

1.— Sea $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal simétrica y w su forma cuadrática asociada. Se sabe que:

- $\ker(w) = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$.

- $w(0, 1) = 2$

(i) Calcular la matriz asociada a w en la base canónica.

Sabemos que la matriz asociada a una forma cuadrática es simétrica. Por tanto es de la forma:

$$F_C = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

Imponemos las condiciones dadas:

- $\ker(w) = \mathcal{L}\{(1, 1)\}$:

$$F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a + b = 0 \\ b + c = 0 \end{cases} \iff b = -a, \quad c = -b = a.$$

- $w(0, 1) = 2$

$$2 = w(0, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c = a$$

Concluimos que $a = c = 2$ y $b = -a = -2$, y por tanto:

$$F_C = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Clasificar la forma cuadrática indicando además su rango y signatura.

Para clasificar diagonalizamos por congruencia la matriz asociada:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1)\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La signatura es $(1, 0)$ y el rango 1. Se trata de una forma cuadrática degenerada ($\text{rango} < \dim(\mathbb{R}^2)$) y semidefinida positiva.

(iii) Hallar una base de vectores conjugados.

Si B es una base de vectores conjugados, entonces F_B es diagonal. En el apartado anterior ya hemos diagonalizado la matriz por congruencia, lo cual se interpreta como un cambio de base. Basta hallar la base B o equivalentemente M_{CB} . Para ello realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna que las realizadas en el proceso de diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Por tanto $B = \{(1, 0), (1, 1)\}$.

(iv) Hallar los vectores autoconjugados.

Dado que la forma cuadrática es semidefinida positiva, los vectores autoconjugados coinciden con el núcleo:

$$\text{autoconju}(w) = \ker(w) = \mathcal{L}\{(1, 1)\}.$$

(v) Calcular $w(1, 2)$.

$$w(1, 2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -2.$$

2.— Sea $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que 1. Se considera una forma bilineal $f : \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \times \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, cuya matriz asociada respecto a la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(i) Demostrar que f es un producto escalar.

Un producto escalar es una forma bilineal, simétrica y definida positiva. Que es bilineal lo dice el enunciado.

Es simétrica si su matriz asociada lo es. Y en este caso es evidente que $F_C = F_C^t$.

Para ver que es definida positiva diagonalizamos por congruencia la matriz asociada y comprobamos que tiene signatura $(2, 0)$:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{sign}(f) = (2, 0).$$

(ii) Respecto al producto escalar definido por f :

(ii.a) Dar dos polinomios que formen una base ortonormal de $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

Una base B es ortonormal si y sólo si la matriz asociada del producto escalar respecto a ella es la identidad. Entonces comenzamos completando la diagonalización anterior hasta llegar a la identidad:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{H_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F_B$$

Ahora realizamos sobre la identidad las mismas operaciones columna realizadas en el proceso de diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{21}(1/2)} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Las columnas de la matriz M_{CB} son las coordenadas de los vectores de la base ortonormal B respecto de la base canónica $C = \{1, x\}$:

$$B = \{(1, 0)_C, (-1/2, 1/2)_C\} = \left\{ 1, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \right\}$$

(ii.b) Hallar el ángulo que forman los polinomios $p(x) = 1 + x$ y $q(x) = 1 - x$.

Sabemos que:

$$\text{ang}(p(x), q(x)) = \arccos \left(\frac{\langle p(x), q(x) \rangle}{\|p(x)\| \|q(x)\|} \right)$$

Para poder hacer los cálculos utilizando la matriz F_C del producto escalar, expresamos los polinomios dados en coordenadas respecto a la base canónica C :

$$p(x) = 1 + x = (1, 1)_C, \quad q(x) = 1 - x = (1, -1)_C.$$

Entonces:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = -4$$

Ahora las normas:

$$\|p(x)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = 2\sqrt{2}$$

y

$$\|q(x)\| = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} = 2$$

Finalmente:

$$\text{ang}(p(x), q(x)) = \arccos\left(\frac{-4}{2\sqrt{2} \cdot 2}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = 135^\circ.$$

3.— Sea F_C la matriz asociada a una forma cuadrática de $\mathbb{R}^3$. Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si f es definida negativa entonces $\text{traza}(F_C) < 0$.

