Álgebra Lineal II — Soluciones al Examen Final

Ejercicio único (3 horas) **7 de junio de 2021**

1.– *Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como,*

$$f((x,y),(x',y')) = xx' + axy' + bx'y + 9yy'$$

(i) *Calcular a y b para que f sea una forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Para alguno de esos valores, calcular las ecucaciones paramétricas del núcleo de f.*

En primer lugar para que f sea simétrica su matriz asociada respecto a cualquier base tiene que ser simétrica. La matriz asociada respecto de la base canónica es:

$$F_C = \begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 9 \end{pmatrix}.$$

Igualando $F_C = F_C^t$ para garantizar la simetría, obtenemos $a = b$. Para imponer que sea semidefinida positiva hallamos la signatura de la forma bilineal diagonalizando por congruencia su matriz asociada:

$$F_C \overset{H_{21}(-a)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-a)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9-a^2 \end{pmatrix}$$

Para que sea semidefinida positiva la signatura tiene que ser $(1,0)$ (un signo positivo y otro nulo en la diagonal). Por tanto:

$$9 - a^2 = 0 \iff a^2 = 9 \iff a = \pm 3.$$

Conclusión: la forma bilineal f es simétrica semidefinida positiva si y sólo si $a = b = 3$ ó $a = b = -3$.

Calculamos el núcleo para $a = 3$. Está formado por los vectores (x,y) cumpliendo:

$$F_C \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x + 3y = 0 \\ 3x + 9y = 0 \end{cases} \iff x + 3y = 0 \iff \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = \lambda \end{cases}$$

(ii) *Para $a = b = 5$, si w es la forma cuadrática asociada a f:*

(ii.a) *Clasificar la forma cuadrática.*

En el apartado (i) ya la habíamos diagonalizado por congruencia. Para $a = 5$ queda:

$$F_C \overset{H_{21}(-5)}{\longrightarrow} \overset{\mu_{21}(-5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9-5^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -16 \end{pmatrix} = F_B$$

Su signatura es $(1,1)$ y el rango 2. Es no degenerada e indefinida.

(ii.b) *Hallar los vectores autoconjugados. Si es posible, expresarlos como unión de dos rectas, dando en la base caónica un generador de cada una de ellas.*

Por ser indefinida de rango 2 sabemos que los autoconjugados pueden descomponerse como unión de dos rectas. Usando la matriz diagonalizada la forma cuadrática es:

$$w(x',y') = (\,x' \quad y'\,)\, F_B \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = x'^2 - 16y'^2 = (x' - 4y')(x' + 4y')$$

Los autoconjugados son:

$$\begin{aligned} autconj(w) &= \{(x',y')_B | w(x',y') = 0\} = \{(x',y')_B | (x'-4y')(x'+4y') = 0\} = \\ &= \{(x',y')_B | x' - 4y' = 0\} \cup \{(x',y')_B | x' + 4y' = 0\} = \mathcal{L}\{(4,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(4,-1)_B\} \end{aligned}$$

Para pasarlo a la base canónica hallamos la matriz M_{CB} haciendo sobre la identidad las mismas operaciones columna que hicimos en el proceso de diagonalización:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-5)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

Ahora cambiamos de base:

$$M_{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}_C, \quad M_{CB} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 9 \\ -1 \end{pmatrix}_C$$

Por tanto:

$$autconj(w) = \mathcal{L}\{(-1,1)_B\} \cup \mathcal{L}\{(9,-1)_B\}$$

(ii.c) *Hallar $w(1,2)$.*

Simplemente:

$$w(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} F_C \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 57.$$

(1.2 puntos)

2.– *Considerando en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:*

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) *Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.*

La matriz G_C es por definición la que en la fila i columna j tiene la imagen del vector i con el vector j de la base caónica. Dado que $(G_C)_{1,3} = 0$ se tiene que:

$$\underbrace{(1,0,0)}_{e_1} \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{e_3} = 0.$$

y por tanto $(1,0,0)$ y $(0,0,1)$ son ortogonales.

