdot 1+1,2\cdot 2)=(3,4)$$

- Si $k=-2$:

$$B'=t(B)=t(0,1)=(5-2\cdot 0,-2\cdot 1)=(5,-2)$$
$$C'=t(C)=t(1,2)=(5-2\cdot 1+1,-2\cdot 2)=(1,-4)$$

(1 punto)

5.– *Razona la veracidad o falsedad de las siguientes cuestiones:*

(a) *Si $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica y su matriz asociada F_C cumple $traza(F_C)=0$, entonces f NO es un producto escalar.*

VERDADERO. Si $C=\{e_1,e_2\}$ se tiene que $F_C=\begin{pmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2)\\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2)\end{pmatrix}$ y

$$traza(F_C)=f(e_1,e_1)+f(e_2,e_2)$$

Pero si fuese un producto escalar sería definida positiva y por tanto $f(e_1,e_1),f(e_2,e_2)>0$ y $traza(F_C)>0$ lo cuál contradice la hipótesis de que $traza(F_C)=0$.

(b) *Si T_C es la matriz asociada a una transformación ortogonal en el plano y $traza(T_C)=0$ entonces es una simetría.*

FALSO. Por ejemplo si:

$$T_C=\begin{pmatrix} cos(\pi/2) & -sin(\pi/2)\\ sin(\pi/2) & cos(\pi/2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

es la matriz de un giro de ángulo $\pi/2$ (no de una simetría y cumple $traza(T_C)=0+0=0$.

(c) *Dados dos vectores $\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ siempre puede definirse un giro t, tal que $t(\vec{u})=\vec{v}$.*

FALSO. Si los vectores tienen distinta norma no puede haber un giro que lleve uno en el otro porque un giro por ser transformación ortogonal conserva normas. Por ejemplo NO existe un giro que lleve $(1,0,0)$ en $(0,2,0)$.

(0.9 puntos)

6.– *En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ se consideran el tetraedro de vértices $A=(0,0,0)$, $B=(1,0,1)$, $C=(1,1,0)$, $D=(1,1,1)$.*

(i) *Calcular el ángulo que forman las caras ABC y BCD.*

El ángulo que forman dos planos es el ángulo que forman sus vectores normales.

Calculamos el plano que contiene a los puntos A,B,C:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1-0 & 0-0 & 1-0 \\ 1-0 & 1-0 & 0-0 \end{vmatrix}=0 \iff -x+y+z=0 \iff x-y-z=0.$$

Calculamos el plano que contiene a los puntos B,C,D:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1-1 & 0-1 & 1-1 \\ 1-1 & 1-1 & 0-1 \end{vmatrix}=0 \iff x-1=0.$$

Los vectores normales son respectivamente $(1,-1,-1)$ y $(1,0,0)$ y así en ángulo pedido:

$$ang((1,-1,-1),(1,0,,0))=arcos\frac{(1,-1,1)\cdot(1,0,0)}{\|(1,-1,1)\|\|(1,0,0)\|}=arcos\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 54.74^o.$$

(ii) *Hallar el volumen y la superficie del tetraedro.*

El volumen es:

$$V=\frac{1}{6}|[\vec{AB},\vec{AC}\vec{AD}]|=\frac{1}{6}\left|\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\right|=\frac{1}{6}.$$

El área de cada cara es $\frac{1}{2}\|\vec{PQ}\times\vec{PR}\|$ siendo P,Q,R los vértices que la delimitan:

- Área cara ABC:

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AC}\|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\|-\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\|=\frac{1}{2}\|(-1,1,1)\|=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

- Área cara ABD:

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AD}\|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\|-\vec{e}_1+\vec{e}_3\|=\frac{1}{2}\|(-1,0,1)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Área cara ACD:

$$\frac{1}{2}\|\vec{AB}\times\vec{AD}\|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\|\vec{e}_1-\vec{e}_2\|=\frac{1}{2}\|(1,-1,0)\|=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- Área cara BCD:

$$\frac{1}{2}\|\vec{BD}\times\vec{CD}\| = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\|\vec{e}_1\| = \frac{1}{2}\|(1,0,0)\| = \frac{1}{2}.$$