VERDADERO. Si $C = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$, por definición de matriz asociada a una forma cuadrática $(F_C)_{ii} = f(\vec{e}_i, \vec{e}_i)$. Por ser definida negativa $f(\vec{u}, \vec{u}) < 0$ para cualquier vector no nulo. Entonces:

$$\text{traza}(F_C) = (F_C)_{11} + (F_C)_{22} + (F_C)_{33} = f(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + f(\vec{e}_2, \vec{e}_2) + f(\vec{e}_3, \vec{e}_3) < 0$$

(ii) Si $\text{traza}(F_C) < 0$ entonces f es definida negativa.

FALSO. Por ejemplo si $F_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ se tiene que $\text{traza}(F_C) < 0$ pero la forma cuadrática es indefinida porque su signatura es $(2, 1)$.

(iii) Si $\det(F_C) \neq 0$ y $(F_C)_{11} = 0$, entonces f es indefinida.

VERDADERO. Si $\det(F_C) \neq 0$ entonces la forma cuadrática no puede ser semidefinida, ya que en ese caso su rango no podría ser máximo y su determinante sería nulo.

Además si $0 = (F_C)_{11} = f(\vec{e}_1, \vec{e}_1)$ no puede ser ni definida positiva ni definida negativa.

Por tanto la única posibilidad es que sea indefinida.

(iv) Si $\det(F_C) < 0$ entonces f es definida negativa.

FALSO. El mismo ejemplo dado en el apartado (i) cumple $\det(F_C) = -3 < 0$ pero vimos que es indefinida.

(1.2 puntos)

4.— En el espacio euclídeo $\mathbb{R}^3$ se considera la aplicación lineal $t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con matriz asociada respecto a la base canónica:

$$T_C = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix}$$

(i) Estudiar para que valores de a y b , t es una transformación ortogonal.

Dado que trabajamos con el producto escalar usual y la base canónica es ortonormal, la transformación es ortogonal si y sólo si:

$$T_C^t T_C = Id \iff \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & 1 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando llegamos a las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 1$$

$$2ab = 0$$

De la segunda ecuación o bien $a = 0$, o bien $b = 0$. Y utilizando además la primera llegamos a cuatro casos:

CASO I: $a = 0$ y $b = 1$.

CASO II: $a = 0$ y $b = -1$.

CASO III: $b = 0$ y $a = 1$.

CASO IV: $b = 0$ y $a = -1$.

(ii) *Para cada uno de los casos anteriores clasificarla y describirla geoméricamente.*

Para clasificarlas nos basamos en el determinante de la matriz asociada. Si $\det(T_C) = 1$ se trata de un giro; si $\det(T_C) = -1$ se trata de un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Tenemos que $\det(T_C) = a^2 - b^2$.

CASO I: $a = 0$ y $b = 1$. $\det(T_C) = 0^2 - 1^2 = -1$. Se trata de un giro compuesto con simetría. El ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) + 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Por tanto en realidad el giro no actúa y se trata simplemente de una simetría respecto a un plano. Éste corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto al plano $x - z = 0$.

CASO II: $a = 0$ y $b = -1$. $\det(T_C) = 0^2 - (-1)^2 = -1$. Se trata de un giro compuesto con simetría. En ángulo α de giro cumple:

$$-1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) + 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Denuevo el giro no actúa y se trata simplemente de una simetría respecto a un plano. Corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x + z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto al plano $x + z = 0$.

CASO III: $a = 1$ y $b = 0$. $\det(T_C) = 1^2 - (0)^2 = 1$. Se trata de un giro. En ángulo α de giro cumple:

$$1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) - 1)/2) = \pm \arccos(1) = 0.$$

Es un giro de cero grados. La transformación no "hace nada".