(ii) *Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^{\perp}$.*

En primer lugar entre los generadores de U eliminamos los vectores dependientes escalonando la matriz que forman sus coordenadas:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{H_{12}(-1)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vemos que $U = \mathcal{L}\{(1,1,0),(0,0,1)\}$. Ahora calculamos $U^{\perp}$:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | (1,1,0)\cdot(x,y,z) = 0, \quad (0,0,1)\cdot(x,y,z) = 0\}$$

donde:

$$(1,1,0)\cdot(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + 3y + z$$

$$(0,0,1)\cdot(x,y,z) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = y + 3z$$

y:

$$U^{\perp} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y + z = 0, \quad y + 2z = 0\}$$

Resolvemos el sistema:

$$y = -2z, \qquad x = \frac{1}{2}(-3y - z) = \frac{1}{2}(6z - z) = \frac{5}{2}z$$

de donde:

$$U^{\perp} = \mathcal{L}\{(5/2, -2, 1)\} = \mathcal{L}\{(5, -4, 2)\}.$$

(iii) *Hallar una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$.

Una base ortonormal B se caracteriza porque la matriz de Gram respecto a la misma es la identidad. Entonces diagonalizamos por congruencia la matriz G_C hasta llegar a Id y hallamos la correspondiente matriz de paso por columnas que será M_{CB}:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{21}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \overset{H_{32}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ahora hacemos sobre la identidad las mismas operaciones columa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{21}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{\mu_{32}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = M_{CB}$$

La base ortonormal resulta $B = \{(1,0,0), (-1,1,0), (1,-1,1)\}$.

(iv) *Calcular el ángulo que forman los vectores* $(1,0,0)$ *y* $(0,1,0)$.

Se tiene que:

$$ang((1,0,0),(0,1,0)) = arcos\frac{(1,0,0)\cdot(0,1,0)}{\|(1,0,0)\|\|(0,1,0\|},$$

donde:

$$(1,0,0)\cdot(0,1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$\|(1,0,0)\| = \sqrt{(1,0,0)\cdot(1,0,0)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} = 1$$

$$\|(0,1,0)\| = \sqrt{(0,1,0)\cdot(0,1,0)} = \sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \sqrt{2}$$

Finalmente:

$$ang((1,0,0),(0,1,0)) = arcos\frac{(1,0,0)\cdot(0,1,0)}{\|(1,0,0)\|\|(0,1,0\|} = arcos\frac{1}{\sqrt{2}} = arcos\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^o,$$

(1.2 puntos)

3.– *Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:*

(i) *Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 2$ entonces t es un giro de 60^o.*

VERDADERO. Sabemos que una transformación ortogonal en el espacio es un giro o un giro compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular al eje de giro. Además en cada uno de los casos, las trazas de la matriz asociada en cualquier base son:

- Si es un giro, $traza = 1 + 2cos(\alpha)$.

- Si es un giro compuesto con simetría, $traza = -1 + 2cos(\alpha)$.

Dado que $-1 \leq cos(\alpha) \leq 1$, en el primer caso $-1 \leq traza \leq 3$ y en el segundo $-3 \leq traza \leq 1$. Concluimos que si la traza es 2 es imposible que sea un giro compuesto con simetría y necesariamente es un giro. Además:

$$\alpha = \pm arcos\frac{traza - 1}{2} = \pm arcos\frac{2-1}{2} = \pm arcos\frac{1}{2} = \pm 60^o.$$

Eligiendo un semieje orientado adecuadamente siempre se puede conseguir que el ángulo sea positivo, es decir, en este caso de 60^o.

(ii) *Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 0$ entonces t es un giro de 120^o.*

FALSO. Razonando como en el apartado anterior vemos que $traza = 0$ está dentro del rango posible de la traza de un giro compuesto con simetría. En particular si:

$$-1 + 2cos(\alpha) = 0 \Rightarrow cos(\alpha) = 1/2 \Rightarrow \alpha = 60^o$$

Considerando un giro de 60^o respecto al semieje $(1, 0, 0)$ compuesto con una simetría respecto al plano perpendicular a ese eje, sabemos que su matriz asociada es:

$$T_C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(60^o) & -sin(60^o) \\ 0 & sin(60^o) & cos(60^o) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

Cumple las condiciones que se indican ($traza = 0$) pero NO es un giro de 120^o.

