Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **8 de Julio de 2022**

1.– *En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).*

(i) *w es definida positiva.*

Un forma cuadrática en $\mathbb{R}^3$ es definida positiva si su matriz asociada en alguna base es diagonal con todos los términos en ella positivos: por ejemplo la identidad. Para conseguir una matriz asociada que no sea diagonal hacemos congruencia que sabemos que equivale a un cambio de base y por tanto conserva la propiedad de ser definida positiva.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) *w es semidefinida negativa.*

Una matriz diagonal semidefinida negativa tiene signos negativos en la diagonal y también ceros. Para conseguir que NO sea diagonal manteniendo la propiedad de ser semidefinida negativa, usamos la misma técnica que en el apartado anterior:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iii) *w es indefinida y no degenerada.*

En su forma diagonal para que sea indefinida tienen que aparecer signos positivos y negativos; para que sea no degenerada tiene que tener rango máximo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(iv) *w es indefinida y degenerada.*

Como antes para que sea indefinida tienen que aparecer signos positivos y negativos en la forma diagonal; para que sea degenerada tiene que tener rango menor que 3:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(1)\mu_{21}(1)}{\longrightarrow\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

2.– *En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada en la base canónica es:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) *Demostrar que es un producto escalar.*

Para que sea un producto escalar tiene que ser una forma bilineal, simétrica y definida positiva:

- La bilinealidad es un dato del enunciado.

- La simetría es consecuencia de que la matriz asociada es simétrica.

- Para ver que es definida positiva podemos usar el criterio de Sylvester: debemos de comprobar que los sucesivos determinantes de las k primeras filas y columnas son positivos para $k = 1, 2, 3$:

$$|\,1\,| = 1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 > 0, \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

(ii) *Respecto al producto escalar definido por f:*

(ii.a) *Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$.*

Calculamos primero una base del subespacio ortogonal al dado $V = \mathcal{L}\{(1, 0, 0)\}$:

$$V^{\perp} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | (x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0\}$$

donde

$$(x, y, z) \cdot (1, 0, 0) = 0 \iff \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff x + y + z = 0.$$

Pasamos de implícitas a paramétricas y luego a generadores:

$$z = -x - y$$

de donde las paramétricas son:

$$x = a, \quad y = b, \quad z = -a - b$$

y

$$V^{\perp} = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

Formamos una base con los genedaores de V y $V^{\perp}$:

$$B = \{\underbrace{(1, 0, 0)}_{V}, \underbrace{(1, 0, -1), (0, 1, -1)}_{V^{\perp}}\}$$

en esta base sabemos que la matriz de la proyección es:

$$P_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finalmente la pasamos a la canónica:

$$P_B = M_{CB} P_B M_{CB}^{-1}, \qquad \text{donde} \qquad M_{CB} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Operando obtenemos:

$$P_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii.b) *Hallar una base ortogonal del subespacio* $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0\}$.

Primero hallamos una base del subespacio. Lo hemos hecho en el apartado anterior ya que coincide con $V^\perp$:

$$U = \mathcal{L}\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}.$$

Ahora ortogonalizamos la base por el método de Gram-Schmidt.

El primer vector queda igual $v_1 = (1, 0, -1)$. Buscamos un segundo vector de la forma:

$$v_2 = (0, 1, -1) + a(1, 0, -1)$$

Escogemos a exigiendo que sea ortogonal al primero:

$$v_2 \cdot v_1 = 0 \iff (0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1) + a(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = 0 \iff a = \frac{-(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)}$$

Hacemos las cuentas:

$$(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

$$(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 4$$

Resulta:

$$a = \frac{-(0, 1, -1) \cdot (1, 0, -1)}{(1, 0, -1) \cdot (1, 0, -1)} = \frac{-4}{4} = -1, \qquad \Rightarrow v_2 = (0, 1, -1) - (1, 0, -1) = (-1, 1, 0).$$

La base pedida es:

$$\{(1, 0, -1), (-1, 1, 0)\}$$

(1.2 puntos)

3.– *Sea el espacio vectorial euclideo* $\mathbb{R}^3$ *con el producto escalar usual. Sea* T_C *la matriz asociada a una transformación ortogonal.*

(i) *Si* $traza(T_C) = 2$ *entonces se trata de un giro de* 60^o.

