Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **8 de Julio de 2022**

1.– En cada uno de los siguientes apartados dar una matriz no diagonal asociada a una forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ que cumpla además la condición indicada (justificar las respuestas).

(i) w es definida positiva.

(ii) w es semidefinida negativa.

(iii) w es indefinida y no degenerada.

(iv) w es indefinida y degenerada.

(1 punto)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera una forma bilineal f cuya matriz asociada en la base canónica es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que es un producto escalar.

(ii) Respecto al producto escalar definido por f:

(ii.a) Hallar la matriz asociada respecto de la base canónica de la proyección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.

(ii.b) Hallar una base ortogonal del subespacio $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

(1.2 puntos)

3.– Sea el espacio vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ con el producto escalar usual. Sea T_C la matriz asociada a una transformación ortogonal.

(i) Si $traza(T_C) = 2$ entonces se trata de un giro de 60^o.

(ii) Si $traza(T_C) = 1$ entonces se trata de un giro de 90^o.

(iii) Si -1 es un autovalor de T_C, entonces la transformación no puede ser un giro.

(iv) T_C^{2022} es la matriz asociada a un giro.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^3$ con respecto al producto escalar usual y tomando como orientación positiva la dada por la base canónica hallar las ecuaciones de un giro que lleve el subespacio vectorial U en V.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x+y-4z=0, y=0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

¿Es única la solución?.

(1.3 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1,0,0)$ y corta a las rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

¿Podría escogerse otro punto P de forma que no exista una recta en las condiciones pedidas?.

(1 punto)

6.– En plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ hallar las ecuaciones de una homotecia de razón 2 que lleva la recta $y=0$ en la recta $y-1=0$ y la recta $x+y-1=0$ en la recta $x+y+1=0$. Calcular además el área del cuadrilátero determinado por las cuatro rectas.

(1 punto)

7.– En el plano afín dada la familia de cónicas:

$$x^2+2kxy+2y-1=0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

(i) Clasificar la cónica en función del paámetro k.

(ii) Para $k=1$ hallar las dos rectas en que se descompone la cónica.

(iii) Para $k=0$ hallar los vértices de la cónica.

(iv) Para $k=\sqrt{2}$ hallar la ecuación reducida. (1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una parábola sabiendo que su vértice es el punto $(1,1)$ y su foco es el punto $(2,3)$.

(1.3 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$2xy+4xz+2yz+4x=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.5 puntos)

Álxebra Lineal II **Exame Final**

Exercicio único (3 horas.) **8 de xullo 2022**

1.– En cada uno dos seguintes apartados dar unha matriz non diagonal asociada a unha forma cuadrática w de $\mathbb{R}^3$ que cumpla ademais a condición indicada (xustificar as respostas).

(i) w é definida positiva.

(ii) w é semidefinida negativa.

(iii) w é indefinida e non dexenerada.

(iv) w é indefinida e dexenerada.

(1 punto)

2.– En $\mathbb{R}^3$ se considera unha forma bilineal f de matriz asociada na base canónica:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

(i) Demostrar que é un producto escalar.

(ii) Respecto ó producto escalar definido por f:

(ii.a) Atopar a matriz asociada respecto da base canónica da proxección ortogonal sobre $\mathcal{L}\{(1,0,0)\}$.

(ii.b) Atopar unha base ortogonal do subespazo $U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x+y+z=0\}$.

(1.2 puntos)

3.– Sexa o espazo vectorial euclideo $\mathbb{R}^3$ co producto escalar usual. Sexa T_C a matriz asociada a unha transformación ortogonal.

(i) Se $traza(T_C) = 2$ entón se trata dun xiro de 60^o.

(ii) Se $traza(T_C) = 1$ entón se trata dun xiro de 90^o.

(iii) Se -1 é un autovalor de T_C, entón a transformación non pode ser un xiro.

(iv) T_C^{2022} é a matriz asociada a un xiro.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^3$ con respecto ó producto escalar usual e tomando como orientación positiva a dada pola base canónica atopar as ecuacións dun xiro que leve o subespazo vectorial U en V.

$$U = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 3x+y-4z=0, y=0\}, \qquad V = \mathcal{L}\{(0,1,0)\}.$$

É única a solución?.

(1.3 puntos)

5.– En $\mathbb{R}^3$ atopar a ecuación da recta que pasa polo punto $P(1,0,0)$ e corta ás rectas:

$$r \equiv \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y+z-1=0 \\ 2x-y-z-3=0 \end{cases}$$

Podería escollerse outro punto P de forma que non exista unha recta nas condicións pedidas?.

(1 punto)

6.– No plano afín euclídeo $\mathbb{R}^2$ atopar as ecuacións dunha homotecia de razón 2 que leva a recta $y=0$ na recta $y-1=0$ e a recta $x+y-1=0$ na recta $x+y+1=0$. Calcular ademais o área do cuadrilátero determinado polas catro rectas.

(1 punto)

7.– No plano afín, dada a familia de cónicas:

$$x^2+2kxy+2y-1=0, \qquad k \in \mathbb{R}$$

(i) Clasificar a cónica en función do paámetro k.

(ii) Para $k=1$ atopar as dúas rectas nas que se descompón a cónica.

(iii) Para $k=0$ atopar os vértices da cónica.

(iv) Para $k=\sqrt{2}$ atopar a ecuación reducida. (1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha parábola sabendo que o seu vértice é o punto $(1,1)$ e o seu foco é o punto $(2,3)$.

(1.3 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$2xy+4xz+2yz+4x=0$$

clasificar a superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.5 puntos)