(iii) *En $\mathbb{R}^3$ la composición de una simetría respecto a una recta con una simetría respecto a un plano es un giro.*

FALSO. Una simetría respecto a una recta corresponde a un giro de 180^o. Es una transformación directa, es decir, el determinante de su matriz asociada es 1. Por el contrario una simetría respecto a un plano es inversa, es decir con determinante -1. La composición es una transformación cuya matriz asociada es el producto de las otras dos. Su determinante es por tanto $1 \cdot (-1) = -1$: es inversa. Pero un giro no es una transformación inversa.

(iv) *Si t es una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ y $t(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$ entonces se trata de una transformación inversa.*

FALSO. Por ejemplo si consideramos un giro de 180^o respecto a un eje perpendicular al vector $(1, 0, 1)$, la imagen de éste es su opuesto pero NO es una transformación inversa.

(1.2 puntos)

4.– *En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar razonadamente las matrices asociadas respecto a la base canónica de todas las posibles transformaciones ortogonales inversas que lleven la recta $x + y = 0$ en la recta $x - y = 0$.*

Método I: Una transformación inversa en un plano es una simetría respecto a una recta. El eje de simetía permanece fijo en la transformación y por tanto debe de ser equidistante de las dos rectas, la original y su imagen, ya que una transformación ortogonal conserva distancias.

En otras palabras el eje de simetría debe de ser alguna de las dos rectas (las bisectrices) que equidistan de $x+y=0$ y $x-y=0$. Las calculamos usando la fórmula de la distancia de un punto a una recta:

$$d((x,y),x-y=0)=d((x,y),x+y=0) \iff \frac{|x-y|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{|x+y}{\sqrt{1^2+1^2}} \iff |x-y|=|x+y|$$

Quitamos el valor absoluto considerando las dos posibilidades para el signo:

$$x-y=x+y \iff y=0 \qquad \text{ó} \qquad x-y=-(x-y) \iff x=0.$$

Los dos posibles ejes de simetría son $y=0$ (eje OX) y $x=0$ (eje OY):

- Simetría repecto al eje OX:

El vector director del eje es $(1,0)$, la base canónica es ortogonal con el primer vector correspondiente al eje de simetría luego directamente:

$$T_C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- Simetría repecto al eje OY:

El vector director del eje es $(0,1)$, la base $B=\{(0,1),(1,0)$ es ortogonal con el primer vector correspondiente al eje de simetría. Por tanto:

$$T_B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Cambiamos de base a la canónica:

$$T_C=M_{CB}T_BM_{CB}^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Método II: La matriz asociada a una transformación ortogonal inversa cumple $T_CT_C^t=Id$ y $det(T_C)=-1$. Además para llevar $x+y=0$ en $x-y=0$ debe de llevar el vector director de la primera $(1,-1)$ en el de la segunda con el mismo módulo y dos posibles signos: $(1,1)$ ó $(-1,-1)$.

Sea $T_C=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$:

$$T_CT_C^t=Id \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a^2+b^2=1 \\ ac+bd=0 \\ c^2+d^2=1 \end{cases}$$

Distinguimos las dos posibilidades:

1) Si $t(1,-1)=(1,1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=1 \end{cases}$$

de donde $b=a-1$ y $d=c-1$. Sustituyendo en $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$:

$$\begin{aligned} a^2+(a-1)^2=1 &\iff 2a^2-2a=0 \iff a(a-1)=0 \\ c^2+(c-1)^2=1 &\iff 2c^2-2c=0 \iff c(c-1)=0 \\ ac+(a-1)(c-1)=0 &\iff ac=-(a-1)(c-1) \end{aligned}$$

Deducimos que:

- O bien $a=0$, $c=1$. En este caso $b=-1$ y $d=0$ y $det(T_C)=1$. No puede ser.