VERDADERO. Sabemos que si la transformación es un giro la traza es de la forma $traza = 1 + 2cos(\alpha)$ y si es un giro compuesto con simetría la traza es de la forma $traza = -1 + 2cos(\alpha)$.

Dado que $-1 \leq cos(\alpha) \leq 1$:

- En el caso del giro la traza varía entre los valores $-1 \leq traza \leq 3$.

- En el caso del giro compuesto con simetría la traza varía entre los valores $-3 \leq traza \leq 1$.

Por tanto si la traza es 2 NO puede ser un giro compuesto con simetría: es un giro. El ángulo α cumple:

$$\alpha = \pm arccos((traza - 1)/2) = \pm arccos(1/2) = \pm 60^o.$$

Escogiendo adecuadamente el sentido del semieje de giro siempre se puede conseguir que el giro sea de $+60^o$.

(ii) *Si* $traza(T_C) = 1$ *entonces se trata de un giro de* 90^o.

FALSO. Razonando como antes vemos que en este caso la traza si podría corresponder a un giro compuesto con simetría. Por ejemplo:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es una simetría respecto a un plano (NO un giro) y tiene traza $-1+1+1=1$.

(iii) *Si -1 es un autovalor de T_C, entonces la transformación no puede ser un giro.*

FALSO. Por ejemplo:

$$T_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(180^o) & -sin(180^o) \\ 0 & sin(180^o) & cos(180^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

es un giro de 180^o y el -1 es un autovalor doble.

(iv) T_C^{2022} *es la matriz asociada a un giro.*

VERDADERO. La composición de transformaciones ortogonales es una transformación ortogonal. Por tanto T_C^{2022} (que es la matriz de t compuesta consigo misma 2021 veces) corresponde a una transformación ortogonal.

Sabemos ques un giro si y sólo si su determinante es positivo. Pero:

$$|T_C^{2022}| = |T_C|^{2022} > 0 \text{ por ser exponente par.}$$

(1.2 puntos)

4.– *En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.*

$$U = \{(x,y,z) \in R^3 | 3x + y - 4z = 0, y = 0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

¿Es única la solución?.

Ambos subespacios vectoriales corresponden a rectas. El giro ha de llevar la una en la otra. Necesitamos conocer el ángulo de giro y el seimieje.

El ángulo de giro será el ángulo que forman las dos rectas. Un vector director de la primera es $u = (4,0,3)$ y de la segunda $v = (0,1,0)$. El ángulo que forman cumple:

$$cos(\alpha) = \frac{u \cdot v}{\|u\|\|v\|} = \frac{(4,0,3)\cdot(0,1,0)}{\|(4,0,3)\|\|(0,1,0)\|} = 0$$

por tanto son perpendiculares y el ángulo será de 90 grados.

El eje de giro estará en una recta perpendicular al plano que contiene a ambas; para hallar su vector director podemos utilizar el producto vectorial de los vectores directores de las rectas dadas:

$$(4,0,3) \times (0,1,0) = (-3,0,4).$$

Queda decidir si tomamos como semieje de giro el generado por $(-3,0,4)$ ó $(3,0,-4)$. Como queremos el que el vector u vaya hacia el v, si tomamos como semieje el generado por $(-3,0,4)$ la base:

$$\{(-3,0,4), u, v\}$$

ha de tener orientación positiva. Pero:

$$det \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0 \Rightarrow \text{ orientación positiva}$$

Sólo resta construir el giro. Escogemos una base ortonormal teniendo como primer vector el semieje de giro. Pero ya tenemos una ortogonal:

$$\{(-3,0,4), (4,0,3), (0,1,0)\}$$

La normalizamos (dividiendo cada vector por su norma) y obtenemos:

$$B = \{(-3/5, 0, 4/5), (4/5, 0, 3/5), (0, 1, 0)\}$$

En la base B la matriz de giro es:

$$T_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(90) & -sin(90) \\ 0 & sin(90) & cos(90) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

