Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **12 de Julio de 2024**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma cuadrática w cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar la forma cuadrática en función de k, indicando su rango y signatura.

(ii) Para $k = 1$ calcular una base de vectores conjugados.

(iii) Para $k = 0$ calcular los vectores autoconjugados.

(iv) ¿Para qué valores de k la forma bilineal asociada a w es un producto escalar?.

(1.2 puntos)

2.– Hallar la matriz de Gram respecto de la base canónica de un producto escalar, sabiendo que:

- $B = \{(1,0),(1,-3)\}$ es una base ortogonal.
- Los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forma un ángulo de 30 grados.
- $\|(1,0)\| = \sqrt{3}$.

(1 punto)

3.– Sea A la matriz asociada a una transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a una base cualquiera. Razonar la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

(i) Si A es una simetría respecto a una recta entonces $det(A) = 1$.

(ii) Si $traza(A) = 0$ entonces A es un giro compuesto con una simetría respecto a un plano.

(iii) Si A es un giro entonces $traza(A) \geq -1$.

(iv) Si $traza(A) = 1$ entonces A es un giro.

(1.2 puntos)

4.– En el espacio afín dadas las rectas de ecuaciones:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (0,1,1) + \lambda(1,1,0)$$

(i) Hallar la ecuación de una recta l cortando a ambas rectas y perpendicular a ellas.

(ii) Hallar la distancia entre r y s.

(1.1 puntos)

5.– En el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ hallar las ecuaciones de una homotecia de razón 3 y centro el punto $(1,0,-1)$. Hallar las ecuaciones paramétricas un plano π sabiendo que se se transforma por la homotecia anterior en el plano $2x - y + z + 1 = 0$.

(1 punto)

6.– En el espacio afín sean los puntos $A(1, 0, 1)$ y $B(0, 1, 1)$.

a) Calcular las coordenadas de un tercer punto C en el plano de ecuación $x + y = 2$ de manera que el triángulo ABC sea equilátero. ¿Es única la solución?.

b) Para cada una de las soluciones del apartado anterior, hallar el volumen de la pirámide que tiene por base el triángulo y como cuarto vértice el punto $D = (0, 0, 1)$.

(1 punto)

7.– En el plano afín para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2axy + y^2 - 2y = 0$$

(i) Clasificar la cónica en función de los valores de a.

(ii) Para $a = 1$:

(ii.a) Hallar su centro, asíntotas, ejes, vértices y excentricidad.

(ii.b) Calcular la ecuación de la tangente a la cónica en el origen.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica que tiene el centro en el punto $(4, 3)$, un foco en $(0, 0)$ y excentricidad $e = 5/6$.

(1.4 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **12 de xullo 2024**

1.– En $\mathbb{R}^3$ se considera unha forma cuadrática w con matriz asociada respecto da base canónica:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & k \\ 1 & 1 & 1 \\ k & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Clasificar a forma cuadrática en función de k, indicando o seu rango a súa signatura.

(ii) Para $k = 1$ calcular unha base de vectores conxugados.

(iii) Para $k = 0$ calcular os vectores autoconxugados.

(iv) Para qué valores de k a forma bilineal asociada a w é un producto escalar?.

(1.2 puntos)

2.– Atopar a matriz de Gram respecto da base canónica de un producto escalar, sabendo que:

- $B = \{(1,0), (1,-3)\}$ é una base ortogonal.
- Os vectores $(1,0)$ e $(0,1)$ forman un ángulo de 30 graos.
- $\|(1,0)\| = \sqrt{3}$.

(1 punto)

3.– Sexa A a matriz asociada a unha transformación ortogonal de $\mathbb{R}^3$ respecto a unha base calquera. Razoar a veracidade ou falsedade das seguintes afirmacións:

(i) Se A é una simetría respecto a unha recta entón $det(A) = 1$.

(ii) Se $traza(A) = 0$ entón A é un xiro composto cunha simetría respecto a un plano.

(iii) Se A é un xiro entón $traza(A) \geq -1$.

(iv) Se $traza(A) = 1$ entón A é un xiro.

(1.2 puntos)

4.– No espazo afín dadas as rectas de ecuacións:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}, \qquad s \equiv (x,y,z) = (0,1,1) + \lambda(1,1,0)$$

(i) Atopar a ecuación dunha recta l cortando a ambas rectas e perpendicular a elas.

(ii) Atopar a distancia entre r e s.

(1.1 puntos)

5.– No espazo vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ atopar as ecuacións dunha homotecia de razón 3 e centro o punto $(1,0,-1)$. Atopar as ecuacións paramétricas dun plano π sabendo que se se transforma pola homotecia anterior no plano $2x - y + z + 1 = 0$.

(1 punto)

6.– No espazo afín sexan os puntos $A(1,0,1)$ e $B(0,1,1)$.

a) Calcular as coordenadas dun terceiro punto C no plano de ecuación $x+y=2$ de maneira que o triángulo ABC sexa equilátero. É única la solución?.

b) Para cada unha das solucións do apartado anterior, atopar o volumen da pirámide que ten por base o triángulo e como cuarto vértice o punto $D=(0,0,1)$.

(1 punto)

7.– No plano afín para cada $a \in \mathbb{R}$ se considera a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2axy + y^2 - 2y = 0$$

(i) Clasificar a cónica en función dos valores de a.

(ii) Para $a = 1$:

(ii.a) Atopar o seu centro, asíntotas, eixos, vértices e excentricidade.

(ii.b) Calcular a ecuación da tanxente á cónica na orixe.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica que ten o centro no punto $(4,3)$, un foco en $(0,0)$ e excentricidade $e = 5/6$.

(1.4 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 - 8z^2 + 4xy + 2xz - 8yz + 8y + 8z + 2 = 0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