Observación: De hecho para $a = 1$ y $b = 0$, T_C es simplemente la matriz identidad.

CASO IV: $a = -1$ y $b = 0$. $\det(T_C) = (-1)^2 - (0)^2 = 1$. Se trata de un giro. En ángulo α de giro cumple:

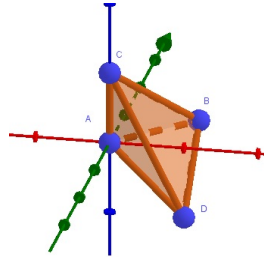
$$1 + 2\cos(\alpha) = \text{traza}(T_C) \Rightarrow \alpha = \pm \arccos((\text{traza}(T_C) - 1)/2) = \pm \arccos(-1) = 180^\circ.$$

Es un giro de 180° . Equivalentemente una simetría respecto a una recta. Corresponde a los autovectores de T_C asociados al autovalor 1:

$$(T_C - 1 \cdot Id) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x = 0, \quad z = 0.$$

Conclusión: es una simetría respecto a la recta $\mathcal{L}\{(0, 1, 0)\}$.

5. En el espacio afín euclídeo $\mathbb{R}^3$ sea el tetraedro de vértices $A = (0, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ y $D = (1, 0, -1)$. Calcular su área y su volumen.



Por defecto trabajamos con el producto escalar usual. En ese caso sabemos que el volumen del tetraedro definido por tres vectores viene dado por:

$$Vol = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}]| = \frac{1}{6} \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right\| = \frac{1}{6}.$$

El área es la suma de las áreas de cada una de las cuatro caras. Estas son triángulos. Usaremos que el área de un triángulo dado por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|$.

Cara ABC :

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = (1, -1, 0).$$

y

$$area(ABC) = \frac{1}{2} \|(1, -1, 0)\| = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2}.$$

Cara ABD :

$$\vec{AB} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 = (-1, 1, -1).$$

y

$$area(ABD) = \frac{1}{2} \|(-1, 1, -1)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{3}.$$

Cara ACD :

$$\vec{AC} \times \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{e}_2 = (0, 1, 0).$$

y

$$area(ACD) = \frac{1}{2} \|(0, 1, 0)\| = \frac{1}{2}.$$

Cara BCD :

$$\vec{BC} \times \vec{BD} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = (2, -1, 1).$$

y

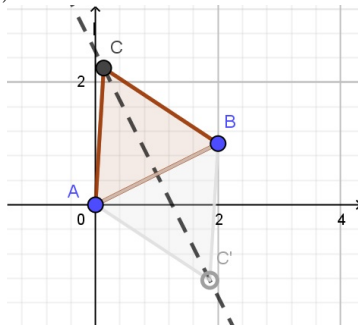
$$area(BCD) = \frac{1}{2} \|(2, -1, 1)\| = \frac{1}{2} \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{6}.$$

El área total queda:

$$\frac{1}{2} (\sqrt{2} + \sqrt{3} + 1 + \sqrt{6}).$$

(0.8 puntos)

6. En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ sean A, B, C los vértices de un triángulo equilátero situado en el semiplano $y \geq 0$, con $A = (0, 0)$ y $B = (2, 1)$.



- (i) Calcula las coordenadas de C .