La cambiamos de base teniendo en cuenta que la matriz de paso M_{BC} es ortogonal ($M_{BC}^{-1} = M_{BC}^t$) por ser matriz de cambio entre dos bases ortonormales:

$$T_C = M_{CB}T_BM_{BC} = M_{CB}T_BM_{CB}^{-1} = M_{CB}T_BM_{CB}^t,$$

siendo

$$M_{CB} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Operando queda:

$$T_C = \begin{pmatrix} 9/25 & -4/5 & -12/25 \\ 4/5 & 0 & 3/5 \\ -12/25 & -3/5 & 16/25 \end{pmatrix}$$

y las ecuaciones de cambio:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = T_C \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9x/25 - 4y/5 - 12z/25 \\ 4x/5 + 3z/5 \\ -12x/25 - 3y/5 + 16z/25 \end{pmatrix}.$$

La solución no es única. Dado que las rectas dadas son perpendiculares un giro de -90^o también llevaría una en la otra.

(1.3 puntos)

5.– *En* $\mathbb{R}^3$ *hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto* $P(1, 0, 0)$ *y corta a las rectas:*

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \end{cases}$$

Usaremos la siguiente idea:

1) Si la recta pasa por P y corta a r entonces está en el plano π que contiene al punto P y a la recta r.

2) Si la recta buscada está en el plano π y corta a s, pasa por la intersección Q de ambos. La recta pedida sera la recta PQ.

Entonces comenzamos calculando el plano que pasa por $P(1, 0, 0)$ y contiene a r. A partir de su ecuación continua sabemos que r pasa por el punto $R = (2, 1, 0)$ y tiene vector director $u = (1, -1, 2)$. Por tanto es la ecuación de un plano conocidos dos puntos y un vector:

$$det \begin{pmatrix} x-1 & y-0 & z-0 \\ 2-1 & 1-0 & 0 \\ 1-0 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0 \iff x - y - z - 1 = 0.$$

Intersecamos este plano con la recta s resolviendo el sistema que forman sus ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0 \\ 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y - z - 1 \end{cases}$$

Obtenemos el punto $Q = (2, -2, 3)$.

Finalmente hallamos la recta PQ:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{3}.$$

¿Podría escogerse otro punto P de forma que no exista una recta en las condiciones pedidas?.

Puede escogere un punto P de manera que no exista una recta que pasa por P y corta a r y s, si escogemos P en el plano paralelo w a s y conteniendo a r. En ese caso cualquier recta que corte a r y pase por P está contenida en el plano w; pero si éste es paralelo a s es imposible que una recta contenida en él corte a s.

Lo análogo ocurriría si escogemos P en el plano que contiene a s y es paralelo a P.

(1 punto)

6.– *En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ hallar las ecuaciones de una homotecia de razón 2 que lleva la recta $y = 0$ en la recta $y - 1 = 0$ y la recta $x + y - 1 = 0$ en la recta $x + y + 1 = 0$. Calcular además el área del cuadrilátero determinado por las cuatro rectas.*

Si la homotecia lleva las rectas $y = 0$ y $x + y - 1 = 0$ respectivamente en las rectas $y - 1 = 0$ y $x + y + 1 = 0$, el punto P intersección de las dos primeras debe de ir en el punto Q intersección de las dos últimas.

Intersecamos las primeras:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad P = (1, 0).$$

y las segundas:

$$\begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad Q = (-2, 1).$$

Ahora si $C = (a, b)$ es el centro de la homotecia y ésta tiene razón 2, las ecuaciones de la misma son:

$$f(x, y) = (a, b) + 2((x, y) - (a, b))$$

Como llega el punto $P(1, 0)$ en el $Q(-2, 1)$ tiene que cumplirse:

$$(-2, 1) = (a, b) + 2((1, 0) - (a, b)) \Rightarrow (a, b) = (2, -1) + (2, 0) = (4, -1).$$

La homotecia queda:

$$f(x, y) = (4, -1) + 2((x, y) - (4, -1)) \iff f(x, y) = (2x - 4, 2y + 1).$$

Sabemos que en el plano el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos vienen dados por dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es el valor absoluto del determinante que forma sus coordenadas.