El área total es:

$$area(ABC) + area(ABD) + area(ACD) + area(BCD) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{2} + \frac{1}{2}.$$

(1.2 puntos)

7.– *En el plano afín y para cada $k \in \mathbb{R}$ se definela cónica de ecuación:*

$$x^2 - 2xy + ky^2 - 2x + 2ky - 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica en función de los valores de k.*

Clasificamos en función de los signos de los determinantes de la matriz A asociada a la cónica y la de términos cuadráticos T:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & k & k \\ -1 & k & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & k \end{pmatrix}$$

donde:

$$det(A) = det\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & k-1 & k-1 \\ 0 & k-1 & -2 \end{pmatrix} = (k-1)det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ k-1 & -2 \end{pmatrix} = (k-1)(-k-1) = 1-k^2.$$

y

$$det(T) = k-1$$

Dado que el tipo de cónica depende del signo analizamos los puntos donde se anulan estos determinantes, que corresponden a puntos críticos de posible cambios se signo.

$$det(A) = 0 \iff 1-k^2 = 0 \iff k = \pm 1 \text{ y } det(T) = 0 \iff k-1 = 0 \iff k = 1.$$

Distinguimos entonces los siguientes casos:

k	$\|T\|$	$\|A\|$	TIPO DE CÓNICA
$k < -1$	$-$	$-$	Hipérbola.
$k = -1$	$-$	0	Rectas reales secantes.
$-1 < k < 1$	$-$	$+$	Hipérbola.
$k = 1$	0	0	(*).
$k > 1$	$+$	$-$	Elipse.

En el caso en el que $k = 1$, $|A| = |T| = 0$ y el signo no es suficiente para distinguir el tipo de cónica. Pueden ser dos rectas paralelas (reales o imaginarias) si $rango(A) = 2$ ó una recta doble si $rango(A) = 1$. Pero:

$$rango(A) = rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = rango\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

Por tanto son rectas paralelas. Para distinguir si son reales o imaginarias cortamos con una recta arbitraria. Por ejemplo con $y = 0$:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 2y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera queda:

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \iff x = 1 \pm \sqrt{1+1} \text{ reales}$$

Se trata por tanto de dos rectas paralelas reales.

(ii) *Para $k = 0$:*

(ii.a) *Hallar las asíntotas y la excentricidad de la cónica.*

Vimos que para $k = 0$ se trata de una hipérbola. La matriz asociada y de términos cuadráticos quedan respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para hallar las asíntotas comenzamos calculando las direcciones asíntóticas. Son los vectores (p, q) cumpliendo:

$$\begin{pmatrix} p & q \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \iff p^2 - 2pq = 0 \iff p(p - 2q) = 0.$$

Queda $p = 0$ y así el vector $(0, 1)$ ó $p = 2q$ y así el vector $(2, 1)$.

Las asíntotas son las rectas polares de estos **vectores**.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x = 0 \iff x = 0.$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x - 2y - 2 = 0.$$

Para hallar la excentricidad comenzamos calculando la ecuación reducida $\lambda_1^2 x''^2 + \lambda_2^2 y''2 + d = 0$ donde λ_1, λ_2 son los autovalores de T y $d = det(A)/det(T) = -1$.

Los autovalores son las raíces del polinomio caraterísitico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff \lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Tomamos $\lambda_1 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$. La ecuación reducida queda:

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} x''^2 - \frac{\sqrt{5}-1}{2} y''^2 - 1 = 0$$

y la reducida canónica:

$$\frac{x''^2}{2/(\sqrt{5}+1)} - \frac{y''^2}{2/(\sqrt{5}-1)} = 1 \iff \frac{x''^2}{(\sqrt{5}-1)/2} - \frac{y''^2}{(\sqrt{5}+1)/2} = 1$$

De ahí $a^2 = (\sqrt{5} - 1)/2$, $b^2 = (\sqrt{5} + 1)/2$, $c^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{5}$ y:

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} \approx 1.9.$$

(ii.b) *Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto* $(0, 0)$.

