

1.— En \mathbb{R}^3 se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática en función de k , indicando su rango y signatura.

Para clasificar la forma cuadrática diagonalizamos por congruencia su matriz asociada realizando las mismas operaciones elementales fila y columna:

$$F_C \xrightarrow{H_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & k \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & k \\ 1 & k & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)H_{31}(-1)\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k-1 \\ 0 & k-1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-(k-1))\mu_{32}(-(k-1))} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2k-k^2 \end{pmatrix}$$

El tipo de forma cuadrática depende de los signos de la diagonal. Para distinguir casos estudiamos cuando se anulan los términos de la diagonal:

$$2k - k^2 = 0 \iff k(2 - k) = 0 \iff k = 0 \text{ ó } k = 2.$$

Distinguimos:

- Si $k < 0$ entonces: $sign(2, 1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.
- Si $k = 0$ entonces: $sign(2, 0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.
- Si $0 < k < 2$ entonces: $sign(3, 0)$, $rango = 2$ y es por tanto no degenerada y definida positiva.
- Si $k = 2$ entonces: $sign(2, 0)$, $rango = 2$ y es por tanto degenerada y semidefinida positiva.
- Si $k > 2$ entonces: $sign(2, 1)$, $rango = 3$ y es por tanto no degenerada e indefinida.

(ii) Para $k = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

Es una base en la cual la forma cuadrática diagonaliza. Para hallar realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna realizadas en el proceso de diagonalización. Obtendremos la matriz M_{CB} siendo B la base buscada.

$$Id \xrightarrow{\mu_{12}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto la base pedida es:

$$B = \mathcal{L}\{(0, 1, 0), (1, -1, 0), (0, -1, 1)\}.$$

(iii) Para $k = 0$ calcular los vectores autoconjugados.

Dado que para $k = 0$ la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$autoconj(w) = \ker(f) = \{(x, y, z) | F_c(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\}$$

Quedan las ecuaciones:

$$2x + y = 0, \quad x + y + z = 0, \quad y + 2z = 0$$

Eliminando dependientes y resolviendo:

$$\text{autoconj}(w) = \ker(f) = \{(x, y, z) | F_c(x, y, z)^t = (0, 0, 0)^t\} = \mathcal{L}\{(1, -2, 1)\}.$$

(iv) ¿Para qué valores de k la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?

La forma bilineal es simétrica por estar asociada a una forma cuadrática. Es producto escalar cuando además es definida positiva, es decir, según vimos en (i) cuando $0 < k < 2$.

(1.2 puntos)

2.— Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- $B = \{(1, 0), (1, -3)\}$ es una base ortogonal.

- Los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forma un ángulo de 30 grados.

- $\|(1, 0)\| = \sqrt{3}$.

Sabemos que la matriz de Gram de un producto escalar es simétrica:

$$G_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Por ser B una base ortogonal:

$$(1, 0) \cdot (1, -3) = 0 \iff (1 \ 0) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \iff a - 3b = 0.$$

Dado que $\|(1, 0)\| = \sqrt{3}$:

$$3 = \|(1, 0)\|^2 = (1, 0) \cdot (1, 0) \iff 3 = (1 \ 0) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a$$

De estas dos ecuaciones ya tenemos que:

$$a = 3, \quad b = a/3 = 1 \quad \Rightarrow \quad G_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & c \end{pmatrix}$$

Finalmente si los vectores $(1, 0)$ y $(0, 1)$ forma un ángulo de 30 grados:

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = \|(1, 0)\| \|(0, 1)\| \cos(30)$$

donde:

$$\|(1, 0)\|^2 = (1, 0) \cdot (1, 0) = (1 \ 0) G_C \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\|(0, 1)\|^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (0 \ 1) G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c$$

$$(1, 0) \cdot (0, 1) = (1 \ 0) G_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1$$

Nos queda:

$$1 = \sqrt{3}\sqrt{c} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Quitando denominadores y elevando al cuadrado:

$$4 = 9c \iff c = 4/9$$

Por tanto $G_C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4/9 \end{pmatrix}$.