Entonces en nuestro caso si llamamos:

$$P = \{y = 0\} \cap \{x + y - 1 = 0\}$$
$$R = \{y = 0\} \cap \{x + y + 1 = 0\}$$
$$S = \{y = 1\} \cap \{x + y - 1 = 0\}$$

los dos vectores que forman los lados son $\overrightarrow{PR}$ y $\overrightarrow{PS}$. Si resolvemos los sistemas obtenemos $R = (-1, 0)$ y $S = (0, 1)$. Entonces:

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (-2, 0), \qquad \overrightarrow{PS} = S - P = (-1, 1)$$

y

$$\text{área} = \left\| \begin{matrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{matrix} \right\| = 2.$$

(1 punto)

7.– *En el plano afín dada la familia de cónicas:*

$$x^2 + 2kxy + 2y - 1 = 0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

(i) *Clasificar la cónica en función del paámetro k.*

Calculamos la matriz asociada y la de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ k & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Clasificamos la cónica en función del signo del determinante de uno y otro:

$$|A| = -1 + k^2, \qquad |T| = -k^2.$$

Para distinguir los casos, analizamos los valores donde se puede producir un cambio de signo que se da cuando los determinantes son nulos:

$$|A| = 0 \iff -1 + k^2 = 0 \iff k = \pm 1 \qquad |T| = 0 \iff k = 0.$$

Resumimos las conclusiones en la siguiente tabla:

	$\lvert T\rvert$	$\lvert A\rvert$	Tipo de cónica
$k < -1$	< 0	> 0	Hipérbola
$k = -1$	< 0	$= 0$	Rectas secantes
$-1 < k < 0$	< 0	< 0	Hipérbola
$k = 0$	0	< 0	Parábola
$0 < k < 1$	< 0	< 0	Hipérbola
$k = 1$	< 0	$= 0$	Rectas secantes
$k > 1$	< 0	> 0	Hipérbola

(ii) *Para $k = 1$ hallar las dos rectas en que se descompone la cónica.*

Vimos que para $k = 1$ se trata de dos rectas secantes. El centro (a, b) de la cónica coincide con el punto de corte de ambas rectas. Hallémoslo:

$$A \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix}$$

donde h puede ser cualquier número real. Nos quedan las ecuaciones:

$$a + b = 0, \qquad a + 1 = 0.$$

Resolviendo $(a, b) = (-1, 1)$.

Ahora tomamos una recta cualquiera para cortarla con la cónica y obtener otros dos puntos, uno en cada recta. Por ejemplo la recta $y = 0$:

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + 2y - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Obtenemos los puntos $(1, 0)$ y $(-1, 0)$. Las rectas que buscamos son las que lo unen con el centro:

- La recta por $(1, 0)$ y $(-1, 1)$:

$$\frac{x - 1}{1 - (-1)} = \frac{y - 0}{0 - 1} \iff x + 2y - 1 = 0.$$

- La recta por $(-1,0)$ y $(-1,1)$:

$$\frac{x+1}{-1-(-1)} = \frac{y-0}{0-1} \iff x+1=0.$$

(iii) *Para $k=0$ hallar los vértices de la cónica.*

Para $k=0$ el vértice es la intersección del eje con la cónica. El eje es la recta polar del autovector asociado al autovalor no nulo de T. La matriz T para $k=0$ es:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ya es diagonal así que sus autovalores son 1 y 0 y los autovectores respectivamente $(1,0)$ y $(0,1)$ (los vectores de la base canónica). El eje es la recta polar del vector $(1,0)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x=0.$$

Lo intersecamos con la cónica:

$$\begin{cases} x^2+2y-1=0 \\ x=0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad y=1/2.$$

El vértice resulta $V=(0,1/2)$.

(iv) *Para $k=\sqrt{2}$ hallar la ecuación reducida.*

Para $k=\sqrt{2}$ vimos que es una hiérbola. La ecuación reducida es de la forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + d = 0$$

con λ_1, λ_2 autovalores de T y $d = det(A)/det(T)$.