- O bien $a=1$, $c=0$. En esete caso $b=0$ y $d=-1$ y $det(T_C)=-1$. Es una posible solución: $T_C=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

2) Si $t(1,-1)=(-1,-1)$:

$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1\end{pmatrix} \iff \begin{cases} a-b=-1\\ c-d=-1\end{cases}$$

de donde $b=a+1$ y $d=c+1$. Sustituyendo en $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$, $ac+bd=0$:

$$\begin{array}{l} a^2+(1+a)^2=1 \iff 2a^2+2a=0 \iff a(a+1)=0\\ c^2+(1+c)^2=1 \iff 2c^2+2c=0 \iff c(c+1)=0\\ ac+(1+a)(1+c)=0 \iff ac=-(1+a)(1+c)\end{array}$$

Deducimos que:

- O bien $a=0$, $c=-1$. En este caso $b=1$ y $d=0$ y $det(T_C)=1$. No puede ser.

- O bien $a=-1$, $c=0$. En esete caso $b=0$ y $d=1$ y $det(T_C)=-1$. Es otra posible solución: $T_C=\begin{pmatrix} -1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

(1.2 puntos)

5.– *En el espacio afín euclideo dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de una recta que pase por el punto $P=(0,0,1)$ y corte a las rectas:*

$$r\equiv\begin{cases} x=1\\ y-z=2\end{cases} \qquad s\equiv\begin{cases} x=2\\ y+z=1\end{cases}$$

Calcular la distancia entre r y s.

Para calcular la recta pasando por P y cortando a r y s seguiremos los siguiente pasos:

1) Calculamos el plano π por P y conteniendo a r. Cualquier recta de ese plano corta a r.

2) Calculamos $Q=\pi\cap s$.

3) La recta PQ está en el plano π y por tanto corta a r. Además pasa por P y corta a s en Q, luego es la recta pedida.

Hacemos las cuentas.

1) Para hallar el plano π por P y conteniendo a r usamos el haz de planos generado por las dos ecuaciones que definen r:

$$\lambda(x-1)+(y-z-2)=0.$$

Imponemos que pase por $P=(0,0,1)$:

$$\lambda(0-1)+(0-1-2)=0 \iff \lambda=-3.$$

El plano π queda:

$$-3(x-1)+(y-z-2)=0 \iff -3x+3+y-z-2=0 \iff 3x-y+z-1=0.$$

2) Calculamos $Q=\pi\cap S$ resolviendo el sistema que forman las ecuaciones de recta y plano:

$$\begin{cases} x=2\\ y+z=1\\ 3x-y+z=1\end{cases}$$

Sumando las dos últimas ecuaciones:

$$3x + 2z = 2$$

De la primera $x = 2$ y así, $6 + 2z = 2$, es decir, $z = -2$. Y de la segunda ecuación $y = 1 - z = 3$. Es decir $Q = (2, 3, -2)$.

3) Hallamos la recta que une $P = (0, 0, 1)$ y $Q = (2, 3, -2)$:

$$\frac{x - 0}{2 - 0} = \frac{y - 0}{3 - 0} = \frac{z - 1}{-2 - 1}$$

Quitando denominadores y simplificando:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

Para hallar la distancia entre las rectas usamos la fórmula:

$$d(r, s) = \frac{|[RS, u_r, u_s,]|}{\|u_r \times u_s\|}$$

siendo R, u_r y S, u_s punto y vector director respectivamente de las rectas r y s. Resolviendo paramétricamente las ecuaciones de cada una de ellas obtenemos estos datos:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \iff (x, y, z) = \underbrace{(1, 2, 0)}_{R} + \lambda \underbrace{(0, 1, 1)}_{u_r}$$

$$s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 1 \end{cases} \iff (x, y, z) = \underbrace{(2, 1, 0)}_{S} + \lambda \underbrace{(0, 1, -1)}_{u_s}$$

Hacemos los cálculos:

$$u_r \times u_s = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2e_1 = (-2, 0, 0).$$

y

$$[RS, u_r, u_s] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

Finalmente:

$$d(r, s) = \frac{|[RS, u_r, u_s,]|}{\|u_r \times u_s\|} = \frac{|-2|}{\|(-2, 0, 0)\|} = 1.$$

(1.2 puntos)

6.– *En el espacio afín euclideo* $\mathbb{R}^3$ *dar las ecuaciones de una homotecia de centro* $(1, 0, 1)$ *y que lleve el plano* $x = 2$ *en el plano* $x = 4$.