3.— Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de \mathbb{R}^3 respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si A es una simetría respecto a una recta entonces $\det(A) = 1$.

VERDADERO. Si es una simetría respecto a una recta, entonces en una determinada base la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

con $\det(A') = 1$. Como el determinante se conserva al cambiar de base tenemos que la afirmación es cierta.

(ii) Si $\text{traza}(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

FALSO. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

con $\alpha = 120^\circ$ se trata de un giro, pero su traza es $1 + 2\cos(120^\circ) = 0$.

(iii) Si A es un giro entonces $\text{traza}(A) \geq -1$.

VERDADERO. Recordemos que las trazas de las matrices asociadas a endomorfismos se conservan por cambios de base. Si es un giro en una base adecuada la matriz asociada es:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix},$$

y

$$\text{traza}(A) = \text{traza}(A') = 1 + 2\cos(\alpha) \geq 1 + 2 \cdot (-1) = -1.$$

(iv) Si $\text{traza}(A) = 1$ entonces A es un giro.

FALSO. Por ejemplo si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

entonces es la matriz asociada a una simetría respecto a un plano, pero $\text{traza}(A) = 1 + 1 - 1 = 1$.

4.— En el espacio afín dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \quad s \equiv (x, y, z) = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0)$$

(i) Hallar la ecuación de una recta l cortando a ambas rectas y perpendicular a ellas.

Tomaremos un punto genérico P de la recta r , otro Q de la recta s e impondremos que el vector que los une sea perpendicular a ambas rectas.

La ecuación vectorial de r es:

$$(x, y, z) = (2, 1, 2) + \mu(1, 1, 1).$$

Tomamos $P = (2, 1, 2) + \mu(1, 1, 1)$ y $Q = (0, 1, 1) + \lambda(1, 1, 0)$.

El vector que une P y Q es:

$$\vec{PQ} = Q - P = (-2, 0, -1) + \lambda(1, 1, 0) - \mu(1, 1, 1).$$

Imponemos que sea perpendicular a ambas rectas, es decir, que el producto escalar con sus vectores directores sea nulo:

$$\vec{PQ} \cdot (1, 1, 1) = 0 \iff -3 + 2\lambda - 3\mu = 0$$

$$\vec{PQ} \cdot (1, 1, 0) = 0 \iff -2 + 2\lambda - 2\mu = 0$$

Resolviendo, $\lambda = 0$ y $\mu = -1$. Entonces $P = (2, 1, 2) - 1 \cdot (1, 1, 1) = (1, 0, 1)$ y $Q = (0, 1, 1) + 0 \cdot (1, 1, 0) = (0, 1, 1)$.

La recta pedida es la que une P y Q . Su ecuación vectorial:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(-1, 1, 0)$$

sus paramétricas:

$$x = 1 - t, \quad y = t, \quad z = 1$$

y sus implícitas:

$$x + y = 1, \quad z = 1.$$

(ii) *Hallar la distancia entre r y s .*

La distancia entre las rectas es la misma que la distancia entre los puntos P y Q calculados en el apartado anterior:

$$d(r, s) = d(P, Q) = \|Q - P\| = \|(-1, 1, 0)\| = \sqrt{2}.$$

También podría usarse la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{[\vec{AB}, \vec{u}_r, \vec{u}_s]}{\|\vec{u}_r \times \vec{u}_s\|}$$

donde $A = (2, 1, 2)$ (punto de r), $B = (0, 1, 1)$ (punto de s), y $\vec{u}_r = (1, 1, 1)$ y $\vec{u}_s = (1, 1, 0)$ son respectivamente los vectores directores de r y s .