Para hallar las tangentes por $(0, 0)$ (que es un punto que no pertenece a la cónica porque no cumple la ecuación $x^2 - 2xy - 2x - 1 = 0$) calcularemos la recta polar del punto.

La recta polar corta a la cónica en los puntos de tangencia de las tangentes a la misma que pasan por $(0,0)$. Por tanto bastará unir esos puntos de corte con $(0,0)$ para obtener las tangentes pedidas.

Comenzamos calculando la recta polar:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x-1=0 \iff x+1=0.$$

La intersecamos con la cónica:

$$\begin{cases} x^2-2xy-2x-1=0 \\ x+1=0 \end{cases}$$

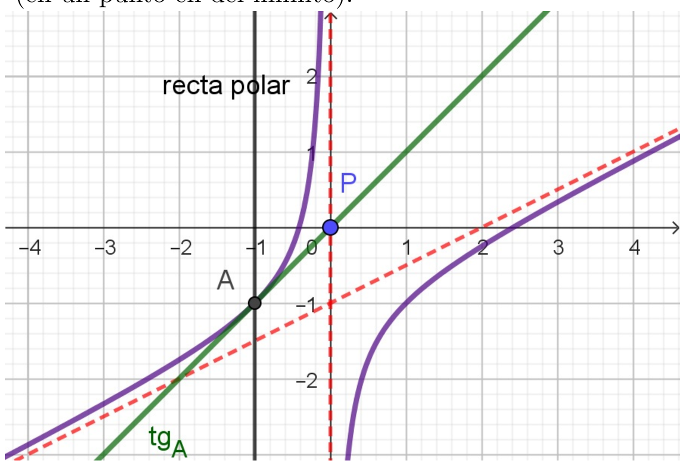
De la segunda ecuación $x=-1$ y sustituyendo en la primera:

$$1+2y+2-1=0 \iff y=-1.$$

Obtenemos el punto $(-1,-1)$. La tangente en ese punto se obtiene uniéndolo con el $(0,0)$:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y-0}{-1-0} \iff x-y=0.$$

Nota: Sólo hay una tangente por $(0,0)$ porque por este punto pasa la asíntota $x=0$ que sería la segunda "tangente" (en un punto en del infinito).



(1.3 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1,0)$, tiene un vértice en el punto $(0,1)$ y una asíntota paralela al eje OY.*

Sea $C=(1,0)$ el centro y $V=(0,1)$ el vértice. Tenemos en cuenta lo siguiente:

- La recta que une el centro y el vértice es un eje de la cónica.

- La recta perpendicular al eje y que pasa por el vértice V es la tangente a la cónica en V.

- El centro de la cónica es un centro de simetría.

Teniendo en cuenta todo esto:

1) Calcularemos la tangente tg_V a la cónica en V como la recta que pasa por V y tiene por vector normal $\vec{VC}$.

2) Calcularemos otro vértice V' como el simétrico de V respecto de C.

3) Calcularemos la tangente $tg_{V'}$ en V' como la simétrica de tg_V por C; equivalentemente la paralela a tg_V que pasa por V'.

4) Formaremos el haz de cónicas conocidas las tangentes yg_V y $tg_{V'}$ y los puntos V, V'.

5) Impondremos que la cónica el haz tenga una asíntota paralela a OY. Equivalentemente que $(0,1)$ sea una dirección asintótica.

Vamos a ello:

1) Calcularemos la tangente tg_V a la cónica en V como la recta que pasa por V y tiene por vector normal $\vec{VC} = C - V = (1,-1)$. La recta es de la forma $x - y + d = 0$. Imponiendo que pase por $V(0,1)$:

$$0 - 1 + d = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 1.$$

Queda $tg_V \equiv x - y + 1 = 0$.