La ecuación de una homotecia en el espacio con centro $(1, 0, 1)$ es de la forma:

$$f(x, y, z) = (1, 0, 1) + k((x, y, z) - (1, 0, 1)) \qquad (*)$$

donde k es la razón. Si lleva el plano $x = 2$ en el plano $x = 4$, la imagen de un punto de la forma $(2, y, z)$ debe de ser $(4, y', z')$. Sustituyendo en (*):

$$(4, y', z') = f(2, y, z) = (1, 0, 1) + k((2, y, z) - (1, 0, 1)) = (1 + k, 2ky, 1 + k(z - 1))$$

Igualando la primera coordenada:

$$4 = 1 + k \Rightarrow k = 3.$$

La ecuación de la homotecia queda:

$$f(x, y, z) = (1, 0, 1) + 3((x, y, z) - (1, 0, 1)) \qquad f(x, y, z) = (3x - 2, 3y, 3z - 2).$$

(0.7 puntos)

7.– *En el plano afín dada la cónica de ecuación:*

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 1 = 0$$

(i) *Clasificar la cónica.*

Para clasificar la cónica utilizamos el determinante de la matriz asoicada y la de términos cuadráticos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces $|A| = -4$ y $|T| = 0$. Se trata por tanto de un parábola.

(ii) *Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.*

Por ser una parábola no tiene centro ni asíntotas.

El eje es la recta polar del autovector de T asociado al autovalor no nulo.

Calculamos los autovectores de T:

$$|T - \lambda Id| = 0 \iff (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda = 0.$$

Resolviendo obtenemos $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 0$.

Hallamos el autovector asociado a $\lambda_1 = 2$:

$$(T - 2Id)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff x - y = 0$$

Tomamos un vector cumpliendo la ecuación; por ejemplo $u_1 = (1, 1)$.

Su recta polar es:

$$(\,1 \quad 1 \quad 0\,)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2x + 2y - 2 = 0 \iff x + y - 1 = 0.$$

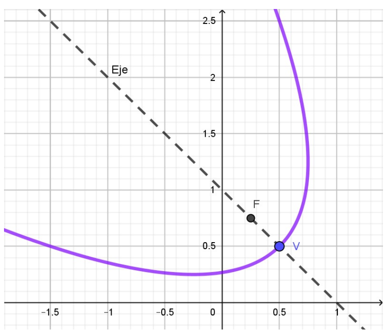
El vértice es la intersección del eje y de la cónica:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Resolvemos. En la primera ecuación $x = 1 - y$. Sustituyendo en la segunda:

$$(1-y)^2 + 2(1-y)y + y^2 - 4y + 1 = 0 \iff 2 - 4y = 0 \iff y = 1/2.$$

De donde $x = 1 - 1/2 = 1/2$ y el vértice es $V = (1/2, 1/2)$.



(iii) *Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.*

Sabemos que para una parábola la ecuación reducida es:

$$\lambda_1 x'^2 - 2dy' = 0$$

donde λ_1 es el autovalor no nulo de T y $d = \sqrt{\frac{-|A|}{\lambda_1}}$. En nuestro caso $\lambda_1 = 2$ y $d = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2}$. La ecuación reducida queda:

$$2x'^2 - 2\sqrt{2}y' = 0$$

y despejando x'^2, la reducida canónica:

$$x'^2 = 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} y'.$$

El parámetro p de la parábola es $p = \sqrt{2}/2$ y la distancia del foco al vértices $p/2 = \sqrt{2}/4$.

La excentricidad, por ser una parábola, es 1.