5.— *En el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^3 hallar las ecuaciones de una homotecia de razón 3 y centro el punto $(1, 0, -1)$.*

Las ecuaciones de una homotecia de centro C y razón k son:

$$f(X) = C + k(X - C)$$

En este caso:

$$f(x, y, z) = (1, 0, -1) + 3((x, y, z) - (1, 0, -1)) = (3x - 2, 3y, 3z + 2)$$

Hallar las ecuaciones paramétricas un plano π sabiendo que se transforma por la homotecia anterior en el plano $2x - y + z + 1 = 0$.

Las homotecias conservan el paralelismo. Luego el plano π es paralelo a su transformado y por tanto de la forma:

$$2x - y + z + d = 0. \quad (*)$$

Por otra parte tomamos un punto del plano dado, es decir, un punto que cumpla la ecuación $2x - y + z + 1 = 0$. Por ejemplo $P = (0, 1, 0)$. Buscamos el punto que se transforma en P por la homotecia dada:

$$f(x, y, z) = (0, 1, 0) \iff (3x - 2, 3y, 3z + 2) = (0, 1, 0) \iff (x, y, z) = (2/3, 1/3, -2/3)$$

Por tanto el punto $(2/3, 1/3, -2/3)$ debe de pertenecer al plano π . Sustituimos en (*):

$$2(2/3) - (1/3) + (-2/3) + d = 0 \implies d = -1/3.$$

El plano pedido queda:

$$2x - y + z - \frac{1}{3} = 0.$$

6.— En el espacio afín sean los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 1, 1)$.

- a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + y = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?

Sea $C = (a, b, c)$. Por estar en el plano $x + y = 2$ se cumple $a + b = 2$. Además para que el triángulo sea equilátero tiene que cumplirse que:

$$d(A, B) = d(A, C) \iff \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-0)^2 + (c-1)^2} \iff \\ \iff 2 = (a-1)^2 + (b-0)^2 + (c-1)^2$$

$$d(A, B) = d(B, C) \iff \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(a-0)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2} \iff \\ \iff 2 = (a-0)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2$$

Restando las dos ecuaciones y simplificando queda:

$$0 = 1 - 2a - 1 + 2b \iff a = b$$

Como además $a + b = 2$ obtenemos $a = b = 1$. Sustituyendo ahora en la primera ecuación:

$$2 = (1-1)^2 + (1-0)^2 + (c-1)^2 \iff (c-1)^2 = 1 \iff c = 0 \text{ ó } c = 2.$$

Hay dos soluciones (la solución no es única):

$$C = (1, 1, 0) \text{ ó } C = (1, 1, 2).$$

- b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el punto $D = (0, 0, 1)$.

El volumen pedido es:

$$V = \frac{1}{6} |\det(DA, DB, DC)|$$

Cuando $C = (1, 1, 0)$ queda:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}.$$

Cuando $C = (1, 1, 2)$:

$$V = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \right| = \frac{1}{6}.$$

(1 punto)

7.— En el plano afín para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2axy + y^2 - 2y = 0$$

- (i) Clasificar la cónica en función de los valores de a .

Las matrices asociada y de términos cuadráticos de la cónica son respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 1 \end{pmatrix}.$$

Clasificamos en función de los signos de los determinantes de A y T :

$$|A| = -1, \quad |T| = 1 - a^2.$$

Distinguimos los casos tomando como límites los valores de a que anulan los determinantes:

$$1 - a^2 = 0 \iff a = 1 \text{ ó } a = -1.$$

Entonces:

- Si $a < -1$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.
- Si $a = -1$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parábola.
- Si $-1 < a < 1$, $|A| < 0$ y $|T| > 0$. Se trata de una elipse real.
- Si $a = 1$, $|A| < 0$ y $|T| = 0$. Se trata de una parábola.
- Si $a > 1$, $|A| < 0$ y $|T| < 0$. Se trata de una hipérbola.

(ii) Para $a = 1$:

(ii.a) Hallar su centro, asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.

