Álgebra Lineal II **Examen Final**

Ejercicio único (3 horas) **7 de junio de 2021**

1.– Dados $a, b \in \mathbb{R}$ se define la forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como,

$f((x, y),(x', y')) = xx' + axy' + bx'y + 9yy'$

(i) Calcular a y b para que f sea una forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Para alguno de esos valores, calcular las ecucaciones paramétricas del núcleo de f.

(ii) Para $a = b = 5$, si w es la forma cuadrática asociada a f:

(ii.a) Clasificar la forma cuadrática.

(ii.b) Hallar los vectores autoconjugados. Si es posible, expresarlos como unión de dos rectas, dando en la base canónica un generador de cada una de ellas.

(ii.c) Hallar $w(1, 2)$. (1.2 puntos)

2.– Considerando en $\mathbb{R}^3$ el producto escalar cuya matriz de Gram respecto de la base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Dar un par de vectores de la base canónica que sean ortogonales.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1, 1, 1),(1, 1, 2),(2, 2, 3)\}$ calcular una base de su subespacio ortogonal $U^\perp$.

(iii) Hallar una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcular el ángulo que forman los vectores $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$.

(1.2 puntos)

3.– Indica razonadamente la falsedad o veracidad de las siguientes cuestiones:

(i) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 2$ entonces t es un giro de 60^o.

(ii) Si T es la matriz asociada a una transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ y $traza(T) = 0$ entonces t es un giro de 120^o.

(iii) En $\mathbb{R}^3$ la composición de una simetría respecto a una recta con una simetría respecto a un plano es un giro.

(iv) Si t es una transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ y $t(1, 0, 1) = (-1, 0, -1)$ entonces se trata de una transformación inversa.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ con el producto escalar usual, hallar razonadamente las matrices asociadas respecto a la base canónica de todas las posibles transformaciones ortogonales inversas que lleven la recta $x + y = 0$ en la recta $x - y = 0$.

(1.2 puntos)

5.– En el espacio afín euclideo dar las ecuaciones paramétricas e implícitas de una recta que pase por el punto $P = (0, 0, 1)$ y corte a las rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Calcular la distancia entre r y s.

(1.2 puntos)

6.– En el espacio afín euclideo $\mathbb{R}^3$ dar las ecuaciones de una homotecia de centro $(1, 0, 1)$ y que lleve el plano $x = 2$ en el plano $x = 4$. (0.7 puntos)

7.– En el plano afín dada la cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 1 = 0$$

(i) Clasificar la cónica.

(ii) Hallar su centro, ejes, vértices y asíntotas.

(iii) Calcular su ecuación reducida, excentricidad y distancia del vértice al foco.

(1.5 puntos)

8.– Hallar la ecuación de una cónica sabiendo que su centro es el punto $(1, 1)$, tiene una asíntota paralela al eje OY y pasa por los puntos $(0, 2)$ y $(3, 0)$.

(1.2 puntos)

9.– Dada la cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 2xz + 4yz + z^2 + 2y + 4z = 0$$

clasificar la superficie y esbozar un dibujo de la misma.

(0.6 puntos)

Álxebra Lineal II — Exame Final

Exercicio único (3 horas.) **7 de xuño 2021**

1.– Dados $a, b \in \mathbb{R}$ defínese a forma bilineal $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como,

$f((x,y),(x',y')) = xx' + axy' + bx'y + 9yy'$

(i) Calcular a e b para que f sexa unha forma bilineal simétrica semidefinida positiva. Para algún deses valores, calcular as ecucacións paramétricas do núcleo de f.

(ii) Para $a = b = 5$, se w é a forma cuadrática asociada a f:

(ii.a) Clasificar a forma cuadrática.

(ii.b) Atopar os vectores autoconxugados. Se é posible, expresalos como unión de dúas rectas, dando na base canónica un xenerador de cada unha delas.

(ii.c) Calcular $w(1, 2)$. (1.2 puntos)

2.– Considerando en $\mathbb{R}^3$ o producto escalar de matriz de Gram respecto da base canónica es:

$$G_C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(i) Dar un par de vectores da base canónica que sexan ortogonais.

(ii) Dado $U = \mathcal{L}\{(1,1,1),(1,1,2),(2,2,3)\}$ calcular unha base do seu subespazo ortogonal $U^{\perp}$.

(iii) Atopar unha base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

(iv) Calcular o ángulo que forman os vectores $(1,0,0)$ y $(0,1,0)$.

(1.2 puntos)

3.– Indica razoadamente a falsedade ou veracidade das seguintes cuestións:

(i) Se T é a matriz asociada a unha transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ e $traza(T) = 2$ entón t é un xiro de 60^o.

(ii) Se T é a matriz asociada a unha transformación ortogonal t en $\mathbb{R}^3$ e $traza(T) = 0$ entón t é un xiro de 120^o.

(iii) En $\mathbb{R}^3$ a composición dunha simetría respecto a unha recta cunha simetría respecto a un plano é un xiro.

(iv) Se t é unha transformación ortogonal en $\mathbb{R}^3$ e $t(1,0,1) = (-1,0,-1)$ entón se trata dunha transformación inversa.

(1.2 puntos)

4.– En $\mathbb{R}^2$ co producto escalar usual, atopar razoadamente as matrices asociadas respecto da base canónica de tódalas posibles transformacións ortogonais inversas que leven a recta $x + y = 0$ na recta $x - y = 0$.

(1.2 puntos)

5.– No espazo afín euclideo dar as ecuacións paramétricas e implícitas dunha recta que pase polo punto $P = (0,0,1)$ e corte ás rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y - z = 2 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Calcular a distancia entre r e s.

(1.2 puntos)

6.– No espazo afín euclideo $\mathbb{R}^3$ dar as ecuacións dunha homotecia de centro $(1,0,1)$ e que leve o plano $x = 2$ no plano $x = 4$. (0.7 puntos)

7.– No plano afín dada a cónica de ecuación:

$$x^2 + 2xy + y^2 - 4y + 1 = 0$$

(i) Clasificar a cónica.

(ii) Atopar o seu centro, eixos, vértices e asíntotas.

(iii) Calcular a súa ecuación reducida, excentricidade e distancia do vértice ó foco.

(1.5 puntos)

8.– Atopar a ecuación dunha cónica sabendo que o seu centro é o punto $(1,1)$, ten unha asíntota paralela ó eixo OY e pasa polos puntos $(0,2)$ e $(3,0)$.

(1.2 puntos)

9.– Dada a cuádrica de ecuación:

$$x^2 + 4xy - 2y^2 + 2xz + 4yz + z^2 + 2y + 4z = 0$$

clasificala superficie e esbozar un debuxo da mesma.

(0.6 puntos)