Calculamos los autovalores de T como raíces de su polinomio característico:

$$|T-\lambda Id| = 0 \iff T = \begin{pmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\lambda \end{pmatrix} \iff \lambda^2-\lambda-2=0$$

Resolviendo obtenemos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = -1$. Además $d = det(A)/det(T) = 1/(-2) = -1/2$. Queda:

$$2x'^2 - y'^2 - \frac{1}{2} = 0.$$

(1.5 puntos)

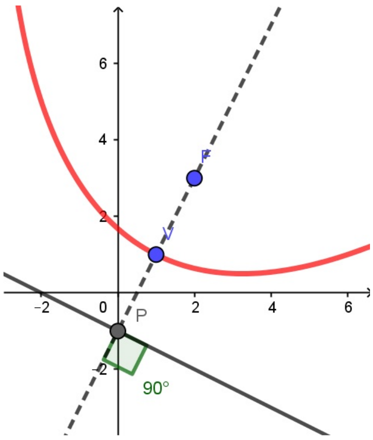
8.– *Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que su vértice es el punto $(1,1)$ y su foco es el punto $(2,3)$.*

Desarrollaremos la siguiente idea:

1) La recta que une el vértice V y el foco F es el eje de la parábola.

2) La directriz es una recta perpendicular al eje y que pasa por un punto P tal que V es el punto medio de V y F.

3) La parábola es el lugar geométrico de puntos que equidista de foco y directriz.



Entonces:

1) Calculamos la recta que pasa por $V = (1, 1)$ y $F = (2, 3)$:

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-1}{3-1} \quad \iff \quad 2x - y - 1 = 0.$$

2) Calculamos el punto P tal que $V = \dfrac{F+P}{2}$, es decir:

$$P = 2V - F = (2, 2) - (2, 3) = (0, -1).$$

Y ahora la recta perpendicular al eje $2x - y - 1 = 0$ y que pasa por $P(0, -1)$. Su vector director es el vector normal del eje $(2, -1)$:

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y+1}{-1} \quad \iff \quad x + 2y + 2 = 0.$$

3) La parábola es el lugar de puntos cuya distancia a la directriz $x + 2y + 2 = 0$ es la misma que la distancia al foco $(2, 3)$. Igualamos ambas:

$$\frac{|x + 2y + 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}$$

Elevando al cuadrado y quitando denominadores:

$$x^2 + 4y^2 + 4 + 4xy + 4x + 8y = 5x^2 - 20x + 20 + 5y^2 - 30y + 45$$

y simplificando:

$$4x^2 + y^2 - 4xy - 24x - 38y + 61 = 0.$$

(1.3 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$2xy + 4xz + 2yz + 4x = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

La matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la cuarta fila no puede ser ni sumada a las demás, ni cambiada de posición, ni multiplicada por un número.

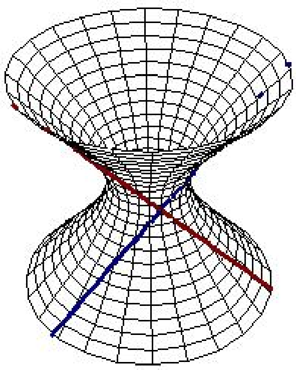
$$A \xrightarrow{H_{12}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mu_{12}(1)} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{21}(-1/2)} \xrightarrow{H_{31}(-3/2)} \xrightarrow{H_{41}(-1)} \xrightarrow{\mu_{21}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{31}(-3/2)} \xrightarrow{\mu_{41}(-1)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1/2 & -9/2 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{32}(-1)} \xrightarrow{H_{42}(-2)} \xrightarrow{\mu_{32}(-1)} \xrightarrow{\mu_{42}(-2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{43}(-1/2)} \xrightarrow{\mu_{43}(-1/2)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Los signos obtenidos en la diagonal son $(+,-,-;+)$; equivalentemente $(-,+,+;-) \sim (+,+,-;-)$. Se trata por tanto de un hiperboloide de una hoja.



(0.5 puntos)