Para $a = 1$ vimos que es una parábola. Por tanto no tiene centro ni asíntotas y su excentricidad es 1.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo.

Calculamos los autovalores de T como raíces del polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1 - \lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda = 2 \text{ ó } \lambda = 0.$$

Calculamos el autovector asociado al $\lambda = 2$:

$$(T - 2Id) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0.$$

Resolviendo tomamos $\vec{u}_1 = (1, 1)$.

El eje es su recta polar:

$$(1 \ 1 \ 0) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y - 1 = 0.$$

El vértice es la intersección del eje y la cónica:

$$\begin{cases} 0 = 2x + 2y - 1 \\ 0 = x^2 + 2xy + y^2 - 2y \end{cases}$$

Resolviendo obtenemos $V = (3/8, 1/8)$.

(ii.b) Calcular la ecuación de la tangente a la cónica en el origen.

La tangente en el punto $(0, 0)$ es:

$$(0 \ 0 \ 1) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff y = 0.$$

- 8.— Hallar la ecuación de una cónica que tiene el centro en el punto $(4, 3)$, un foco en $(0, 0)$ y excentricidad $e = 5/6$.

Por tener excentricidad menor que 1 se trata de una elipse.

El segundo foco F' de la elipse es el simétrico del primero respecto del centro:

$$\frac{F' + (0, 0)}{2} = (4, 3) \Rightarrow F' = (8, 6).$$

Usamos ahora la caracterización de la elipse como lugar geométrico: la suma de las distancias de un punto de la curva a los focos es constante igual a $2a$.

$$d((x, y), (0, 0)) + d((x, y), (8, 6)) = 2a$$

Finalmente sabemos que $e = c/a$, es decir, $a = c/e$ y $c = d(\text{foco}, \text{centro}) = d((0, 0), (4, 3)) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$. De donde:

$$a = c/e = 5/(5/6) = 6.$$

Por tanto la ecuación buscada es:

$$\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-8)^2 + (y-6)^2} = 2 \cdot 6$$

Operamos para simplificarla:

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 16x + 64 + y^2 - 12y + 36} &= 12 - \sqrt{x^2 + y^2} \\ x^2 - 16x + 64 + y^2 - 12y + 36 &= 144 + x^2 + y^2 - 24\sqrt{x^2 + y^2} \\ 24\sqrt{x^2 + y^2} &= 16x + 12y + 44 \\ 6\sqrt{x^2 + y^2} &= 4x + 3y + 11 \\ 36(x^2 + y^2) &= (4x + 3y + 11)^2 \\ 36x^2 + 36y^2 &= 16x^2 + 9y^2 + 121 + 24xy + 88x + 66y \\ 20x^2 - 24xy + 27y^2 - 88x - 66y - 121 &= 0 \end{aligned}$$

- 9.— Dada la cuádrica de ecuación:

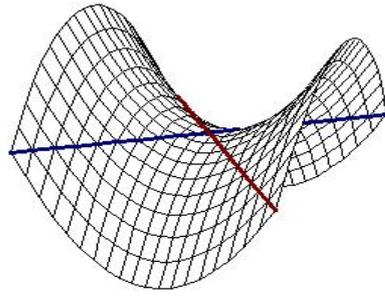
$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

Clasificamos la cuádrica diagonalizando su matriz asociada por congruencia; tenemos en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & -8 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} &\xrightarrow{H_{21}(-2)H_{31}(-1)\mu_{21}(-2)\mu_{31}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & 4 \\ 0 & -6 & -9 & 4 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\xrightarrow{H_{32}(-3/2)H_{41}(1)\mu_{32}(-3/2)\mu_{41}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

No se puede seguir diagonalizando sin usar la cuarta fila de alguna de las formas conraindicadas. El tipo de cuádrica queda determinado por la signatura de la matriz de términos cuadráticos $(+, -, 0)$. Se trata entonces de un paraboloides hiperbólico.



(0.6 puntos)