2) Calcularemos otro vértice V' como el simétrico de V respecto de C. Se cumple que $C = (V + V')/2$, de donde:

$$V' = 2C - V = (2,0) - (0,1) = (2,-1).$$

3) Calcularemos la tangente $tg_{V'}$ en V' como la simétrica de tg_V por C; equivalentemente la paralela a tg_V que pasa por V'. Tal paralela es de la forma $x - y + d' = 0$. Imponiendo que pase por $V'(2,-1)$:

$$2 + 1 + d' = 0 \quad \Rightarrow \quad d' = -3.$$

Queda $tg_{V'} \equiv x - y - 3 = 0$.

4) Formaremos el haz de cónicas conocidas las tangentes tg_V y $tg_{V'}$ y los puntos V, V'. Es:

$$tg_V \cdot tg_{V'} + \lambda (recta_{VV'})^2 = 0.$$

La recta VV' es:

$$\frac{x-0}{2-0} = \frac{y-1}{-1-1} \iff x + y - 1 = 0.$$

El haz queda:

$$(x - y + 1)(x - y - 3) + \lambda (x + y - 1)^2 = 0.$$

Desarrollando:

$$x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 3 + \lambda x^2 + \lambda y^2 + \lambda + 2\lambda xy - 2\lambda x - 2\lambda y = 0$$

$$(1+\lambda)x^2 + 2(\lambda - 1)xy + (1+\lambda)y^2 - 2(1+\lambda x) + 2(1-\lambda)y + \lambda - 3 = 0. \qquad (*)$$

5) Impondremos que la cónica el haz tenga una asíntota paralela a OY. Equivalentemente que $(0,1)$ sea una dirección asintótica. Esto significa que:

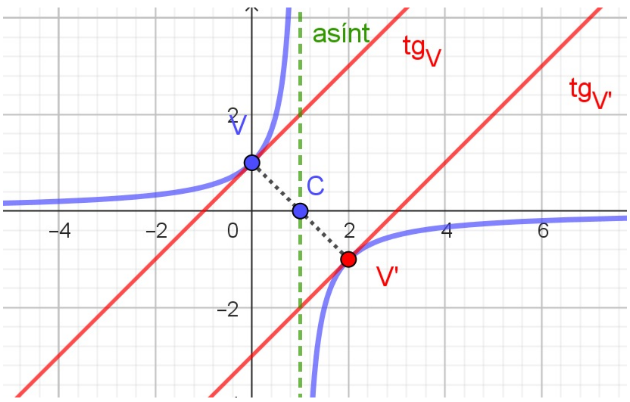
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

donde

$$T = \begin{pmatrix} 1+\lambda & \lambda - 1 \\ \lambda - 1 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

Queda $\lambda + 1 = 0$, es decir, $\lambda = -1$. Sustituyendo en (*):

$$-4xy + 4y - 4 = 0 \iff xy - y + 1 = 0.$$



(1.3 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$y^2 + 5z^2 + 2xy - 4xz - 4yz + 4x + 2y - 4z = 0.$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

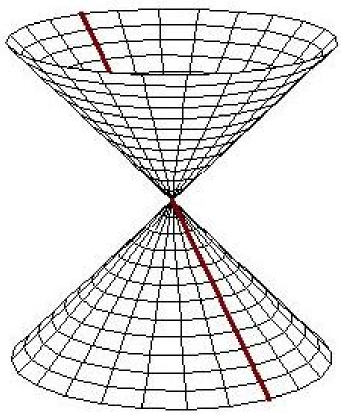
Para clasificar la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, multiplicada por un número o sumada a las demás:

$$A \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 5 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{21}(-1)} \xrightarrow{H_{31}(2)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \xrightarrow{\mu_{31}(2)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{42}(1)} \xrightarrow{\mu_{42}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que la signatura queda $(+, -, +; 0) \sim (+, +, -; 0)$ y así se trata de un cono real.



(0.6 puntos)