(1.5 puntos)

8.– *Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto* $(1,1)$*, tiene una asíntota paralela al eje* OY *y pasa por los puntos* $(0,2)$ *y* $(3,0)$*.*

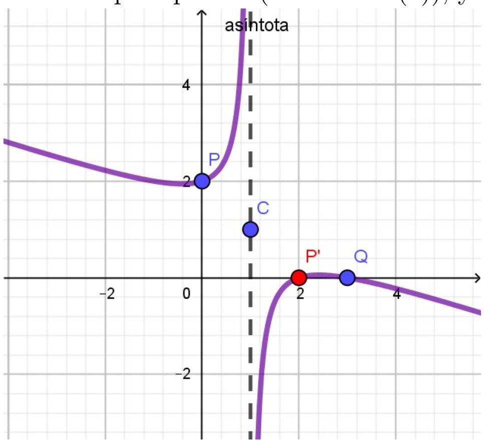
Seguiremos los siguiente pasos:

1) Como las asíntotas pasan por el centro, hallamos la asíntota como la paralela al eje OY pasando por $(1,1)$.

2) Como la cónica es simétrica respecto al centro, hallamos el simétrico de $P = (0,2)$ respecto a $(1,1)$. Será un punto P' que también pertenece a la cónica.

3) Formamos el haz conocidas una asíntota y dos puntos $P(0,2)$ y $Q(3,0)$.

4) Imponemos que la cónica buscada pase por P' (hallado en (2)), y concluimos.



1) Una paralela al eje OY, es decir, a la recta $x = 0$ es una recta de la forma $x = cte$. Como ha de pasar por el punto $(1,1)$ es la recta $x = 1$.

2) El simétrico P' de $P(0,2)$ respecto al centro $C(1,1)$, cumplen que C es el punto medio de P y P', es decir:

$$C = \frac{P + P'}{2} \Rightarrow P' = 2C - P = (2,2) - (0,2) = (2,0).$$

3) Las dos cónicas que generan el haz conocidas una asíntota y dos puntos $P(0,2)$ y $Q(3,0)$ son:

i) El producto de la asíntota y la recta PQ. La recta PQ usando la ecuación canónica de una recta es:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1 \iff 2x + 3y - 6 = 0.$$

ii) El producto de las paralelas a la asíntota que pasan por P y Q. Las paralelas a la asínota $x-1=0$ son de la forma $x - cte = 0$, por tanto la que pasa por $P(0,2)$ es $x=0$ y la que pasa por $Q=(3,9)$ es $x-3=0$.

El haz resulta entonces:

$$(x-1)(2x+3y-6)+\lambda x(x-3)=0.$$

4) Imponemos que la cónica pasa por $P'=(2,0)$ susituyendo en el haz:

$$(2-1)(2\cdot 2+3\cdot 0-6)+\lambda 2(2-3)=0 \iff -2-2\lambda=0 \iff \lambda=-1.$$

La cónica queda:

$$(x-1)(2x+3y-6)-x(x-3)=0 \iff 2x^2+3xy-6x-2x-3y+6-x^2+3x=0$$

Simplificando:

$$x^2+3xy-5x-3y+6=0.$$

(1.2 puntos)

9.– *Dada la cuádrica de ecuación:*

$$x^2+4xy-2y^2+2xz+4yz+z^2+2y+4z=0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

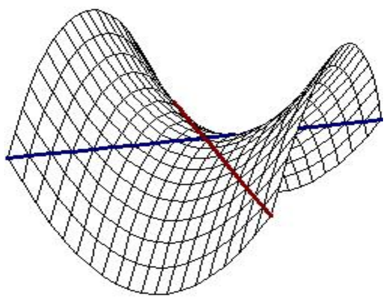
La matriz asociada a la cuádrica es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Para clasificarla la diagonalizamos por congruencia teniendo en cuenta que la última fila no puede ser cambiada de posición, ni multiplicada por un número, ni sumada a las demás:

$$A \overset{H_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{H_{31}(-1)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{21}(-2)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{31}(-1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \overset{H_{42}(1/6)}{\longrightarrow}\overset{\mu_{42}(1/6)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1/6 \end{pmatrix}$$

No puede diagonalizarse por completo sin romper alguna de las restricciones sobre la cuarta fila. El tipo de cuádrica queda determinado por la signatura de la matriz de términos cuadráticos que es $(+,-,0)$. Se trata de un paraboloide hiperbólico.



(0.6 puntos)