Sea (a, b) las coordenadas de C . Dado que es un triángulo equilátero tiene que cumplirse que:

$$d(A, B) = d(A, C) = d(B, C)$$

Donde:

$$d(A, B) = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{5}$$

$$d(A, C) = \sqrt{(a-0)^2 + (b-0)^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$d(B, C) = \sqrt{(a-2)^2 + (b-1)^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5}$$

Igualando distancias y elevando al cuadrado obtenemos las ecuaciones:

$$a^2 + b^2 = 5$$

$$a^2 + b^2 - 4a - 2b + 5 = 5$$

Restando $4a + 2b = 5$, es decir, $b = (5 - 4a)/2$. Sustituyendo en la primera ecuación:

$$a^2 + \left(\frac{5-4a}{2}\right)^2 = 5$$

Operando y simplificando:

$$4a^2 - 8a + 1 = 0$$

de donde $a = 1 \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$; usando que $b = (5 - 4a)/2$, obtenemos dos posibles soluciones:

$$C = (1 + \sqrt{3}/2, 1/2 - \sqrt{3}) \quad \text{ó} \quad C = (1 - \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}).$$

Como el triángulo ha de estar en el semiplano $y \geq 0$ la única posibilidad es:

$$C = (1 - \sqrt{3}/2, 1/2 + \sqrt{3}).$$

- (ii) Hallar las ecuaciones de una simetría respecto a una recta que lleve el vértice A en el B .

El eje de simetría es la mediatriz de un punto y su imagen, es decir, la recta que pasa por el punto medio de ambos y es ortogonal al segmento que los une.

Para hallar las ecuaciones de la simetría necesitamos primero un punto cualquiera del eje. Podemos tomar el punto medio de A y B :

$$M = \frac{A+B}{2} = (2, 1/2).$$

Las ecuaciones son entonces:

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + T_C\left(\begin{pmatrix} x-2 \\ y-1/2 \end{pmatrix}\right)$$

donde T_C es la matriz de la transformación ortogonal correspondiente a una simetría respecto al subespacio generado por el vector director del eje $\vec{u}$

Para calcular T_C primero trabajamos en una base auxiliar $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ donde $\vec{v}$ es ortogonal a $\vec{u}$. Según hemos indicado al principio un vector ortogonal al eje es el vector $\vec{AB} = (2, 1) = \vec{v}$. Imponemos que $\vec{u} = (x, y)$ sea perpendicular a $\vec{v}$:

$$(x, y) \cdot (2, 1) = 0 \iff 2x + y = 0 \iff y = -2x$$

Tomamos $x = 1$ e $y = -2$, es decir, $\vec{u} = (1, -2)$. En la base $B = \{(1, -2), (2, 1)\}$ la matriz de la simetría es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Hacemos del cambio de base a la canónica:

$$T_C = M_{CB} T_B M_{CB}^{-1}, \quad \text{donde } M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Operando resulta:

$$T_C = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

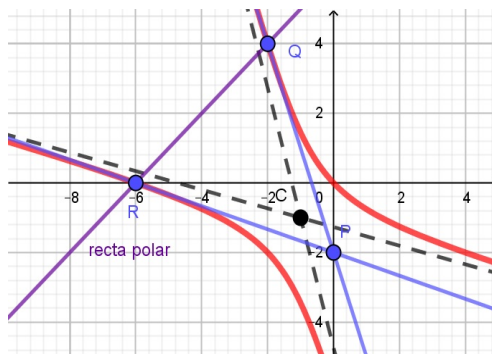
y finalmente las ecuaciones de la simetría:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 1/2 \end{pmatrix}$$

(1.2 puntos)

7.— En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y = 0$$



(i) Clasificar la cónica y dar su ecuación reducida.

Comenzamos escribiendo la matriz asociada y la matriz de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Para clasificarla calculamos los determinantes de ambas matrices:

$$\det(A) = 18 > 0, \quad \det(T) = -3 < 0$$

Se trata de una hipérbola. En ese caso la ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x''^2 + \lambda_2 y''^2 + d = 0$$

donde λ_1, λ_2 son los autovalores de T y $d = \det(A)/\det(T) = -6$.

Los autovalores de T son las raíces de su polinomio característico:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1 - \lambda)^2 - 2^2 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0.$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos $\lambda_1 = 3$ y $\lambda_2 = -1$. La ecuación reducida queda:

$$3x''^2 - y''^2 - 6 = 0.$$

(ii) *Hallar el centro, sus asíntotas y la distancia entre sus dos vértices.*

El centro es el punto (p, q) cumpliendo:

$$A \begin{pmatrix} p \\ q \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

donde el valor de h es indiferente y por tanto se consideran sólo las dos primeras ecuaciones:

$$p + 2q + 3 = 0$$

$$2p + q + 3 = 0$$

Resolviendo se obtiene que el centro es el punto $(-1, -1)$.

Las asíntotas son las rectas tangentes en las direcciones asíntóticas; estas corresponden a los vectores (s, t) cumpliendo:

$$(s \ t) T \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = 0 \iff s^2 + 4st + t^2 = 0$$

Queda:

$$s = \frac{-4t \pm \sqrt{16t^2 - 4t^2}}{2} = (-2 \pm \sqrt{3})t$$

Tomando $t = 1$, obtenemos dos direcciones asíntóticas:

$$(-2 - \sqrt{3}, 1) \text{ y } (-2 + \sqrt{3}, 1)$$

Finalmente las asíntotas son:

$$\begin{aligned} (-2 - \sqrt{3} \quad 1 \quad 0) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \iff -\sqrt{3}x + (-3 - 2\sqrt{3})y + (-3 - 3\sqrt{3}) = 0 \\ (-2 + \sqrt{3} \quad 1 \quad 0) A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \iff \sqrt{3}x + (-3 + 2\sqrt{3})y + (-3 + 3\sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

Para calcular la distancia entre los dos vértices tenemos en cuenta que si la hipérbola está en la forma reducida canónica:

$$\frac{x''^2}{a^2} - \frac{y''^2}{b^2} = 1$$

tal distancia es $2a$. Podemos obtener fácilmente esta expresión a partir de la ecuación reducida hallada previamente:

$$3x''^2 - y''^2 - 6 = 0 \iff 3x''^2 - y''^2 = 6 \iff \frac{x''^2}{2} - \frac{y''^2}{6} = 1.$$

de donde $a^2 = 2$ y la distancia pedida es $2a = 2\sqrt{2}$.

(iii) *Calcular las rectas tangentes a la cónica que pasan por el punto $(0, -2)$.*

El punto $P = (0, -2)$ NO pertenece a la cónica porque no cumple su ecuación $x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y = 0$:

$$0^2 + 4 \cdot 0 \cdot (-2) + (-2)^2 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot (-2) = -8 \neq 0.$$

Sabemos entonces que los puntos Q y R de tangencia de las dos tangentes por P a la cónica son la intersección de la recta polar de P con la misma.

La recta polar de P es:

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff -x + y - 6 = 0 \iff x - y + 6 = 0$$

La intersecamos con la cónica resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas:

$$\begin{aligned} x - y + 6 &= 0 \\ x^2 + 4xy + y^2 + 6x + 6y &= 0 \end{aligned}$$

De la primera ecuación $y = x + 6$ y sustituyendo en la segunda y simplificando queda la ecuación de segundo grado:

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

de donde $x = -2$ ó $x = -6$.

Resultan los puntos de corte $Q = (-2, 4)$ y $R = (-6, 0)$. Las tangentes pedidas son las que los unen con el punto P .

La recta PQ que une $P = (0, -2)$ con $Q = (-2, 4)$:

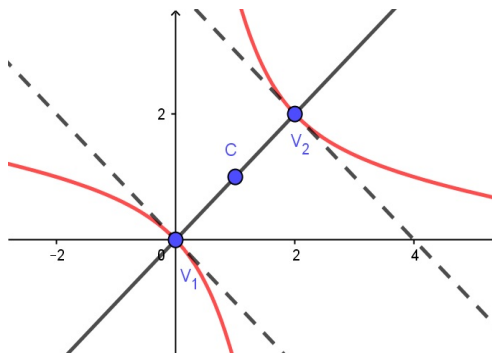
$$\frac{x - 0}{-2 - 0} = \frac{y + 2}{4 + 2} \iff 3x + y + 2 = 0.$$

La recta PR que une $P = (0, -2)$ con $R = (-6, 0)$:

$$\frac{x - 0}{-6 - 0} = \frac{y + 2}{0 + 2} \iff x + 3y + 6 = 0.$$

(1.5 puntos)

- 8.— Hallar la ecuación de una hipérbola sabiendo que su centro es $(1, 1)$, tiene un vértice en $(0, 0)$ y pasa por el punto $(4, 1)$.



Desarrollaremos la siguiente idea:

- 1) Dado que la cónica es simétrica respecto al centro podemos calcular el segundo vértice.
- 2) En los vértices las tangentes son perpendiculares al eje que es la recta que los une. Por tanto podemos usar el haz de cónicas conocidos dos puntos y sus tangente en ellos.

3) Impondremos por último que la cónica pasa por el punto $(4, 1)$.

1) Tenemos $C = (1, 1)$ y $V_1 = (0, 0)$. Si V_2 es el segundo vértice:

$$\frac{V_1 + V_2}{2} = C \Rightarrow V_2 = 2C - V_1 = (2, 2).$$

2) El haz conocidos dos puntos y dos tangentes está generado por el producto de las dos tangentes y la recta doble que une los puntos de tangencia.

Las tangentes en los vértices son perpendiculares al eje y por tanto su vector normal es el que une centro y vértices: $\vec{V_1C} = (1, 1)$. Son rectas de la forma $x + y + d = 0$.

- Si imponemos que pase por $V_1 = (0, 0)$ queda $0 + 0 + d = 0$, es decir, $d = 0$ y la recta es $x + y = 0$.

- Si imponemos que pase por $V_2 = (2, 2)$ queda $2 + 2 + d = 0$, es decir, $d = -4$ y la recta es $x + y - 4 = 0$.

La recta que une los puntos de tangencia, es decir, los vértices $V_1 = (0, 0)$ y $V_2 = (2, 2)$ es:

$$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 0}{2 - 0} \iff x - y = 0.$$

El correspondiente haz de cónicas queda:

$$(x + y)(x + y - 4) + \lambda(x - y)^2 = 0.$$

3) Ahora imponemos que pase por el punto $(4, 1)$:

$$(4 + 1)(4 + 1 - 4) + \lambda(4 - 1)^2 = 0 \iff \lambda = -5/9$$

Sustituyendo el valor de $\lambda = -5/9$ en el haz resulta:

$$(x + y)(x + y - 4) - \frac{5}{9}(x - y)^2 = 0 \iff 9(x + y)(x + y - 4) - 5(x - y)^2 = 0$$

y simplificando:

$$x^2 + y^2 + 7xy - 9x - 9y = 0.$$

(1.3 puntos)

9.— Dada la cuádrica de ecuación:

$$-x^2 - y^2 - z^2 + 2xy + 2xz - 2yz + 4x - 4y - 1 = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

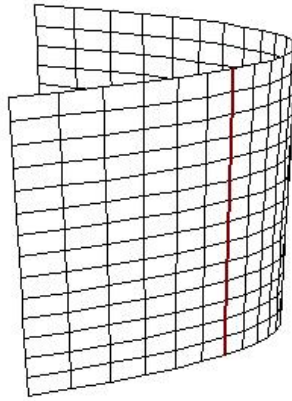
La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

$$A \xrightarrow{H_{21}(1)} \xrightarrow{H_{31}(1)} \xrightarrow{H_{41}(2)} \xrightarrow{\mu_{21}(1)} \xrightarrow{\mu_{31}(1)} \xrightarrow{\mu_{41}(2)} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

No se puede seguir diagonalizando sin violar las restricciones sobre el uso de la cuarta fila. En ese caso el tipo de cuádrica lo decide la signatura de la matriz T . Los signos son $(-, 0, 0)$; cambiando de signo equivale a $(+, 0, 0)$. Se trata por tanto de un cilindro parabólico.



(0.5 puntos)
